ریاضی عمومی

۱-۱ : دنباله توابع $\{\phi_n(t)\}$ را در نظر گیرید، که در آن

$$\phi_n(t) = \begin{cases} 1-n\,|\,t-\frac{1}{n}\,| & 0 \le t \le \frac{2}{n} \\ \frac{1}{2}-|\,t-2\,| & \frac{3}{2} \le t \le \frac{5}{2} \\ 0 & o.w. \end{cases} \qquad n \in N$$

الف) اگر t_n نمایانگر نقطه ماکزیمم $\phi_n(t)$ باشد، t_n و مقدار $\phi_n(t_n)$ را بدست آورید.(۲ نمره)

ب) برای هر مقدار داده شده t، مقدار $\lim_{n\to\infty}\phi_n(t)$ را بدست آورده و آنرا $\phi(t)$ بنامید. .(۲ نمره)

ج) اگر t_0 نمایانگر نقطه ماکزیمم $\phi(t)$ باشد، t_0 و مقدار $\phi(t_0)$ را بدست آورید. .(۱ نمره)

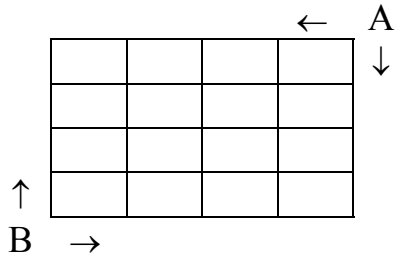
د) آیا $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$ ؟.(۱ نمره)

۱-۲: انتگرال زیر را محاسبه کنید. .(۴ نمره)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \left[-\ln\left(\int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin y dy\right) \right]^3 dx$$

احتمال

۲-۱: با توجه به شکل زیر، متحرک A به سمت متحرک B حرکت می‌کند، بطوریکه در هر ثانیه یک ضلع مربع واحد را به سمت پائین یا به سمت چپ با احتمال برابر می‌پیماید. هم‌چنین متحرک B به سمت متحرک A در حال حرکت است، بطوریکه در هر ثانیه یک ضلع مربع واحد را به سمت بالا یا به سمت راست با احتمال برابر می‌پیماید. اگر هر دو متحرک با هم شروع به حرکت نمایند، احتمال برخورد دو متحرک را محاسبه کنید. .(۹ نمره)



۲-۲: متوسط تعداد پرتابهای یک تاس متعادل (سالم) تا مشاهده چهار خال شش متوالی چقدر است؟(۹ نمره)

آمار ریاضی

۳-۱: زمینی داریم که به شکل مربع است و می‌خواهیم مساحت آن را برآورد کنیم. اگر فرایند اندازه‌گیری ما شامل اندازه‌گیریهای مستقل با خطای $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$ باشد، کدام یک از روشهای زیر را به کار خواهید برد و چرا؟

الف) یک ضلع را اندازه گرفته و به توان دو می‌رسانیم. (۳ نمره)

ب) دو ضلع را اندازه گرفته، متوسط آن دو را به توان دو می‌رسانیم. (۳ نمره)

ج) دو ضلع را اندازه گرفته در هم ضرب می‌کنیم.(۲ نمره)

د) دلیل یا دلایل انتخاب روش (های) به کار رفته را بیان کنید. (۳ نمره)

۳-۲: فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع پواسون با پارامتر λ باشد. اگر $\overline{X}$ و S^2 نمایانگر به ترتیب میانگین نمونه‌ای و واریانس نمونه‌ای باشند.

الف) مقدار $Cov_\lambda(\overline{X},S^2)$ را بدست آورید. .(۲ نمره)

ب) نشان دهید: .(۳ نمره)

$$Var_\lambda(S^2) = Var_\lambda(\overline{X}) + E_\lambda(S^2 - \overline{X})^2$$

۳-۳ : فرض کنید $(X_1,X_2,X_3) \sim M(n,\theta^2,2\theta(1-\theta),(1-\theta)^2)$ ، $0<\theta<1$ علاقمند به آزمون زیر در سطح α هستیم

$$H_0:\theta=\theta_0 \quad vs \quad H_1:\theta>\theta_0$$

الف) پر توانترین آزمون یکنواخت (UMPT) اندازه α را بدست آورید. .(۳ نمره)

ب) اگر $n=3$ و $\theta_0=\frac{1}{2}$ ، UMPT های اندازه ۰/۰۵ و ۰/۱ را تعیین نمائید. .(۳ نمره)

۴: فرض کنید :

- x_i ، $i = 1,\dots,N$ نشاندهنده مقدار واقعی یک خصیصه روی فرد iام در جامعه باشد.
- هنگام مصاحبه با فرد iام وی مقدار y_i را به جای مقدار x_i گزارش می‌کند که در آن y_i یک متغیر تصادفی با میانگین μ_i است.
- براساس یک نمونه تصادفی به حجم n ، $\bar{y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ را به عنوان برآوردی برای میانگین جامعه یعنی $\bar{X}_N$ به کار بریم.

الف) آیا $\bar{y}_n$ برای $\bar{X}_N$ نااریب است؟ در صورت منفی بودن جواب ، مقدار اریبی آنرا بدست آورید. (۳ نمره)

ب) واریانس $\bar{y}_n$ را بدست آورید.(۴نمره)

ج) نشان دهید که برآورد معمولی $V(\bar{y}_n)$ یعنی $(\frac{1}{n}-\frac{1}{N})s^2$ که در آن $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum(y_i-\bar{y}_n)^2$ مقدار واریانس را به اندازه $\frac{1}{N}\bar{\sigma}_y^{\,2}$ کم برآورد (Underestimate) می‌کند در حالیکه برآورد $\frac{s^2}{n}$ مقدار واریانس را به اندازه $\frac{1}{N}S_{\bar{y}}^2$ بیش برآورد (Overestimate) می‌کند، که در آن

$\bar{\sigma}_y^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E(y_i-\mu_i)^2$ و $S_{\bar{y}}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\mu_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mu_i)^2$. (۳ نمره)