بسمه تعالی

دانشگاه علم وصنعت

سیزدهمین مسابقه دانشجویی آمار کشور

۶ شهریور ۱۳۹۱

سوال‌های نظری

کد برگه

ریاضی عمومی

۱-۱) فرض کنید $f(x) = \begin{cases} |x|^a , & x \notin \mathbb{Q} \\ 0 , & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$، که در آن $\mathbb{Q}$ نشانگر مجموعهٔ اعداد گویا است.

الف) به ازای چه مقادیری از $a > 0$، تابع f در صفر مشتق‌پذیر است. (۶ نمره)

ب) آیا f در $x \neq 0$ مشتق‌پذیر است؟ (۲ نمره)

احتمال

۲-۱) پیشامدهای مستقل A_1، A_2، ... و A_n، را درنظر بگیرید بطوریکه $p_i = P(A_i), i = 1,2, \dots , n$. احتمال آنکه تعداد پیشامدهای رخ داده، عددی فرد باشد را بیابید. (۹ نمره)

۲-۲) فرض کنید X_1، X_2، ... و X_n، متغیرهایی تصادفی و مستقل بوده و Y_1، Y_2، ... و Y_n، آماره های ترتیبی متناظر آنها باشند. اگر X_1، X_2، ... و X_{n-1}، دارای توزیع نمایی استاندارد و X_n دارای توزیع نمایی با میانگین θ باشد، مطلوب است محاسبهٔ $P(Y_i = X_n)$ به ازای هر $i = 1,2, \dots , n$. (۹ نمره)

آمارریاضی

۳-۱) فرض کنید X_1، X_2، ... و X_n، یک نمونهٔ تصادفی از توزیعی با مقادیر مثبت با این ویژگی که $E(X) = Var(X) = 1$ باشد. آماره های ترتیبی این نمونهٔ تصادفی را با Y_1، Y_2، ... و Y_n، نشان می‌دهیم.

الف) ثابت کنید $E(\sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{X_i}) \geq n$. (۴ نمره)

ب) ثابت کنید $E(\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i) \leq n + n^2$. (۵ نمره)

دانشگاه علم وصنعت

سیزدهمین مسابقه دانشجویی آمار کشور

۶ شهریور ۱۳۹۱

سوال‌های نظری

کد برگه

آمارریاضی

۳-۲) فرض کنید X_1، X_2، ... و X_m، ($m>4$) و Y_1، Y_2، ... و Y_n، دو نمونهٔ تصادفی مستقل از توزیع‌های نمایی با میانگین‌های به ترتیب $\frac{1}{\lambda_1}$ و $\frac{1}{\lambda_2}$ باشند.

الف) UMVUE پارامتر $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ را بیابید. (۴ نمره)

ب) تحت تابع زیان مربع خطا، $L(\theta,\delta)=(\delta(X,Y)-\theta)^2$، بهترین براوردگر برای پارامتر $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ به فرم $\delta(X,Y)=c\frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$ را بدست آورید. (۵ نمره)

۳-۳) گیریم X_1، X_2، ... و X_n، یک نمونهٔ تصادفی از توزیع یکنواخت گسسته با تابع جرم احتمال $P(X=x)=\frac{1}{\theta}.I_{\{1,2,\dots,\theta\}}(x)$, $\theta>1$ باشد. برای آزمون فرض $H_o:\theta=\theta_0$ در مقابل $H_1:\theta\neq\theta_0$ پرتوان ترین آزمون یکنواخت (UMP) به اندازهٔ α را در صورت وجود بیابید. (۸ نمره)

نمونه‌گیری

۴-۱) جامعه‌ای شامل N عضو را در نظر بگیرید. هدف براورد میانگین کل $\bar{y}_N$ است. برای این منظور نمونه‌ای به حجم n به روش زیر انتخاب می‌شود. ابتدا عضو اول جامعه را با احتمال یک انتخاب کرده و سپس یک نمونهٔ تصادفی ساده به حجم $n-1$ از اعضای باقیماندهٔ جامعه انتخاب می‌کنیم. میانگین نمونه را با $\bar{Y}_{s(+1)}$ نشان می‌دهیم.

الف) نشان دهید $\bar{Y}_{s(+1)}$ برای $\bar{y}_N$ اریب است. (۴ نمره)

ب) اریبی $\bar{Y}_{s(+1)}$ را بیابید. (۴ نمره)