

ریاضی عمومی

۱-۱: فرض کنید

$$x_n = \begin{cases} -1 & \text{اگر } n \text{ مضرب ۳ باشد} \\ +1 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{n}$ را بررسی کنید. (۸ نمره)

احتمال

۱-۲: ده نامه مربوط به ده پاکت که روی آنها آدرسها نوشته شده در اختیار می‌باشند. این نامه‌ها را به تصادف در پاکتها قرار می‌دهیم.

الف- چقدر احتمال دارد نامه‌های ۱، ۳ و ۵ داخل پاکتهای خودشان باشند. (۲ نمره)

ب- اگر بدانیم فقط سه نامه داخل پاکتهایشان قرار گرفته‌اند چقدر احتمال دارد آن سه نامه، نامه‌های ۱، ۳ و ۵ باشند. (۳ نمره)

ج- حال این مسئله را در نظر بگیرید که این ده نامه و ده پاکت به طور نامنظمی در پوشه‌ای قرار دارند و شخصی به تصادف شش چیز (که می‌تواند نامه یا پاکت باشد) از این پوشه بیرون می‌آورد. چقدر احتمال دارد که هیچکدام از شش چیز جور نباشند (یعنی هیچ نامه‌ای با پاکتش در نمونه ۶ تایی نباشند)؟ (۳ نمره)

۲-۲: فرض کنید $\Phi(t)$ تابع توزیع متغیر تصادفی نرمال استاندارد باشد. نشان دهید که برای هر $t > 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{t}{1+t^2} e^{-\frac{t^2}{2}} \leq 1 - \Phi(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

(۶ نمره)

۳-۲: فرض کنید X_1, X_2, X_3, \dots دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت در بازه $(0, 1)$ باشند. اگر

$$N = \min \{n > 0 \mid X_{n:n} - X_{1:n} > \alpha\}, \quad 0 < \alpha < 1$$
 یک مقدار ثابت است،

که در آن $X_{1:n} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ و $X_{n:n} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ ، امید ریاضی N را محاسبه کنید. (۸ نمره)

آمار ریاضی

۱-۳: متغیرهای تصادفی X_1, X_2, \dots, X_n (که لزوماً مستقل و هم توزیع نیستند) دارای میانگین مشترک $-\infty < \mu < +\infty$ و واریانس مشترک $0 < \sigma^2 < \infty$ هستند. فرض کنید

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad n > 1$$

الف- ثابت کنید $0 \leq E(S_n^2) \leq \frac{n}{n-1} \sigma^2$ (۵ نمره)

ب- در چه صورت در طرف چپ و در چه صورت در طرف راست رابطه بالا، تساوی برقرار می شود؟ (۲ نمره)

۲-۳: فرض کنید لامپهای تولیدی یک کارخانه دارای توزیع نمایی با میانگین θ ساعت باشند. از لامپهای تولیدی این کارخانه که دارای حداقل عمر یک ساعت باشند یک نمونه تصادفی Y_1, Y_2, \dots, Y_n انتخاب می کنیم. برآوردگر UMVU برای پارامتر $\gamma(\theta) = \theta^2$ را بر حسب Y_1, Y_2, \dots, Y_n به دست آورید. (۸ نمره)

۳-۳: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر باشد

x	۰	۱	۲	۳
$f_\theta(x)$	θ	2θ	$C/9 - 2\theta$	$C/1 - \theta$

$$C/05 \leq \theta \leq C/1$$

می خواهیم فرض $H_0: \theta = C/05$ را در مقابل $H_1: \theta > C/05$ آزمون کنیم. کلیه آزمونهای UMP به اندازه $\alpha = C/05$ را برای این مسئله به دست آورید. (۸ نمره)

نمونه گیری

۱-۴: جامعه ای متشکل از $N = 5$ عضو B_1, C_1, C_2, D_1 و D_2 است. نمونه تصادفی ساده (بدون جایگذاری) به اندازه $n = 3$ به منظور برآورد نسبت C ها به $(C + D)$ ها یعنی P از این جامعه استخراج می شود. اگر این نسبت در نمونه p باشد،

الف - توزیعی شرطی p به شرط دانستن مجموع $(D + C)$ ها در نمونه را به دست آورید. (۵ نمره)

ب- با استفاده از قسمت الف، نشان دهید که p برای P ناریب است. (۲ نمره)