در توضیح نحوهٔ استفاده از رابطهٔ (۴۹.۲)، بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای نسبت واریانسهای σ_1^2/σ_2^2 در مثال ۲.۲ با توجه به $F_{۰٫۰۲۵,۹,۱۱} = ۳٫۵۹$ و $F_{۰٫۹۷۵,۹,۱۱} = ۱/F_{۰٫۰۲۵,۱۱,۹} = ۱/(۳٫۹۲) = ۰٫۲۵۵$، به‌صورت زیر است

$$\frac{۱۴٫۵}{۱۰٫۸}(۰٫۲۵۵) \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{۱۴٫۵}{۱۰٫۸}(۳٫۵۹)$$

$$۰٫۳۴ \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq ۴٫۸۱$$

۷.۲ مسائل

۱.۲ لازم است که مقاومت الیافی حداقل (پوند بر اینچ مربع) ۱۵۰ باشد. بر اساس تجربیات گذشته می‌دانیم که انحراف معیار مقاومت الیافها (پوند بر اینچ مربع) $\sigma = ۳$. یک نمونهٔ تصادفی چهارتایی را در نظر گرفته و متوسط مقاومت الیافها را برابر (پوند بر اینچ مربع) ۱۴۸ مشاهده کرده‌ایم. آیا می‌توان با $\alpha = ۰٫۰۵$ حکم به قابل قبول بودن مقاومت الیافها داد؟ یک بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین مقاومت الیافها ارائه دهید.

۲.۲ می‌دانیم قطر میله‌های فولادی در یک فرایند خاص تولید، دارای انحراف معیار $\sigma = ۰٫۰۰۰۱$ اینچ است. متوسط قطر یک نمونهٔ تصادفی شامل ۱۰ میله برابر با ۰٫۲۵۴۵ اینچ شده است. با $\alpha = ۰٫۰۵$ این فرض را که میانگین واقعی قطر این میله‌ها ۰٫۲۵۵ اینچ باشد آزمون کنید. یک بازهٔ اطمینان ۹۰ درصدی برای اندازهٔ میانگین قطر میله‌ها ارائه دهید.

۳.۲ یک متغیر تصادفی با توزیع نرمال دارای میانگین نامعلوم μ و واریانس معلوم $\sigma^2 = ۹$ است. حجم نمونهٔ لازم برای ساخت یک بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین با عرض ۱٫۰ چقدر است؟

۴.۲ مطالعهٔ زمان نگهداری یک آشامیدنی کربن‌دار مورد نظر است. ۱۰ بطری را به تصادف انتخاب کرده و آنها را آزمایش کرده‌ایم. نتایج زیر به‌دست آمده‌اند:

روزها	
۱۳۸	۱۰۸
۱۶۳	۱۲۴
۱۵۹	۱۲۴
۱۳۴	۱۰۶
۱۳۹	۱۱۵

گیریم فرض مقابل این است که زمان نگهداری از ۱۲۵ روز بیشتر باشد. آیا می‌توان فرض صفر $H_0 : \mu = ۱۲۵$ را رد کرد؟ یک بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین واقعی زمان نگهداری ارائه دهید؟

۵.۲ زمان تعمیر یک وسیلهٔ الکترونیکی، متغیری تصادفی با توزیع نرمال است که برحسب ساعت اندازه‌گیری می‌شود. زمان تعمیر ۱۶ وسیله که به تصادف انتخاب شده‌اند به قرار زیر بوده است:

ساعت			
۱۵۹	۲۸۰	۱۰۱	۲۱۲
۲۲۴	۳۷۹	۱۷۹	۲۶۴
۲۲۲	۳۶۲	۱۶۸	۲۵۰
۱۴۹	۲۶۰	۴۸۵	۱۷۰

آیا منطقی به نظر می‌رسد که میانگین زمان واقعی تعمیر از ۲۲۵ ساعت بیشتر باشد؟ یک بازهٔ اطمینان برای میانگین زمان تعمیر واقعی ارائه دهید.

۶.۲ به منظور پر کردن شیشه‌های پلاستیکی به حجم خالص ۱۶٫۰ اونس از دو ماشین استفاده می‌شود. فرض کنید فرایند پر کردن ماشینها، نرمال با انحراف معیارهای $\sigma_1 = ۰٫۰۱۵$ و $\sigma_2 = ۰٫۰۱۸$ باشد. بخش کنترل کیفیت گمان می‌کند که هر دو ماشین شیشه‌ها را با مقدار یکسانی از مواد پر می‌کنند و ممکن است این حجم خالص ۱۶ اونس باشد یا ۱۶ اونس نباشد. یک نمونهٔ تصادفی از خروجی هر ماشین را در نظر گرفته‌ایم.

ماشین ۱		ماشین ۲	
۱۶٫۰۳	۱۶٫۰۱	۱۶٫۰۲	۱۶٫۰۳
۱۶٫۰۴	۱۵٫۹۶	۱۵٫۹۷	۱۶٫۰۴
۱۶٫۰۵	۱۵٫۹۸	۱۵٫۹۶	۱۶٫۰۲
۱۶٫۰۵	۱۶٫۰۲	۱۶٫۰۱	۱۶٫۰۱
۱۶٫۰۲	۱۵٫۹۹	۱۵٫۹۹	۱۶٫۰۰

آیا فکر می‌کنید نظر بخش کنترل کیفیت درست باشد؟

۷.۲ دو نوع پلاستیک برای استفاده در ساختن ماشینهای حساب الکترونیکی مناسب است. مقاومت در برابر شکستگی این پلاستیکها مهم است. می‌دانیم (پوند بر اینچ مربع) $\sigma_1 = \sigma_2 = ۱٫۰$. براساس نمونه‌های تصادفی به حجمهای $n_1 = ۱۰$ و $n_2 = ۱۲$، $\overline{y}_1 = ۱۶۲٫۵$ و $\overline{y}_2 = ۱۵۵٫۰$ را به‌دست آورده‌ایم. از پلاستیک ۱ به شرطی استفاده می‌شود که مقاومت آن در برابر شکستگی حداقل به‌اندازه (پوند بر اینچ مربع) ۱۰ از میانگین مقاومت پلاستیک نوع ۲ در مقابل شکستگی بیشتر باشد. آیا بر اساس اطلاعات حاصل از این نمونه کارخانه می‌تواند از پلاستیک نوع ۱ استفاده کند؟ یک بازهٔ اطمینان ۹۹ درصد برای تفاوت واقعی میانگینهای مقاومت در برابر شکستگی ارائه دهید.

۸.۲ مقادیر زیر زمان سوختن شعله در دو طرح مختلف است. مهندس طرح علاقه‌مند به میانگین و واریانس زمان سوختن شعله است.

نوع ۱		نوع ۲	
۶۵	۸۲	۶۴	۵۶
۸۱	۶۷	۷۱	۶۹
۵۷	۵۹	۸۳	۷۴
۶۶	۷۵	۵۹	۸۲
۸۲	۷۰	۶۵	۷۹

(الف) فرض برابری واریانسها را آزمون کنید. $\alpha =$ ۰٫۰۵ را در نظر بگیرید.
(ب) با استفاده از نتایج (الف) فرض برابری میانگینهای زمان سوختن دو شعله را آزمون کنید.
(ج) در این مسأله در نقش پذیرهٔ نرمال بودن بحث کنید.

۹.۲ مقاله‌ای*، آزمایشی را برای تعیین اثر نرخ جریان C_2F_6 در یکنواختی حذف قسمتهای ناخواسته روی ورقهٔ ویفر سیلیکون** که در ساخت مدارهای مجتمع از آن استفاده می‌شود شرح می‌دهد. برای دو نرخ جریان داده‌ها به قرار زیر بوده‌اند:

جریان C_2F_6	مشاهدهٔ یکنواختی					
	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱۲۵	۲٫۷	۴٫۶	۲٫۶	۳٫۰	۳٫۲	۳٫۸
۲۰۰	۴٫۶	۳٫۴	۲٫۹	۳٫۵	۴٫۱	۵٫۱

(الف) آیا نرخ جریان C_2F_6 بر متوسط یکنواختی حذف قسمتهای ناخواسته اثر دارد؟
(ب) آیا نرخ جریان C_2F_6 در تغییرپذیری یکنواختی حذف قسمتهای ناخواسته از یک ورقه به ورقهٔ دیگر مؤثر است؟
(ج) آیا نمودار جعبه‌ای می‌تواند به تعبیر داده‌های این آزمایش کمک کند؟

۱۰.۲ در یک واحد شیمیایی وسیلهٔ تصفیهٔ جدیدی نصب شده است. قبل از نصب این وسیله، بر اساس نمونه‌ای تصادفی اطلاعاتی دربارهٔ درصد ناخالصی به‌صورت: $\bar{y}_1 =$ ۱۲٫۵، $S_1^2 =$ ۱۰۱٫۱۷، و $n_1 =$ ۸ به‌دست آورده‌ایم. بعد از نصب وسیله بنا بر یک نمونهٔ تصادفی دیگر $\bar{y}_2 =$ ۱۰٫۲، $S_2^2 =$ ۹۴٫۷۳، و $n_2 =$ ۹ حاصل شده است. آیا می‌توان نتیجه گرفت که واریانسها برابرند؟ آیا این وسیلهٔ تصفیه درصد ناخالصی را به‌صورتی معنی‌دار کاهش داده است؟

* "Orthogonal Design for Process Optimization and Its Application to Plasma Etching" by G.Z.Yin and D.W. Jillie (May 1987), *Solid State Technology.*

** ویفر سیلیکون (silicon wafer) ورقهٔ نازک صیقلی از سیلیکون است که روی آن، عناصر مدارات مجتمع الکترونیکی قرارگرفته یا از آن در تهیهٔ برخی از همین عناصر استفاده می‌شود.ـ م.

۱۱.۲ در طی یک آزمایش اصلاح کیفیت برای حذف‌کنندهٔ پلاسما بیست مشاهده را در یکنواختی حذف قسمتهای ناخواسته از روی ویفر سیلیکون در نظر گرفته‌ایم. داده‌ها به‌صورت زیر بوده‌اند:

۷٫۲۵	۵٫۹۸	۴٫۷۶	۶٫۶۵	۵٫۳۴
۶٫۲۱	۵٫۶۲	۵٫۵۴	۷٫۵۵	۶٫۰۰
۴٫۹۸	۴٫۳۹	۵٫۴۴	۷٫۳۵	۵٫۹۷
۵٫۳۲	۶٫۰۰	۴٫۶۱	۶٫۳۵	۵٫۲۵

(الف) یک بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای برآورد کردن $\sigma^۲$ به‌دست آورید.

(ب) فرض $\sigma^۲ = ۱٫۰$ را آزمون کنید.

(ج) از پذیرهٔ نرمال بودن و نقش آن در این مسأله بحث کنید.

۱۲.۲ قطر یک بلبرینگ را دوازده نفر اندازه‌گیری کرده‌اند، و هر یک از آنها از دو نوع کولیس متفاوت استفاده کرده است. نتایج به شرح زیر بوده است

شخص اندازه‌گیر	کولیس ۱	کولیس ۲
۱	۰٫۲۶۵	۰٫۲۶۴
۲	۰٫۲۶۵	۰٫۲۶۵
۳	۰٫۲۶۶	۰٫۲۶۴
۴	۰٫۲۶۷	۰٫۲۶۶
۵	۰٫۲۶۷	۰٫۲۶۷
۶	۰٫۲۶۵	۰٫۲۶۸
۷	۰٫۲۶۷	۰٫۲۶۴
۸	۰٫۲۶۷	۰٫۲۶۵
۹	۰٫۲۶۵	۰٫۲۶۵
۱۰	۰٫۲۶۸	۰٫۲۶۷
۱۱	۰٫۲۶۸	۰٫۲۶۸
۱۲	۰٫۲۶۵	۰٫۲۶۹

آیا اختلافی معنی‌دار بین میانگینهای دو نوع وسیلهٔ اندازه‌گیری که با نمونه‌ها مشخص شده است وجود دارد؟ $\alpha = ۰٫۰۵$ را به‌کار برید.

۱۳.۲ مقاله‌ای در مجلهٔ *Strain Analysis* (شمارهٔ دوم، جلد هشتم سال ۱۹۸۳) چندین شیوهٔ پیشگویی قدرت پیچشی را برای تیرهای فولادی مقایسه می‌کند. در مورد دو تا از این شیوه‌ها داده‌های مربوط به نه تیر فولادی به‌صورت خارج قسمت مقدار پیشگویی‌شده به نیروی مشاهده‌شده به قرار زیر بوده‌اند:

تیر فولادی	شیوهٔ ۱	شیوهٔ ۲
S۱/۱	۱٫۱۸۶	۱٫۰۶۱
S۲/۱	۱٫۱۵۱	۰٫۹۹۲
S۳/۱	۱٫۳۲۲	۱٫۰۶۳
S۴/۱	۱٫۳۳۹	۱٫۰۶۲
S۵/۱	۱٫۲۰۰	۱٫۰۶۵
S۲/۱	۱٫۴۰۲	۱٫۱۷۸
S۲/۲	۱٫۳۶۵	۱٫۰۳۷
S۲/۳	۱٫۵۳۷	۱٫۰۸۶
S۲/۴	۱٫۵۵۹	۱٫۰۵۲

آیا اختلافی بین این دو شیوه وجود دارد؟

۱۴.۲ دو قرص مسکن درد بر اساس سرعت جذبشان در بدن مقایسه می‌شوند. به‌خصوص ادعا می‌شود که قرص نوع ۱ دو برابر سریعتر از قرص نوع ۲ جذب می‌شود. می‌پذیریم که σ_1^2 و σ_2^2 معلوم‌اند. یک آمارهٔ آزمون برای

$$H_0 : 2\mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : 2\mu_1 \neq \mu_2$$

ارائه دهید.

۱۵.۲ در انجام آزمون

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

گیریم σ_1^2 و σ_2^2 معلوم‌اند و گیریم برای دو نمونه شرط
باید N مشاهده را از دو جامعه در نظر گرفت تا تواناترین آزمون حاصل شود. $n_1 + n_2 = N$ برقرار باشد. به چه نسبتی

۱۶.۲ رابطهٔ (۴۵.۲) را که معرف بازهٔ اطمینان $100(1-\alpha)$ درصد برای واریانس توزیع نرمال است به‌دست آورید.

۱۷.۲ رابطهٔ (۴۹.۲) را که معرف بازهٔ اطمینان $100(1-\alpha)$ درصد برای نسبت σ_1^2/σ_2^2 است به‌دست آورید. σ_1^2 و σ_2^2 واریانسهای دو توزیع نرمال‌اند.