برای تمامی ۱۰ آزمون در صورتی‌که مستقل باشند به‌درستی ۰٫۶۰ = ^{۱۰}(۰٫۹۵) می‌شود. به‌این ترتیب، افزایشی چشمگیر در خطای نوع ۱ به‌وجود می‌آید.

شیوهٔ مناسب آزمون برابری چندین میانگین، شیوهٔ تحلیل واریانس است. اما، تحلیل واریانس نسبت به مسألهٔ بالا کاربردی بسیار وسیعتر دارد. احتمالاً تحلیل واریانس مفیدترین تکنیکها در زمینهٔ استنباط آماری است.

۲.۳ تحلیل واریانس

گیریم از یک عامل، a تیمار یا a سطح متفاوت داشته باشیم که می‌خواهیم آنها را با هم مقایسه کنیم. پاسخ مشاهده‌شده از هریک از a تیمار یک متغیر تصادفی است. داده‌ها به‌صورت جدول ۲.۳ ظاهر می‌شوند. یک درایهٔ جدول ۲.۳ (مثلاً، y_{ij}) jامین مشاهده را تحت iامین تیمار نشان می‌دهد. به‌طور کلی تحت iامین تیمار n مشاهده داریم. توجه کنید که جدول ۲.۳ حالت کلی داده‌های آزمایش مقاومت کششی در جدول ۱.۳ است.

خواهیم دید که توصیف مشاهدات با مدل خطی آماری؛

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij} \begin{cases} i = 1, 2, \cdots, a \\ j = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \qquad (1.3)$$

مفید است. که در آن، y_{ij} (ij)امین مشاهده، μ پارامتر مشترک برای تمام تیمارها به‌نام میانگین کل، τ_i پارامتر ویژهٔ iامین تیمار به‌نام اثر iامین تیمار، و ϵ_{ij} مؤلفهٔ خطای تصادفی است. هدفهای ما آزمون فرضهای مناسب دربارهٔ اثرهای تیماری و برآوردکردن آنهاست. در آزمون فرض، خطاهای مدل را متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 می‌گیریم. می‌پذیریم که واریانس σ^2 برای تمام سطوح عامل ثابت است.

جدول ۲.۳ داده‌های نوعی برای آزمایش تک‌عاملی

تیمار (سطح)	مشاهدات				کل	متوسط
۱	y_{11}	y_{12}	$\cdots$	y_{1n}	$y_{1.}$	$\bar{y}_{1.}$
۲	y_{21}	y_{22}	$\cdots$	y_{2n}	$y_{2.}$	$\bar{y}_{2.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
			$\cdots$			
a	y_{a1}	y_{a2}	$\cdots$	y_{an}	$y_{a.}$	$\bar{y}_{a.}$
					$y_{..}$	$\bar{y}_{..}$

این مدل را تحلیل واریانس یکطرفه یا تک‌عاملی می‌گویند، زیرا تنها یک عامل بررسی می‌شود. به‌علاوه لازم است که آزمایش به‌ترتیبی تصادفی انجام شود به‌قسمی که محیطی که تیمارها در آن اعمال می‌شوند (اغلب آنها را واحدهای آزمایشی می‌گویند) تا حد ممکن همگن باشد. پس، طرح آزمایش طرح کاملاً تصادفی‌شده است.

در واقع مدل آماری، برابری (۱.۳)، دو وضعیت متفاوت را نسبت به اثر تیمارها توصیف می‌کند. نخست، a تیمار مشخصاً به‌وسیلهٔ آزمایشگر انتخاب می‌شوند. در این وضعیت می‌خواهیم فرضهایی را در مورد میانگینهای تیماری آزمون کنیم، و نتیجه‌گیریها تنها در مورد سطوح عاملی مورد نظر در تحلیل معتبرند. نتایج را نمی‌توان به تیمارهای مشابهی که صریحاً در نظر نگرفته‌ایم تعمیم داد. همچنین ممکن است بخواهیم پارامترهای مدل (μ, τ_i, σ^2) را برآورد کنیم. این را مدل اثرهای تثبیت‌شده می‌نامیم. از طرف دیگر، a تیمار می‌توانند نمونه‌ای تصادفی از جامعهٔ بزرگتر تیمارها باشد. در این وضعیت علاقه‌مندیم بتوانیم نتایج را (که مبتنی بر نمونه‌ای از تیمارها هستند) به تمامی تیمارهای جامعه تعمیم دهیم، خواه آنها را به‌طور ضمنی در تحلیل در نظر گرفته باشیم و خواه در نظر نگرفته باشیم. در اینجا τ_i متغیرهای تصادفی هستند، و اطلاع دربارهٔ موارد خاص بررسی‌شده نسبتاً بی‌ارزش است. در عوض فرض تغییرپذیری τ_i را آزمون می‌کنیم و سعی می‌کنیم که این تغییرپذیری را برآورد کنیم. این را مدل اثرهای تصادفی یا مدل مؤلفه‌های واریانس می‌گوییم.

۲.۳ تحلیل مدل اثرهای تثبیت‌شده

در این بخش تحلیل واریانس تک‌عاملی را برای مدل اثرهای تثبیت‌شده ارائه می‌دهیم. در مدل اثرهای تثبیت‌شده، اثرهای تیماری، τ_i معمولاً به‌صورت انحراف از میانگین کل تعریف می‌شوند، به‌طوری‌که،

$$\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0 \tag{۲.۳}$$

گیریم $y_{i.}$ مجموع مشاهدات تحت iامین تیمار و $\bar{y}_{i.}$ متوسط مشاهدات تحت iامین تیمار باشد. به تشابه گیریم که $y_{..}$ مجموع تمام مشاهدات و $\bar{y}_{..}$ میانگین کل تمام مشاهدات باشد. به‌صورت نمادی قرار می‌دهیم،

$$y_{i.} = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}, \qquad \bar{y}_{i.} = y_{i.}/n \qquad i = 1, 2, \cdots, a \tag{۳.۳}$$

$$y_{..} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} y_{ij} \qquad \bar{y}_{..} = y_{..}/N$$

که در آن، $N = an$ تعداد کل مشاهدات است. ملاحظه می‌کنیم که نماد «نقطه» در زیرنویس دلالت بر مجموعیابی نسبت به زیرنویسی می‌کند که نقطه به‌جای آن نشسته است.

میانگین iامین تیمار $E(y_{ij}) \equiv \mu_i = \mu + \tau_i, i = ۱, ۲, \cdots, a$. پس، میانگین iامین تیمار شامل میانگین کل به‌علاوهٔ اثر iامین تیمار است. علاقه‌مند به آزمون برابری میانگینهای تیماری هستیم؛ یعنی،

$$H_۰ : \mu_۱ = \mu_۲ = \cdots = \mu_a$$
$$H_۱ : \mu_i \neq \mu_j \quad \text{برای حداقل یک جفت } (i, j)$$

توجه کنید که اگر $H_۰$ درست باشد، تمام تیمارها میانگین مشترک μ دارند. طریقی هم‌ارز در نوشتن فرض بالا، نوشتن آن برحسب اثرهای تیماری، τ_i است

$$H_۰ : \tau_۱ = \tau_۲ = \cdots = \tau_a = ۰$$
$$H_۱ : \tau_i \neq ۰ \quad \text{حداقل برای یک } i$$

پس، می‌توان در خصوص آزمون برابری میانگین تیمارها یا آزمون صفربودن اثرهای تیماری (τ_i) صحبت کرد. شیوهٔ مناسب برای آزمون برابری میانگینهای تیماری، تحلیل واریانس است.

۱.۳.۳ تجزیهٔ کل مجموع مربعات

نام تحلیل واریانس از افراز کل تغییرپذیری به اجزای آن آمده است. از کل مجموع مربعات تصحیح‌شده، یعنی

$$SS_{\text{کل}} = \sum_{i=۱}^{a} \sum_{j=۱}^{n} (y_{ij} - \overline{y}_{..})^۲$$

به‌عنوان اندازه‌ای از کل تغییرپذیری در داده‌ها استفاده می‌شود. به‌طور شهودی این موضوع منطقی است زیرا، اگر $SS_{\text{کل}}$ را بر تعداد درجات آزادی آن تقسیم کنیم (در این حالت $an - ۱ = N - ۱$)، واریانس نمونه‌ای y به‌دست می‌آید. و واریانس نمونه البته اندازهٔ متعارف تغییرپذیری است.

توجه کنید که کل مجموع مربعات تصحیح‌شده، $SS_{\text{کل}}$، را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\overline{y}_{..})^2=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}[(\overline{y}_{i.}-\overline{y}_{..})+(y_{ij}-\overline{y}_{i.})]^2 \qquad (۴.۳)$$

یا

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\overline{y}_{..})^2=n\sum_{i=1}^{a}(\overline{y}_{i.}-\overline{y}_{..})^2+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\overline{y}_{i.})^2 + 2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(\overline{y}_{i.}-\overline{y}_{..})(y_{ij}-\overline{y}_{i.}) \qquad (۵.۳)$$

اما، جملهٔ سوم در (۵.۳) صفر است، زیرا

$$\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\overline{y}_{i.})=y_{i.}-n\overline{y}_{i.}=y_{i.}-n(y_{i.}/n)=0$$

بنابراین داریم؛

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\overline{y}_{..})^2=n\sum_{i=1}^{a}(\overline{y}_{i.}-\overline{y}_{..})^2+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\overline{y}_{i.})^2 \qquad (۶.۳)$$

برابری (۶.۳) می‌گوید که کل تغییرپذیری در داده‌ها را، که به‌وسیلهٔ کل مجموع مربعات تصحیح‌شده اندازه‌گیری می‌شود، می‌توان به مجموع مربعات تفاضل بین متوسطهای تیماری از متوسط کل، و مجموع مربعات تفاضلهای مشاهدات درون تیمارها از متوسط تیمارها افراز کرد. حال تفاضل بین متوسطهای تیماری مشاهده‌شده و متوسط کل، اندازه‌ای از تفاضلهای بین میانگینهای تیماری است، در صورتی‌که تفاضلهای مشاهدات درون یک تیمار از متوسط تیمار را می‌توان تنها معلول خطای تصادفی دانست. پس می‌توانیم برابری (۶.۳) را به‌طور نمادی به‌صورت زیر بنویسیم؛

$$SS_{\text{کل}}=SS_{\text{تیمارها}}+SS_{\text{خطا}}$$

که در آن $SS_{\text{تیمارها}}$ را مجموع مربعات حاصل از تیمارها (یعنی، بین تیمارها)، و $SS_{\text{خطا}}$ را مجموع مربعات حاصل از خطا (یعنی، درون تیمارها) می‌نامند. کلاً $an=N$ مشاهده داریم، پس $SS_{\text{کل}}$، $N-1$ درجهٔ آزادی دارد. برای عامل، a سطح وجود دارد (و a میانگین تیماری)، بنابراین $SS_{\text{تیمارها}}$، دارای $a-1$ درجهٔ آزادی است. بالاخره، درون هر تیمار n تکرار وجود دارند، که دارای $n-1$

درجهٔ آزادی است که در برآورد خطای آزمایش به‌کار می‌رود. چون a تیمار وجود دارند برای خطا $a(n-۱) = an - a = N - a$ درجهٔ آزادی داریم.

بررسی صریح دو جملهٔ طرف راست اتحاد اصلی تحلیل واریانس [برابری (۶.۳)] مفید است. مجموع مربعات خطا را در نظر می‌گیریم:

$$SS_{\text{خطا}} = \sum_{i=۱}^{a}\sum_{j=۱}^{n}(y_{ij} - \overline{y}_{i.})^۲ = \sum_{i=۱}^{a}\left[\sum_{j=۱}^{n}(y_{ij} - \overline{y}_{i.})^۲\right]$$

در این شکل به‌سادگی ملاحظه می‌کنیم که اگر جملهٔ داخل کروشه را بر $n - ۱$ تقسیم نماییم واریانس نمونه‌ای برای iامین تیمار به‌دست می‌آید، یعنی

$$S_i^۲ = \frac{\sum_{j=۱}^{n}(y_{ij} - \overline{y}_{i.})^۲}{n-۱}, i = ۱, ۲, \cdots, a$$

حال واریانسهای نمونه‌ای را می‌توان برای به‌دست‌آوردن یک برآورد مشترک از واریانس جامعه به‌صورت زیر با هم ترکیب کرد:

$$\frac{(n-۱)S_۱^۲ + (n-۱)S_۲^۲ + \cdots + (n-۱)S_a^۲}{(n-۱) + (n-۱) + \cdots + (n-۱)} = \frac{\sum_{i=۱}^{a}\left[\sum_{j=۱}^{n}(y_{ij} - \overline{y}_{i.})^۲\right]}{\sum_{i=۱}^{a}(n-۱)}$$

$$= \frac{SS_{\text{خطا}}}{N-a}$$

پس، $SS_{\text{خطا}}/(N-a)$ برآوردی از واریانس مشترک درون هریک از a تیمار است.

همچنین اگر اختلافی بین میانگینهای تیمارها وجود نداشته باشد، در این‌صورت می‌توانیم برای برآورد $\sigma^۲$ از تفاضل بین متوسطهای تیماری و متوسط کل استفاده کنیم. به‌خصوص اگر میانگینهای تیماری مساوی باشند، آن‌گاه

$$\frac{SS_{\text{تیمارها}}}{a-۱} = \frac{n\sum_{i=۱}^{a}(\overline{y}_{i.} - \overline{y}_{..})^۲}{a-۱}$$

برآوردی برای $\sigma^۲$ است. دلیل این موضوع را می‌توان به‌طور شهودی به‌صورت زیر ملاحظه کرد: کمیت $\sum_{i=۱}^{a}(\overline{y}_{i.} - \overline{y}_{..})^۲/(a-۱)$، برآوردی برای $\sigma^۲/n$ یعنی واریانس متوسطهای تیماری است.

بنابراین اگر تفاوتی در میانگینهای تیماری وجود نداشته باشد، $n\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2/(a-1)$ باید برآورد σ^2 باشد.

می‌بینیم که اتحاد تحلیل واریانس [برابری (۶.۳)]، دو برآورد برای σ^2 پیش‌بینی می‌کند. یکی بر مبنای تغییرپذیری ذاتی درون تیمارها و دیگری بر مبنای تغییرپذیری بین تیمارها. اگر تفاوتی در میانگینهای تیمارها وجود نداشته باشد، این دو برآورد باید بسیار شبیه هم باشند و در غیراین‌صورت باید مظنون بود به اینکه تفاوت مشاهده‌شده به‌علت وجود تفاوت در میانگینهای تیمارهاست. هرچند از استدلال شهودی برای ارائهٔ این نتیجه استفاده کرده‌ایم، اما می‌توان صورت رسمیتر آن را نیز عرضه کرد.

کمیتهای؛

$$MS_{\text{تیمارها}} = \frac{SS_{\text{تیمارها}}}{a-1}$$

و

$$MS_{\text{خطا}} = \frac{SS_{\text{خطا}}}{N-a}$$

را میانگین مربعات می‌گویند. حال مقادیر امید ریاضی این میانگین مربعات را بررسی می‌کنیم. در نظر می‌گیریم که

$$\begin{aligned}
E(MS_{\text{خطا}}) &= E\left(\frac{SS_{\text{خطا}}}{N-a}\right) = \frac{1}{N-a}E\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2\right] \\
&= \frac{1}{N-a}E\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}^2-2y_{ij}\bar{y}_{i.}+\bar{y}_{i.}^2)\right] \\
&= \frac{1}{N-a}E\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}y_{ij}^2-2n\sum_{i=1}^{a}\bar{y}_{i.}^2+n\sum_{i=1}^{a}\bar{y}_{i.}^2\right] \\
&= \frac{1}{N-a}E\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}y_{ij}^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}y_{i.}^2\right]
\end{aligned}$$

با قرار دادن مدل، [برابری (۱.۳)] در این برابری، به‌دست می‌آوریم

$$E(MS_{\text{خطا}}) = \frac{1}{N-a}E\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(\mu+\tau_i+\epsilon_{ij})^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\left(\sum_{j=1}^{n}(\mu+\tau_i+\epsilon_{ij})\right)^2\right]$$

حال بعد از مربع‌کردن و گرفتن امید ریاضی از کمیت داخل پرانتزها، می‌بینیم که به‌جای جملات

شامل ϵ_{ij}^2 و $\epsilon_{i.}^2$ به‌ترتیب σ^2 و $n\sigma^2$ قرار می‌گیرند، زیرا که $E(\epsilon_{ij}) = 0$. به‌علاوه امید ریاضی تمام حاصلضرب‌های متقاطع دیگر شامل ϵ_{ij}، صفر است. بنابراین بعد از مربع کردن و گرفتن امید ریاضی، آخرین برابری می‌شود:

$$E(MS_{\text{خطا}}) = \frac{1}{N-a}\left[N\mu^2 + n\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2 + N\sigma^2 - N\mu^2 - n\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2 - a\sigma^2\right]$$

یا

$$E(MS_{\text{خطا}}) = \sigma^2$$

همچنین به روش مشابه می‌توان نشان داد که،

$$E(MS_{\text{تیمارها}}) = \sigma^2 + \frac{n\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2}{a-1}$$

پس، همچنان‌که به‌صورتی رهگشا استدلال کردیم $MS_{\text{خطا}} = SS_{\text{خطا}}/(N-a)$ برآورد σ^2 است، و اگر تفاوتی بین میانگینهای تیمارها موجود نباشد (که دلالت بر $\tau_i = 0$ می‌کند)، $MS_{\text{تیمارها}} = SS_{\text{تیمارها}}/(a-1)$ نیز برآورد σ^2 است. اما، توجه کنید که اگر میانگینهای تیمارها تفاوت داشته باشند، مقدار امید ریاضی میانگین مربعات خطاها بزرگتر از σ^2 است.

به‌نظر روشن می‌رسد که آزمون فرض عدم وجود اختلاف بین میانگینهای تیماری را می‌شود با مقایسهٔ $MS_{\text{تیمارها}}$ و $MS_{\text{خطا}}$ انجام داد. حال چگونگی انجام این مقایسه را بررسی می‌کنیم.

۲.۳.۳ تحلیل آماری

حال چگونگی انجام آزمون فرض عدم وجود اختلاف در میانگینهای تیماری ($H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_a$)، یا هم‌ارز آن، $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a = 0$) را بررسی می‌کنیم. چون پذیرفته‌ایم که خطاها، ϵ_{ij}ها، متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 هستند، پس مشاهدات y_{ij} متغیرهای تصادفی مستقل‌اند که توزیع نرمال، با میانگین $\mu + \tau_i$ و واریانس σ^2 دارند. لذا، $SS_{\text{کل}}$ مجموع مربعات متغیرهای تصادفی نرمال است و در نتیجه، می‌توان نشان داد که $SS_{\text{کل}}/\sigma^2$ توزیع خی دو با $N-1$ درجهٔ آزادی دارد. به‌علاوه، می‌توان نشان داد در صورتی‌که فرض $H_0 : \tau_i = 0$ درست باشد $SS_{\text{خطا}}/\sigma^2$ توزیع خی دو با $N-a$ درجهٔ آزادی و $SS_{\text{تیمارها}}/\sigma^2$ توزیع خی دو با $a-1$ درجهٔ آزادی دارند. اما، این سه مجموع مربعات از هم مستقل نیستند، زیرا از جمع $SS_{\text{تیمارها}}$ و $SS_{\text{خطا}}$،

از قضیه‌ای منسوب به ویلیام ککران[1] است در استدلال استقلال $SS_{\text{خطا}}$ و $SS_{\text{تیمارها}}$ مفید است. قضیهٔ زیر که شکل خاصی $SS_{\text{کل}}$ به‌دست می‌آید.

قضیهٔ ۱.۳. قضیهٔ ککران. گیریم Z_i برای $i = ۱, ۲, \ldots, \nu$، $\text{NID}(۰, ۱)$ و

$$\sum_{i=۱}^{\nu} Z_i^۲ = Q_۱ + Q_۲ + \cdots + Q_s$$

باشد، که در آن $s \leq \nu$ و برای $i = ۱, ۲, \ldots, s$، Q_i، دارای ν_i درجهٔ آزادی است. در این‌صورت، $Q_۱, Q_۲, \ldots, Q_s$ متغیرهای تصادفی مستقل خی دو به‌ترتیب با $\nu_۱, \nu_۲, \ldots, \nu_s$ درجهٔ آزادی‌اند، اگر و تنها اگر

$$\nu = \nu_۱ + \nu_۲ + \cdots + \nu_s$$

چون مجموع درجات آزادی $SS_{\text{تیمارها}}$ و $SS_{\text{خطا}}$، $N - ۱$ یعنی برابر کل درجات آزادی است، لذا قضیهٔ ککران دلالت بر آن دارد که $SS_{\text{تیمارها}}/\sigma^۲$ و $SS_{\text{خطا}}/\sigma^۲$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع خی دواند. پس اگر فرض صفر، یعنی فرض عدم وجود اختلاف در میانگین تیمارها درست باشد، آن‌گاه نسبت

$$F_۰ = \frac{SS_{\text{تیمارها}}/(a - ۱)}{SS_{\text{خطا}}/(N - a)} = \frac{MS_{\text{تیمارها}}}{MS_{\text{خطا}}} \qquad (۷.۳)$$

توزیع F با $a - ۱$ و $N - a$ درجهٔ آزادی دارد. برابری (۷.۳)، آمارهٔ آزمون برای فرض عدم وجود اختلاف در میانگین تیمارهاست.

با توجه به امید ریاضی میانگین مربعها ملاحظه می‌کنیم که، به‌طور کلی $MS_{\text{خطا}}$ برآوردکنندهٔ نااریب برای $\sigma^۲$ است. تحت فرض صفر، $MS_{\text{تیمارها}}$ ، نیز برآوردکنندهٔ نااریب برای $\sigma^۲$ است. اما، اگر فرض صفر نادرست باشد، آن‌گاه مقدار امید ریاضی $MS_{\text{تیمارها}}$ بزرگتر از $\sigma^۲$ می‌شود. بنابراین، تحت فرض مقابل مقدار امید ریاضی صورت کسر آمارهٔ آزمون [برابری (۷.۳)] بزرگتر از مقدار امید ریاضی مخرج است، و باید $H_۰$ را برای مقادیر خیلی بزرگ آمارهٔ آزمون رد کرد. این دلالت بر یک ناحیهٔ بحرانی یکطرفهٔ بالا دنباله‌ای می‌کند. $H_۰$ را رد می‌کنیم اگر،

$$F_۰ > F_{\alpha, a-۱, N-a}$$

که در آن، $F_۰$ از برابری (۷.۳) محاسبه می‌شود.

[1] William Cochran

جدول ۳.۳ جدول تحلیل واریانس برای مدل تک‌عاملی، با اثرهای تثبیت‌شده

منبع تغییر	مجموع مربعات	درجات آزادی	میانگین مربعات	$F_\circ$
بین تیمارها	$SS_{\text{تیمارها}}$	$a-1$	$MS_{\text{تیمارها}}$	$F_\circ = \frac{MS_{\text{تیمارها}}}{MS_{\text{خطا}}}$
خطا (درون تیمارها)	$SS_{\text{خطا}}$	$N-a$	$MS_{\text{خطا}}$	
کل	$SS_{\text{کل}}$	$N-1$		

فرمولهای محاسباتی برای مجموع مربعات را می‌توان با بازنویسی و ساده‌کردن تعاریف $SS_{\text{تیمارها}}$ و $SS_{\text{کل}}$ از برابری (۶.۳) به‌دست آورد. نتیجه می‌شود؛

$$SS_{\text{کل}} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N} \qquad (۸.۳)$$

و

$$SS_{\text{تیمارها}} = \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i.}^2}{n} - \frac{y_{..}^2}{N} \qquad (۹.۳)$$

مجموع مربعات خطا با تفریق به‌دست می‌آید

$$SS_{\text{خطا}} = SS_{\text{کل}} - SS_{\text{تیمارها}} \qquad (۱۰.۳)$$

شیوهٔ آزمون را در جدول ۳.۳ خلاصه کرده‌ایم. این را جدول تحلیل واریانس می‌گوییم.

مثال ۱.۳

آزمایش مقاومت کششی

در شرح تحلیل واریانس به مثالی که در ابتدای بخش ۱.۳ بحث شد بر می‌گردیم. یادآور می‌شویم که مهندس توسعه، علاقه‌مند به تعیین تغییرپذیری میزان پنبه در الیاف مصنوعی است که بر مقاومت کششی اثر می‌گذارد. او یک آزمایش کاملاً تصادفی‌شده را در پنج سطح درصد پنبه و پنج تکرار انجام داده است. در اینجا برای راحتی، داده‌های جدول ۱.۳ را تکرار کرده‌ایم.

درصد پنبه	مقاومت کششی مشاهده‌شده (پوند بر اینچ مربع) ۱	۲	۳	۴	۵	کلها $y_{i.}$	متوسطها $\bar{y}_{i.}$
۱۵	۷	۷	۱۵	۱۱	۹	۴۹	۹٫۸
۲۰	۱۲	۱۷	۱۲	۱۸	۱۸	۷۷	۱۵٫۴
۲۵	۱۴	۱۸	۱۸	۱۹	۱۹	۸۸	۱۷٫۶
۳۰	۱۹	۲۵	۲۲	۱۹	۲۳	۱۰۸	۲۱٫۶
۳۵	۷	۱۰	۱۱	۱۵	۱۱	۵۴	۱۰٫۸
						$y_{..} = ۳۷۶$	$\bar{y}_{..} = ۱۵٫۰۴$

مجموع مربعاتی که برای تحلیل واریانس لازم‌اند به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$SS_{\text{کل}} = \sum_{i=۱}^{۵}\sum_{j=۱}^{۵} y_{ij}^{۲} - \frac{y_{..}^{۲}}{N}$$

$$= (۷)^{۲} + (۷)^{۲} + (۱۵)^{۲} + \cdots + (۱۵)^{۲} + (۱۱)^{۲} - \frac{(۳۷۶)^{۲}}{۲۵} = ۶۳۶٫۹۶$$

$$SS_{\text{تیمار}} = \sum_{i=۱}^{۵} \frac{y_{i.}^{۲}}{n} - \frac{y_{..}^{۲}}{N}$$

$$= \frac{(۴۹)^{۲} + \cdots + (۵۴)^{۲}}{۵} - \frac{(۳۷۶)^{۲}}{۲۵} = ۴۷۵٫۷۶$$

$$SS_{\text{خطا}} = SS_{\text{کل}} - SS_{\text{تیمار}}$$

$$= ۶۳۶٫۹۶ - ۴۷۵٫۷۶ = ۱۶۱٫۲۰$$

معمولاً این محاسبات، به‌وسیلهٔ کامپیوتر، با استفاده از بستهٔ نرم‌افزاری با قابلیت تحلیل داده‌های آزمایشهای طرح‌شده انجام می‌شوند.

تحلیل واریانس را در جدول ۴.۳ به‌اختصار آورده‌ایم. توجه کنید که میانگین مربعات بین تیمارها (۱۱۸٫۹۴) چندین برابر بزرگتر از میانگین مربعات درون تیمار یا خطا (۸٫۰۶) است. این نشان می‌دهد که بعید است که میانگینهای تیماری مساوی باشند. به‌صورتی رسمیتر می‌توانیم نسبت

جدول ۴.۳ تحلیل واریانس برای داده‌های مقاومت کششی

منبع تغییر	مجموع مربعات	درجات آزادی	میانگین مربعات	$F_{۰}$
درصد پنبه	۴۷۵٫۷۶	۴	۱۱۸٫۹۴	$F_{۰} = ۱۴٫۷۶$
خطا	۱۶۱٫۲۰	۲۰	۸٫۰۶	
کل	۶۳۶٫۹۶	۲۴		

F را محاسبه کنیم، $F_\circ = (۱۱۸٫۹۴)/(۸٫۰۶) = ۱۴٫۷۶$ و آن‌را با $F_{\alpha,۴,۲۰}$ مقایسه نماییم. چون $F_{\circ٫\circ۱,۴,۲۰} = ۴٫۴۳$، فرض $H_\circ$ را رد کرده و نتیجه می‌گیریم که میانگین تیمارها متفاوت‌اند؛ یعنی، درصد میزان پنبه موجود در الیاف به‌صورتی معنی‌دار در میانگین مقاومت کششی آنها مؤثر است. ■

تبصره‌ای محاسباتی. خوانندهٔ هوشیار احتمالاً توجه کرده است که مجموع مربعات را برحسب متوسطها تعریف کردیم؛ یعنی بنابر برابری (۶.۳)

$$SS_{\text{تیمار}} = n\sum_{i=۱}^{a}(\overline{y}_{i.} - \overline{y}_{..})^۲$$

در صورتی‌که فرمولهای محاسباتی را با استفاده از مجموعها بسط دادیم؛ مثلاً برای محاسبهٔ $SS_{\text{تیمار}}$، از برابری (۹.۳) استفاده می‌کنیم

$$SS_{\text{تیمار}} = \sum_{i=۱}^{a}\frac{y_{i.}^۲}{n} - \frac{y_{..}^۲}{n}$$

دلیل این کار، دقت عددی است؛ مجموعهای $y_{i.}$ و $y_{..}$ در معرض خطای گردکردن نیستند در صورتی‌که متوسطهای $\overline{y}_{i.}$ و $\overline{y}_{..}$ در معرض این خطا هستند.

معمولاً احتیاجی نیست که دلواپس انجام محاسبات شویم، زیرا که برنامه‌های کامپیوتری بسیار متنوعی برای انجام محاسبات در اختیارند. این برنامه‌های کامپیوتری در انجام بسیاری از تحلیلهای دیگر مربوط به طرح آزمایش (مثل تحلیل مانده‌ای که در فصل ۴ از آن بحث خواهیم کرد) نیز مفیدند. در بسیاری موارد این برنامه‌ها در اقامهٔ طرح به آزمایشگر نیز کمک می‌کنند.

وقتی محاسبات دستی لازم می‌شوند، گاهی کدبندی مشاهدات مفید است. شرح این موضوع در مثال بعد خواهد آمد.

مثال ۲.۳

کدبندی مشاهدات

محاسبات تحلیل واریانس را اغلب می‌توان با کدبندی مشاهدات دقیقتر یا ساده‌تر انجام داد. مثلاً، داده‌های مقاومت کششی در مثال ۱.۳ را در نظر بگیرید. فرض کنید هر یک از مشاهدات را از عدد ۱۵ کم کنیم. داده‌های کدبندی‌شده را در جدول ۵.۳ نشان داده‌ایم. به‌سادگی می‌توان تحقیق