چهارمین مسابقه دانشجویی آمار کشور

امتحان بخش نظری | ۲۹ مرداد ماه ۱۳۸۲ | کد برگه

ریاضی عمومی

۱-۱: فرض کنید:

$$m_1(x) = x^2$$
$$m_{n+1}(x) = \min_{0 \le t \le x}\{m_n(t) + (x-t)^2\}, \quad n = 1,2,...$$

مطلوب است

$$\lim_{n \to \infty} m_n(x)$$

۱-۲: فرض کنید تابع در فاصله [۱و۰] پیوسته ، در فاصله (۱و۰) مشتق‌پذیر، $f(0) = 0$ و $f(1) = \frac{\pi}{3}$ باشد. نشان دهید که یک $c \in$ (۱و۰) وجود دارد بطوریکه

$$f'(c) = \sqrt{3}(1 + f^2(c))$$

احتمال

۲-۱: عدد صحیح را به جزء افراز می‌کنیم که هر جزء متغیری تصادفی مانند X_i $(i = 1,2,...,k, k \ge 2)$ است که دارای توزیع یکنواخت بر مجموعهٔ $\{0,1,2,...,n\}$ است. $Cov(X_1, X_2)$ را برحسب و حساب کنید.د که یک $c \in$ (۱و۰) وجود دارد بطوریکه

$$f'(c) = \sqrt{3}(1 + f^2(c))$$

۲-۲: فرض کنید یک تابع حقیقی نامنفی روی باشد که در شرط $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 1$ صدق می‌کند، ثابت کنید اگر برای هر متغیر تصادفی ، متغیر تصادفی $Y = \int_{-\infty}^{X} g(t)dt$ دارای توزیع یکنواخت باشد آنگاه تابع چگالی احتمال است.

۲-۳: فرض کنید $P(T = 1) = P(T = -1) = \frac{1}{2}$ و $X \sim N(0,1)$ و متغیرهای تصادفی و از یکدیگر مستقل هستند.

الف: ثابت کنید دارای توزیع (۱و۰) است.

ب: بدون استفاده از تابع چگالی احتمال توأم نشان دهید که دو متغیر نرمال و ناهمبسته ولی نامستقل هستند

ج : با استفاده از تابع مولد گشتاور توأم (X,Y) ، تابع چگالی احتمال توأم (X,Y) را بیابید و سپس درستی قسمت (ب) را نشان دهید

آمار ریاضی

۳-۱: فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از تابع احتمال زیر باشد:

$$f_{\theta,k}(x) = \begin{cases} \theta & x = 1 \\ \dfrac{1-\theta}{k-1} & x = 2,\ldots,k \end{cases}$$

که در آن θ و k نامعلوم هستند و $0 \le \theta \le 1$ و $k \in \{1,2,\ldots\}$. برآوردگر حداکثر درستنمایی (MLE) را برای (k و θ) بدست آورید.

۳-۲: فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $E(\mu,\sigma)$ با تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma}\exp\{-(x-\mu)/\sigma\}, \qquad x \ge \mu$$

الف: برآوردگر UMVU پارامتر $\frac{\mu}{\sigma}$ را بدست آورید.

ب-با فرض $\sigma = 1$ ، نشان دهید که آزمون زیر پرتوان‌ترین آزمون یکنواخت (UMP) به اندازهٔ α برای آزمون $H_0: \mu \ge \mu_0$ در مقابل $H_1: \mu < \mu_0$ است.

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & x_{(1)} \le \mu_0 \\ \alpha & x_{(1)} > \mu_0 \end{cases} \qquad (x_{(1)} = \min(x_1,\ldots,x_n))$$

رگرسیون

۴-۱: اگر در یک مدل رگرسیونی، مدل فرضی $E(Y|X=x) = \beta_0 + \beta_1 x$ و مدل واقعی $E(Y|X=x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ باشد، براساس n مشاهده (x_i, Y_i), $i = 1,\ldots,n$ ، در برآورد β_0 و β_1 براساس مدل فرضی چه میزان اریبی بوجود خواهد آمد.

نمونه گیری

۵-۱: جامعه‌ای را درنظر بگیرید که شامل N خوشه است. فرض کنید اندازه خوشه i-ام M_i و مقدار کل صفت مورد بررسی X_i باشد و $i = ۱,...,N$. دو خوشه یکی پس از دیگری و بدون جایگذاری با احتمال متناسب با حجم خوشه انتخاب می‌کنیم. اگر نمونه به ترتیب شامل i امین خوشه و j امین خوشه باشد برآوردگر زیر را برای مقدار کل در جامعه درنظر بگیرید.

$$\bar{y} = \frac{y_۱ + y_۲}{۲}$$

که در آن

$$M_o = \sum_{۱}^{N} M_i \quad \text{و} \quad y_2 = X_i + \{X_j(\frac{M_o - M_i}{M_j})\} \quad \text{و} \quad y_1 = \frac{X_i}{M_i} M_o$$

الف) نشان دهید که $\bar{y}$ نااریب است.

ب) واریانس $\bar{y}$ را برحسب واریانس $y_۱$ و $y_۲$ بنویسید.

ج) نشان دهید که $\frac{1}{2}\sum_{۱}^{2} (y_i - \bar{y})^2$ برآوردگری نااریب برای $V(\bar{y})$ است