(1)

Subject: ۱۲ + ۶ + ۲ + ۲ 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　 Date ۹۵/۲/۹

میان‌ترم

جلسه اول

پروژه‌ها: تحلیل عاملی، توزیع‌های چندمتغیره، تحلیل مولفه‌های اصلی، تحلیل ممیزی، توزیع نرمال چندمتغیره، MANOVA

کتاب‌های مورد نیاز:

1. Applied multivariate statistical Analysis, Johnson, wichren

ترجمه دکتر حسینعلی نیرومند، تحلیل چندمتغیری کاربردی

2. Multivariate Analysis, mardia, kent, Bibby

تحلیل چندمتغیره

ترجمه دکتر حلاجی

3. Applied multivariate Analysis, Neill H. Timm, springer, 2002

مروری بر جبر ماتریسها

در این درس چون با چندمتغیر تصادفی سروکار داریم مجموعه‌ای از بردارها و ماتریسها استفاده می‌شود می‌دانیم یک بردار به صورت

$$\underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

نمایش داده می‌شود. طول یک بردار رسم شده از مبدأ به صورت

$$L_{\underset{\sim}{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

محاسبه می‌شود و زاویه بین دو بردار x و y رسم شده از مبدأ که هرکدام n عنصر دارند به صورت

$$\underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \cos\theta = \frac{\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{y}}{L_x L_y} = \frac{x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}}$$

محاسبه می‌شود

نکته: مجموعه بردارهای $\underset{\sim}{x}_1, \ldots, \underset{\sim}{x}_k$ را وابسته خطی گوییم هرگاه k عدد $a_1 \ldots a_k$ که همگی صفر نباشند وجود داشته باشند که

$$a_1 \underset{\sim}{x}_1 + a_2 \underset{\sim}{x}_2 + \cdots + a_k \underset{\sim}{x}_k = \underset{\sim}{0}$$

در غیر این صورت این مجموعه بردارها را مستقل خطی گویند.

یک ماتریس نیز معمولاً با بعد و عناصرش مشخص می‌شود و یک ماتریس $p\times n$ به صورت

Subject :

Date

$$A_{p\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \text{—} & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{p1} & \text{---} & a_{pn}\end{bmatrix}_{p\times n}$$

a_{ij} عنصر سطر iام و ستون jام $\quad i=1 \text{—} p,\; j=1 \text{—} n$

تعداد سطر ← ... → تعداد ستون

ترانهاده ماتریس $A_{p\times n}$ به صورت $A'_{p\times n}$ نشان می‌دهند

$$A'_{n\times p} = \begin{bmatrix} a_{11} & \text{—} & a_{p1} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & \text{—} & a_{pn}\end{bmatrix}_{n\times p}$$

ترانهاده دارای خواص زیر است

$$(A')' = A \qquad \underbrace{(A+B)'}_{\text{هم بعد}} = A' + B' \qquad \underbrace{(AB)'}_{\text{تعداد ستون A با سطر B برابر}} = B'A'$$

ماتریس متعامد: اگر برای هر ماتریس مربع $A_{n\times n}$ خواص زیر برقرار باشد

$$A' = A^{-1} \rightarrow AA' = A'A = I$$

آن گاه A یک ماتریس متعامد است

ماتریس متقارن: اگر ماتریس مربع A دارای این خاصیت باشد که $A = A'$ آن گاه A ماتریس متقارن است

ماتریس نادژه: اگر $|A| \neq 0$ باشد به ماتریس A نادژه گویند و وارون A در این صورت وجود دارد

دترمینان: معمولاً با det و $|\;|$ نمایش داده می‌شود و دارای خواص زیر است

$$|A| = |A'| \qquad |AB| = |A||B| \qquad |kA| = k^n|A| \qquad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}|A_{ij}|$$

دترمینان ماتریسی که ستون j و سطر i حذف شده

اثر: مجموع عناصر روی قطر اصلی یک ماتریس مربعی را اثر ماتریس می‌نامند و به صورت

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

نشان می‌دهند و دارای خواص زیر است:

1. $tr(CA) = c\,tr(A)$
2. $tr(A \pm B) = tr(A) \pm tr(B)$
3. $tr(AB) = tr(BA)$
4. $tr(B^{-1}AB) = tr(A)$
5. $tr(AA') = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \leftarrow A_{n\times n}$

Date ....

Subject :

وارون : معکوس یا وارون A درصورتی وجود دارد که A مربع و $|A| \neq 0$ باشد و با A^{-1} نشان می دهند

وارون منحصر به فرد است .

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

دروارون ماتریس نامربع A و ماتریسهای ویژه همواره ماتریسی مثل G پیدا می شود به طوری که $AGA = A$

که به G وارون تعمیم یافته A می گویند . وارون تعمیم یافته منحصر به فرد نیست .

ماتریس خودتوان : ماتریس متقارن A را خودتوان گوییم هرگاه $AA = A$

فرمهای درجه دوم : برای بردار $\underset{\sim}{x}$ و ماتریس متقارن A ؛ $Q(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{x}'A\underset{\sim}{x}$ فرم درجه دوم

گویند اگر $Q(\underset{\sim}{x}) > 0$ $\forall \underset{\sim}{x} \neq \underset{\sim}{0}$ باشد به ماتریس A همشه مثبت یا معین

مثبت می گوییم و اگر $Q(\underset{\sim}{x}) \geq 0$ $\forall \underset{\sim}{x} \neq 0$ باشد به A معین نامنفی یا نیمه معین مثبت

می گوییم .

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه :

اگر A ماتریس مربعی $n \times n$ باشد آنگاه اگر λ مقدار ویژه و $\underset{\sim}{x}$ بردار ویژه $\underset{\sim}{x}$ $\overset{\exists x \neq 0}{\Longrightarrow}$ $A\underset{\sim}{x} = \lambda \underset{\sim}{x}$ و تعداد

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یک ماتریس برابر با تعداد سطرها (ستونها) ماتریس است برای داشتن جواب غیر

صفر در معادله $A\underset{\sim}{x} = \lambda \underset{\sim}{x}$ باید $|A - \lambda I| = 0$ باشد چون :

$$A\underset{\sim}{x} = \lambda \underset{\sim}{x} \Rightarrow A\underset{\sim}{x} - \lambda \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \Rightarrow (A - \lambda I)\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$$

$\neq 0$

می باید $(A - \lambda I)$ ماتریس ویژه باشد یعنی $|A - \lambda I| = 0$ باشد . درصورتی که ماتریس A ناویژه باشد

هیچ یک از λ ها صفر نخواهد شد و اگر A متقارن باشد جوابهای معادله مشخصه (مفسر) معادله فوق همگی حقیقی هستند .

نکته : می توان نشان داد که اگر $A_{n \times n}$ آنگاه :

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$ (λ_i ها مقادیر ویژه ماتریس A هستند)

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

$$A = \sum \lambda_i e_i e_i' = \underbrace{P}_{A}\underbrace{\Lambda P'}_{B} \qquad PP' = P'P = I \;,\; \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \; \lambda_i >$$

$$tr(A) = tr(\Lambda PP') = tr(\Lambda) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$$

$$|A| = |P\Lambda P'| = |P||\Lambda||P'| = |\Lambda|\underbrace{|I|}_{1} = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i$$

$$|P'P| = |P'||P| = |I| = 1$$

نکته: ماتریس متقارن A معین مثبت است اگر و فقط اگر مقادیر ویژه آن مثبت باشد.

مثال: نشان دهید معین مثبت است: $3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 \; : \; [x_1 \;\; x_2]\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = 0 \quad \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 4 \end{cases}$$

نکته: ماتریس متقارن A یک ماتریس معین نامنفی است اگر و فقط اگر تمامی مقادیر ویژه آن نامنفی باشند

تجزیه طیفی یک ماتریس متقارن:

اگر $A_{n\times n}$ یک ماتریس متقارن باشد آن گاه

$$① \quad A = \lambda_1 e_1 e_1' + \lambda_2 e_2 e_2' + \dots + \lambda_n e_n e_n' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i e_i'$$

که در آن λ_i ها مقادیر ویژه A و e_i ها بردارهای ویژه متناظر با λ_i ها هستند که به صورت نرمال شده و متعامد درآمده اند یعنی

$$e_i' e_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

با در نظر گرفتن

$$\Lambda = diag(\lambda_1 - \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \;\text{و}\; \Gamma = (e_1 \dots e_n) \qquad \Gamma\Gamma' = \Gamma'\Gamma = I$$

آن گاه رابطه ① به صورت

$$A = \Gamma \Lambda \Gamma'$$

نوشته می‌شود.

Subject : Date

نکته: اگر $A_{n\times n}$ ماتریس متقارن باشد آن گاه

$$A^{-1} = \Gamma \Lambda^{-1} \Gamma' = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} e_i e_i'$$

$$A^{\frac{1}{2}} = \Gamma \Lambda^{1/2} \Gamma' = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i}\, e_i e_i'$$

بطوری که

$$(A^{1/2})' = A^{1/2} \qquad A^{1/2} A^{1/2} = A \qquad A^{-1/2} = \sum \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} e_i e_i' = \Gamma \Lambda^{-1/2} \Gamma'$$

مثال: مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس A را بیابید

$$A = \begin{bmatrix} 13 & -4 & 2 \\ -4 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 10 \end{bmatrix} \qquad |A - \lambda I| = 0$$

$$\Rightarrow |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 13-\lambda & -4 & 2 \\ -4 & 13-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 10-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 9-\lambda & 0 \\ 0 & 9-\lambda & 18-2\lambda \\ 2 & -2 & 10-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 9-\lambda & 18-2\lambda & 0 \\ 0 & 9-\lambda & 18-2\lambda \\ 2 & 0 & 10-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda) \begin{vmatrix} 9-\lambda & 18-2\lambda \\ 0 & 10-\lambda \end{vmatrix}$$

$$- 2(9-\lambda) \begin{vmatrix} 0 & 2(9-\lambda) \\ 2 & 10-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (9-\lambda)^2 (10-\lambda) + 8(9-\lambda)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (9-\lambda)^2 (10 - \lambda + 8) = 0$$

$$\lambda_1 = 9 \quad , \lambda_3 = 18$$
$$\lambda_2 = 9$$

$$\lambda_1 = 9 \quad (A - \lambda_1 I)\underset{\sim}{x} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 13 & -4 & 2 \\ -4 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 4y + 2z = 0 \\ -4x + 4y - 2z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$z = 2y - 2x$$

$$\underset{\sim}{e}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 9 \qquad \underset{\sim}{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \underset{\sim}{e}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{18} \\ 1/\sqrt{18} \\ 4/\sqrt{18} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 18 \qquad x = -y, \quad z = x/2 \rightarrow e_3 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

تجزیه طیفی

$$A = \overset{\lambda_1}{9} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} -1/\sqrt{18} \\ 1/\sqrt{18} \\ 4/\sqrt{18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{4}{\sqrt{18}} \end{bmatrix}$$

$$+ 18 \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$e_1' e_2 \qquad \underset{1\times 3}{\begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}}$$

$$4/9 - 4/9$$

رتبه ماتریس: رتبه یک ماتریس عبارت است از تعداد ستون‌های مستقل A و یا تعداد سطرهای مستقل A.

$\text{rank}(A) =$ تعداد سطرهای مستقل A $=$ تعداد ستون‌های مستقل A

*: ستون‌های A مستقل خطی هستند اگر $A\underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{0}$ آن گاه نتیجه شود $\underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{0}$

نکته: به طور کلی رتبه ماکسیمم یک ماتریس $n \times p$ برابر $\min(n, p)$ است

$$\text{rank}(A) \leq \min(n, p)$$

خواص:

$$r(A) = r(A') = r(AA') \qquad \text{if } |A| \neq 0 \Rightarrow r(AB) = r(B)$$

$$r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$$

Subject : Date

اگر $A_{n\times p}$ و $rank(A)=n$ $n\le p$ می‌گوییم A رتبه کامل است و اگر $rank(A)=p$ $p\le n$

می‌گوییم A ستونی رتبه کامل است و ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ که رتبه کامل باشد $rank(A)=n$

آن گاه A نامنفرد است و معکوس آن وجود دارد.

مثال: رتبه ماتریس A را بیابید

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 5 & 2 & 4\end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$c_1\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}=\underline{0} \Rightarrow$$ c_1 و c_2 مخالف صفر وجود ندارد

$$c_1\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\underline{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 5 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C=(14 \quad -11 \quad -12)\neq 0$$

$rank(A)=2$

ماتریس تمرکز: ماتریس تمرکز به صورت $H_n=I_n-\frac{1}{n}J_n$ تعریف می‌شود که یک ماتریس

$$I_n=\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}_{n\times n}$$ $\rightarrow$ Identity matrix همو دیگران است و دیگران

$$J_n=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & & & \vdots\\ 1 & \cdots & & 1\end{pmatrix}_{n\times n}$$ $\rightarrow$ unit matrix

ماتریس‌ها در R:

```
A <- matrix(c(3,6,2,1), 2, 2, byrow=T)
```

$$A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

اگر ← byrow = F

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 6 & 1\end{pmatrix}$$

Subject :

Date

ترانهاده :

```
At <- t(A)
```

ضرب دو ماتریس :

```
C <- A %*% B
```

معکوس ماتریس :

```
Ainv <- solve(A)
```

دترمینان ماتریس :

```
detA <- det(A)
```

مقادیر ویژه و بردار ویژه :

```
EA <- eigen(A)
EA
```

در SAS :

```
Proc IML;
X = {a, b, c, d};

X inv = inv(X);
e = eigval(X);
V = eigvec(X);
print e v x;
```

بردار تصادفی : برداری است که مؤلفه‌هایش متغیرهای تصادفی هستند. یعنی

$$\underset{\sim}{X}' = [X_1 \; \ldots \; X_p]$$

بطوریکه هر مؤلفه X، یک متغیر تصادفی و در نتیجه دارای یک توزیع احتمال حاشیه‌ای است.
برای مثال فرض کنید هدف بررسی چند ویژگی دانشجویان کلاس باشد

$$\begin{array}{ll|cccc|}
 & & 1 & 2 & 3 \ldots\ldots & 15 \rightarrow \text{دانشجو} \\
\text{معدل دیپلم} & X_1 & x_{11} & x_{12} & \ldots\ldots & x_{1\,15} \\
\text{معدل ترم اول} & X_2 & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\text{معدل کل} & X_3 & \vdots & & & \vdots \\
\text{قد} & X_4 & \vdots & \vdots & & \\
\text{وزن} & X_5 & x_{51} & x_{52} & \ldots\ldots & x_{5\,15}
\end{array}$$

بردارهای میانگین و ماتریس‌های کواریانس

میانگین حاشیه‌ای μ_i و واریانس σ_i^2 هستند که به ترتیب به صورت

$$i=1,\ldots,p \quad : \quad \mu_i = E(X_i) \quad \text{و} \quad \sigma_i^2 = E(X_i-\mu_i)^2$$

تعریف می‌شوند به طوریکه

$$\mu_i = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x_i f_i(x_i)\,dx_i & \text{اگر } x_i \text{ یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی } f_i(x_i) \text{ باشد} \\ \sum_{x_i} x_i p_i(x_i) & \text{اگر } x_i \text{ متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال } p_i(x_i) \text{ باشد} \end{cases}$$

$$\sigma_i^2 = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i-\mu_i)^2 f_i(x_i)\,dx_i & \text{پیوسته } X_i \\ \sum_{x_i} (x_i-\mu_i)^2 p_i(x_i) & \text{گسسته } X_i \end{cases}$$

رفتار هر زوج (X_i, X_k) با تابع احتمال توأم و اندازه‌ای از ارتباط خطی بین آنها با کواریانس و

$$\sigma_{ik} = E(X_i-\mu_i)(X_k-\mu_k)$$

به صورت

تعریف می‌شود، به طوریکه

Subject:
Year. Month. Date. ( )

از تئوری احتمالات و آمار ریاضی

$$\sigma_{ik} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_i-\mu_i)(x_k-\mu_k)\, f_{ik}(x_i, x_k)\, dx_i\, dx_k \\ \sum_{x_i}\sum_{x_k} (x_i-\mu_i)(x_k-\mu_k)\, P_{ik}(x_i, x_k) \end{cases}$$

اگر $i = k$ ،

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ii} = \sigma_i^2$$

دقت شود که معلوم نیست $\underset{\sim}{X}' = [X_1 \dots X_p]$ دو به دو مستقل از هم باشند

~~شرط استقلال~~ p متغیر تصادفی (مثلاً پیوسته) $X_1 \dots X_p$ ، دو به دو مستقلند اگر

$$f_{1\dots p}(x_1, x_2, \dots x_p) = f_1(x_1) \dots f_p(x_p)$$

و در این صورت

if X_i , X_k مستقل باشند $\Longrightarrow \sigma_{ik} = 0$

(دقت کنید عکس نتیجه برقرار نیست)

اکنون میانگین و ماتریس واریانس - کواریانس بردار تصادفی $\underset{\sim}{X}_{p\times 1}$ را به صورت ماتریسی ~~...~~ به شرح زیر می باشد:

$$E(\underset{\sim}{X}) = \underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ E(X_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix}$$

میانگین جامعه

Scanned with CamScanner

Subject :

Year .　　Month .　　Date .　( )

ماتریس واریانس کوواریانس :　　　　ماتریس واریانس کوواریانس جامع

$$V(\underset{\sim}{X}) = \Sigma = E(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})' =$$

$$= E\left(\begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 \\ \vdots \\ X_p - \mu_p \end{bmatrix} [X_1 - \mu_1, \ldots, X_p - \mu_p] \right)$$

$$= E \begin{bmatrix} (X_1-\mu_1)^2 & (X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2) & \cdots & (X_1-\mu_1)(X_p-\mu_p) \\ \vdots & (X_2-\mu_2)^2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_p-\mu_p)(X_1-\mu_1) & \cdots & \cdots & (X_p-\mu_p)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & & \sigma_{pp} \end{bmatrix} = Cov(\underset{\sim}{X})$$

*نکته: اگر $b_{q\times 1}$ و $A_{p\times q}$ و $\underset{\sim}{X}_{p\times 1}$ یک بردار تصادفی باشد

۱) $E(A\underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{b}) = A\, E\underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{b}$

۲) $Cov(A\underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{b}) = E(A\underset{\sim}{X} + \cancel{\underset{\sim}{b}} - A\underset{\sim}{\mu} - \cancel{\underset{\sim}{b}})(A\underset{\sim}{X} + \cancel{\underset{\sim}{b}} - A\underset{\sim}{\mu} - \cancel{\underset{\sim}{b}})'$

$$= E(A(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu}))(A(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu}))'$$

$$= A\, E(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})'\, A'$$

$$= A \Sigma A'$$

ضریب همبستگی جامعه: ضریب همبستگی جامعه به صورت

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1p} \\ \rho_{12} & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1p} & \rho_{2p} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{pp}}} & \frac{\sigma_{2p}}{\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{\sigma_{pp}}} & \cdots & \frac{\sigma_{pp}}{\sqrt{\sigma_{pp}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix}$$

پس ضریب همبستگی زوج (X_i, X_k) برحسب کواریانس σ_{ik} و σ_{ii} و σ_{kk}

$$\rho_{ik} = \frac{\sigma_{ik}}{\sqrt{\sigma_{ii}}\sqrt{\sigma_{kk}}}$$

است که میزان ارتباط خطی بین X_i و X_k را نشان می‌دهد.

ماتریس انحراف استاندارد.

با تعریف ماتریس انحراف استاندارد به صورت

$$V^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\sigma_{pp}} \end{bmatrix}$$

به راحتی می‌توان نشان داد

$$V^{\frac{1}{2}} \rho V^{\frac{1}{2}} = \Sigma \qquad (*)$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sigma_{11}} & \\ & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}\sqrt{\sigma_{11}} & \\ & \sqrt{\sigma_{pp}} \end{bmatrix}$$

و $V^{-1/2}$ و $V^{-1/2}$ از چپ و راست ضرب کنید: $\rho = V^{-1/2}\,\Sigma\, V^{-1/2}$ (**)

پس ماتریس ρ را می‌توان از Σ و Σ را از $V^{1/2}$ و ρ می‌توان بدست آورد.

به عنوان تمرین دو رابطه (*) و (**) را ثابت کنید.

مثال: فرض کنید تابع احتمال توأم دو متغیر تصادفی X_1 و X_2 به صورت

$x_1 \backslash x_2$	0	1	$p_1(x_1)$
−1	0.24	0.06	0.3
0	0.16	0.14	0.3
1	0.40	0.00	0.4
$p_2(x_2)$	0.8	0.2	1

مطلوبست $\underset{\sim}{\mu}$ ، Σ

$$E(X_1) = -0.3 + 0.4 = 0.1$$
$$E(X_2) = 0.2$$
$$\Rightarrow \underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{11} = E(X_1-\mu_1)^2 = \sum_{x_1}(x_1-0.1)^2 p_1(x_1) = 0.3(-1-0.1)^2 + (0-0.1)^2\,0.3 + (1-0.1)^2 \times 0.4 = 0.69$$

$$\sigma_{22} = E(X_2-\mu_2)^2 = \sum_{x_2}(x_2-0.2)^2 p_2(x_2) = (0-0.2)^2 \times 0.8 + (1-0.2)^2 \times 0.2 = 0.16$$

$$\sigma_{12} = E(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2) = \sum_{x_1,x_2}(x_1-0.1)(x_2-0.2)p_{12}(x_1,x_2) = (-1-0.1)(0-0.2)\,0.24 + \cdots + (1-0.1)(1-0.2)(0.0) = -0.8$$

$$\begin{bmatrix} -1-0.1 \\ 0-0.1 \\ 1-0.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0-0.2 & 1-0.2 \end{bmatrix}_{1\times 2} = \cancel{(-1-0.1)(0-0.2)+}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.69 & -0.8 \\ -0.8 & 0.16 \end{bmatrix}$$

مثال ۲ : فرض کنید $\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 25 \end{bmatrix}$ مطلوبست $V^{1/2}$

و ρ :

$$V^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\sigma_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\sigma_{33}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$V^{-1/2} = \begin{bmatrix} 1/2 & & 0 \\ & \frac{1}{3} & \\ 0 & & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \qquad \rho = V^{-1/2}\,\Sigma\,V^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \rho = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & \frac{1}{3} & \\ & & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.69 & -0.8 \\ -0.8 & 0.16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & & \\ & \frac{1}{3} & \\ & & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & 1 & -1/5 \\ \frac{1}{5} & -1/5 & 1 \end{bmatrix}$$

افراز کردن بردار تصادفی

در عمل گاهی با متغیرهای تصادفی زیادی در مطالعه وجود دارد و ویژگیهای اندازه‌گیری شده داخل دو یا چند گروه واقع می‌شود.

به عنوان نمونه فرض کنید متغیرهای تصادفی مورد نظر در دو گروه واقع شده‌اند؛ طوریکه

$$\underset{\sim}{X} = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_q \\ \hline x_{q+1} \\ \vdots \\ x_p \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{array}}\right\} q \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c} x_{q+1} \\ \vdots \\ x_p \end{array}}\right\} p-q \end{array} = \left[\begin{array}{c} \underset{\sim}{X}^{(1)} \\ \hline \underset{\sim}{X}^{(2)} \end{array}\right]$$

و بنابراین :

$$E(\underset{\sim}{X}) = \underset{\sim}{\mu} = \left[\begin{array}{c} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_q \\ \hline \mu_{q+1} \\ \vdots \\ \mu_p \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \underset{\sim}{\mu}^{(1)} \\ \hline \underset{\sim}{\mu}^{(2)} \end{array}\right]$$

$$\Sigma = E(X-\mu)(X-\mu)' ,$$

$$= E\begin{pmatrix} X^{(1)}-\mu^{(1)} \\ X^{(2)}-\mu^{(2)} \end{pmatrix}(X^{(1)}-\mu^{(1)} \quad X^{(2)}-\mu^{(2)})$$

$$= E\begin{pmatrix} (X^{(1)}-\mu^{(1)})(X^{(1)}-\mu^{(1)})' \\ (X^{(2)}-\mu^{(2)})(X^{(1)}-\mu^{(1)})' \end{pmatrix}$$

که در آن :

$$\Sigma = \begin{array}{c} q \\ p-q \end{array}\overset{\begin{array}{cc} q & \quad p-q \end{array}}{\left[\begin{array}{c|c} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \hline \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{array}\right]}$$

$$\Sigma_{12} = E(\underset{\sim}{X}^{(1)} - \underset{\sim}{\mu}^{(1)})(\underset{\sim}{X}^{(2)} - \underset{\sim}{\mu}^{(2)})'$$

$$= E\left(\begin{bmatrix} x_1-\mu_1 \\ \vdots \\ x_q-\mu_q \end{bmatrix}[x_{q+1}-\mu_{q+1} \; \cdots\cdots \; x_p-\mu_p]\right.$$

$$= E\begin{bmatrix} (x_1-\mu_1)(x_{q+1}-\mu_{q+1}) & (x_1-\mu_1)(x_{q+2}-\mu_{q+2}) & \cdots & \\ \vdots & & & \\ (x_q-\mu_q)(x_{q+1}-\mu_{q+1}) & \cdots\cdots & & (x_q-\mu_q)(x_p-\mu_p) \end{bmatrix}$$

Year. Month. Date. ( )

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{1,q+1} & \sigma_{1,q+2} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \vdots & & & \\ \sigma_{q,q+1} & \sigma_{q,q+2} & \cdots & \sigma_{qp} \end{bmatrix} = \Sigma_{12}$$

$$\Sigma = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} q & p-q \end{array} \\ \begin{array}{c} q \\ p-q \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \hline \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{array}\right) \end{array} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1q} & \sigma_{1,q+1} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \sigma_{q1} & & \sigma_{qq} & \sigma_{q,q+1} & & \sigma_{qp} \\ \hline \sigma_{q+1,1} & \cdots & \sigma_{q+1,q} & \sigma_{q+1,q+1} & & \sigma_{q+1,p} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \sigma_{p1} & \cdots & \sigma_{pq} & \sigma_{p,q+1} & & \sigma_{pp} \end{array}\right]$$

$$\Sigma_{12} = \Sigma_{21}'$$

بردار میانگین و ماتریس واریانس کوواریانس نمونه :

فرض کنید $\underset{\sim}{X}_{p\times1}$ از توزیعی با میانگین $\underset{\sim}{\mu}$ و ماتریس واریانس کوواریانس Σ باشد

در عمل نمونه ای به حجم n از یک جامعه p متغیره در اختیار است یعنی یک ماتریس

$\underset{\sim}{x}_1 \cdots \underset{\sim}{x}_n$

داده به صورت

$$X_{p\times n} = \begin{array}{c} \\ X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & \cdots & x_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & \\ x_{p1} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \to \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \to \bar{x}_p \end{array}$$

برای هر کدام نمونه

$$\to \underset{p\times1}{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\bar{X}}_{p\times1} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{bmatrix}$$

بردار میانگین نمونه

$$\cancel{S_{ij} = \frac{1}{n}\sum (x_{ij} - \bar{x}_i)(x_{ij} - \bar{x}_j)}$$

$$= \frac{1}{n}\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \\ x_{p1} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{n} X \mathbf{1}_n$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (\underset{\sim}{X}_j - \bar{\underset{\sim}{X}})(\underset{\sim}{X}_j - \bar{\underset{\sim}{X}})'$$

$$S_n = \begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \ddots & \\ s_{p1} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix}$$

$$H_n = I_n - \frac{1}{n} J_n = \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & & \\ -\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ x_{p1} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} 1-\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & & \\ -\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} \end{bmatrix}}_{H} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{p1} \\ \vdots & & \\ x_{1n} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix}}_{X'}$$

$$S_{ik} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_k)$$

$$\begin{bmatrix} x_{11}-\bar{x}_1 & \cdots & x_{1n}-\bar{x}_1 \\ x_{p1}-\bar{x}_p & \cdots & x_{pn}-\bar{x}_p \end{bmatrix}$$

در صورت افراز

$$\underset{\sim}{X}_{p\times1} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}^{(1)} \\ \hline \underset{\sim}{X}^{(2)} \end{bmatrix} \longrightarrow \bar{\underset{\sim}{X}}_{p\times1} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_q \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\underset{\sim}{x}}^{(1)} \\ \bar{\underset{\sim}{x}}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$HX' = \begin{bmatrix} x_{11}-\bar{x}_1 & \cdots & x_{p1}-\bar{x}_p \\ \vdots & & \\ x_{1n}-\bar{x}_p & \cdots & x_{pn}-\bar{x}_p \end{bmatrix}$$

$$S_n = \begin{array}{c} \\ q \\ p-q \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} q & p-q \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} S_{11} & S_{12} \\ \hline S_{21} & S_{22} \end{array}\right] \end{array}$$

جلسه سوم

نمونه تصادفی

بردار تصادفی $\underset{\sim}{X}' = [X_1 \ldots X_p]$ با توزیع نامشخص با میانگین μ و واریانس Σ را در نظر بگیرید هر متغیر نمونه n تایی اختیار شود:

فرد $1 \ldots\ldots n$

$$X = \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ \text{متغیر} \\ p \end{array} \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix}_{p\times n}$$

از یک جامعه نمونه‌های مختلفی می توان استخراج کرد که در این صورت x_{ik} از نمونه‌ای به نمونه‌ای تغییر می کند پس داریم

$$X_{p\times n} = \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{p1} & \cdots & X_{pn} \end{bmatrix}_{p\times n}$$

$$\underset{\sim}{X}_1 \quad \ldots \quad \underset{\sim}{X}_n$$

$$[\underset{\sim}{X}_1 \cdots \underset{\sim}{X}_m] \begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}_1 \\ \vdots \\ \underset{\sim}{X}_m \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\underset{\sim}{X}_1^2}_{KI} + \cdots + \underset{\sim}{X}_m^2$$

۸

پشت‌سر‌ِ‌هم نوشتن

$$\underset{\sim}{X}_1' = [X_{11} \cdots\cdots X_{p1}]$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\underset{\sim}{X}_n = [X_{1n} \cdots\cdots X_{pn}]$$

$$\underset{\sim}{X}' = [X_1 \ldots X_p]$$

$$\underset{\sim}{\mu}' = [\mu_1 \cdots \mu_p]$$

$$\underset{p\times n}{E(X)} = \begin{bmatrix} E(X_{11}) & \cdots & E(X_{1n}) \\ \vdots & & \\ E(X_{p1}) & \cdots & E(X_{pn}) \end{bmatrix}_{p\times n} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \cdots & \mu_1 \\ \mu_2 & \cdots & \mu_2 \\ \vdots & & \\ \mu_p & \cdots & \mu_p \end{bmatrix}_{p\times n}$$

$$= \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix}_{p\times 1} [1 \cdots\cdots 1]_{1\times n} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_1 \cdots & \mu_1 \\ & & \\ \mu_p & \mu_p \cdots & \mu_p \end{bmatrix}$$

$$= \underset{\sim}{\mu}\, 1_n'$$

$x_{11} \quad x_{n1}$

$x_{p1} \quad x_{np}$

$\underset{\sim}{X}_1 \cdots \underset{\sim}{X}_n$

$j = 1, \cdots n$

: $\underset{\sim}{X}_n$, ... , $\underset{\sim}{X}_1$ یک نمونه تصادفی تو سیم اگر

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{p1} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{pn} \end{bmatrix}$$

$$f(\underset{\sim}{x}_1, \ldots, \underset{\sim}{x}_n) = f(\underset{\sim}{x}_1) \cdots f(\underset{\sim}{x}_n)$$

که در آن

$$f(\underset{\sim}{x}_j) = f(x_{1j} \cdots x_{pj}) \quad j = 1, \ldots n$$

$$X = (\underset{\sim}{X}_1 \cdots\cdots \underset{\sim}{X}_n)$$

$$V(X_{p\times n}) = \begin{bmatrix} V(\underset{\sim}{X}_1) & Cov(\underset{\sim}{X}_1, \underset{\sim}{X}_2) & \cdots \\ Cov(X_1, X_2) & \ddots & \\ \vdots & & V(\underset{\sim}{X}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Sigma \end{bmatrix} = I_n \otimes \Sigma$$

$$\left.\begin{array}{ll} \underset{\sim}{X}_1' = [X_{11} \cdots X_{p1}] & V(\underset{\sim}{X}_1) = \Sigma \\ \underset{\sim}{X}_2' = [X_{12} \cdots X_{p2}] & V(\underset{\sim}{X}_2) = \Sigma \\ Cov(\underset{\sim}{X}_1, \underset{\sim}{X}_2) = 0 & \vdots \end{array}\right\} \Rightarrow$$

که در آن $\otimes$ ، ضرب کرونکر است .

★ اگر A یک ماتریس $n \times m$ و B یک ماتریس $p \times q$ باشد آن گاه ضرب کرونکر

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

آنها عبارت است از

$$C = A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}B & & & a_{nm}B \end{bmatrix}$$

که آن گاه C یک ماتریس $(np) \times (mq)$ است .

$$X = \begin{array}{c} x_1 \\ \\ x_p \end{array}\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ \vdots & & & \\ X_{p1} & \cdots & \cdots & X_{pn} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \to \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{array} = \bar{X}$$

$\underset{\sim}{x_1} \quad \cdots \quad \underset{\sim}{x_n}$

آماره های توصیفی

$$X_{p\times n} \longrightarrow (\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$$

قضیه: فرض کنید $\underset{\sim}{X}_1, \ldots, \underset{\sim}{X}_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع توأمی باشد که دارای بردار میانگین $\underset{\sim}{\mu}$ و ماتریس کوواریانس Σ است ، $\underset{\sim}{X}_1, \ldots, \underset{\sim}{X}_n \overset{iid}{\sim} (\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ در این صورت

الف) $E(\bar{\underset{\sim}{X}}) = \underset{\sim}{\mu}$

ب) $Cov(\bar{\underset{\sim}{X}}) = \frac{1}{n}\Sigma$

ج) $E(S_n) = \frac{n-1}{n}\Sigma \Rightarrow E(\underbrace{\frac{n}{n-1}S_n}_{\text{برآوردگر نااریب } \Sigma}) = \Sigma$

ولی S_n برآوردگر نااریب نیست . $E(S_n) - \Sigma = -\frac{1}{n}\Sigma$

Month. Date. ( )

$$\begin{bmatrix} X_{11} & & X_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{p1} & & X_{pn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \bar{X}_1 \\ \\ \to \bar{X}_p \end{matrix}$$

$$\underset{\sim}{X}_1, \ldots \underset{\sim}{X}_n$$

اثبات:

$$\bar{\underset{\sim}{X}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\underset{\sim}{X}_j}{n} = \frac{1}{n}(\underset{\sim}{X}_1 + \cdots + \underset{\sim}{X}_n) = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \vdots \\ \bar{X}_p \end{bmatrix} \quad (1$$

از طریق امید ⟸

$$E(\bar{\underset{\sim}{X}}) = \frac{1}{n} E(\underset{\sim}{X}_1 + \cdots + \underset{\sim}{X}_n)$$

$$= \frac{1}{n}\Big[\underbrace{E(\underset{\sim}{X}_1)}_{\underset{\sim}{\mu}} + \cdots + \underbrace{E(\underset{\sim}{X}_n)}_{\underset{\sim}{\mu}}\Big] = \underset{\sim}{\mu}$$

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix}$$

$$E(\underset{\sim}{X}_1) = \begin{bmatrix} E(X_{11}) \\ \vdots \\ E(X_{p1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \underset{\sim}{\mu}$$

۲) از مقت ا

$$Cov(\bar{\underset{\sim}{X}}) = E(\bar{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{\mu})(\bar{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{\mu})'$$

$$= E\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu})\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}(\underset{\sim}{X}_l - \underset{\sim}{\mu})'\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} E\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu})(\underset{\sim}{X}_l - \underset{\sim}{\mu})'\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} E(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu})(\underset{\sim}{X}_l - \underset{\sim}{\mu})'$$

if $j \neq l \Rightarrow Cov(\underset{\sim}{X}_j, \underset{\sim}{X}_l) = 0$ چون نمونه تصادفی

if $j = l \Rightarrow E(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu})(\underset{\sim}{X}_l - \underset{\sim}{\mu})' = V(\underset{\sim}{X}_j) = \Sigma$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} E(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu})(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu})' = \frac{n}{n^2}\Sigma$$

$$= \frac{1}{n}\Sigma$$

PCO

$$n S_n = \sum_{j=1}^{n} (\underset{\sim}{X}_j - \bar{\underset{\sim}{X}})(\underset{\sim}{X}_j - \bar{\underset{\sim}{X}})' = \sum_{j=1}^{n} (\underset{\sim}{X}_j - \bar{\underset{\sim}{X}}) \underset{\sim}{X}_j'$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} (\underset{\sim}{X}_j - \bar{\underset{\sim}{X}})(-\bar{\underset{\sim}{X}})' = \sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{X}_j \underset{\sim}{X}_j'$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \bar{\underset{\sim}{X}} \underbrace{\underset{\sim}{X}_j'}_{n\bar{X}'} + \sum_{j=1}^{n} \bar{\underset{\sim}{X}} \bar{\underset{\sim}{X}}' - \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\underset{\sim}{X}_j}_{n\bar{X}} \bar{\underset{\sim}{X}}'$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{X}_j \underset{\sim}{X}_j' - \cancel{n \bar{\underset{\sim}{X}}' \bar{\underset{\sim}{X}}} + \cancel{n \bar{\underset{\sim}{X}} \bar{\underset{\sim}{X}}'} - n \bar{\underset{\sim}{X}} \bar{\underset{\sim}{X}}'$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{X}_j \underset{\sim}{X}_j' - n \bar{\underset{\sim}{X}} \bar{\underset{\sim}{X}}' = n S_n$$

$$E(S_n) = \frac{1}{n}\left[E\left(\sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{X}_j \underset{\sim}{X}_j'\right) - n\, E(\bar{\underset{\sim}{X}} \bar{\underset{\sim}{X}}') \right] \quad (1)$$

$$E(\underset{\sim}{X}_j \underset{\sim}{X}_j') = E \begin{bmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{pj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1j} & \cdots & x_{pj} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} x_{1j}^2 & x_{1j}x_{2j} & \cdots & x_{1j}x_{pj} \\ \vdots & & & \\ x_{pj}x_{1j} & & \cdots & x_{pj}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_{11} & & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & & x_{pn} \\ \hline \underset{\sim}{X}_1 & \cdots & \underset{\sim}{X}_n \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E(X_{1j}^2) & E(X_{1j}X_{2j}) & \cdots & E(X_{1j}X_{pj}) \\ \vdots & & & \vdots \\ E(X_{pj}X_{1j}) & \cdots & \cdots & E(X_{pj}^2) \end{bmatrix}$$

$$E(X_{1j}^2) = E^2(X_{1j}) + \sigma_{11} = \mu_1^2 + \sigma_{11}$$

$$E(X_{1j}X_{2j}) = E(X_{1j})E(X_{2j}) + \sigma_{12} = \mu_1\mu_2 + \sigma_{12}$$

$$\vdots$$

$$E(X_{pj}^2) = E^2(X_{pj}) + \sigma_{pp} = \mu_p^2 + \sigma_{pp}$$

$$= \begin{bmatrix} \mu_1^2+\sigma_{11} & \cdots & \mu_1\mu_p+\sigma_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_p\mu_1+\sigma_{1p} & \cdots & \mu_p^2+\sigma_{pp} \end{bmatrix} = \mu\mu' + \Sigma$$

همین ترتیب به راحتی می توان نشان داد

$$E(\bar{X}\bar{X}') = \frac{1}{n}\Sigma + \mu\mu'$$

با جایگذاری در رابطه 1

$$E(S_n) = \frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n}(\mu\mu' + \Sigma) - n\left(\frac{1}{n}\Sigma + \mu\mu'\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[n\Sigma - \Sigma\right] = \frac{n-1}{n}\Sigma$$

نتیجه : $S = \frac{n}{n-1}S_n$ برآوردگر نااریب برای Σ است.

بدون اریبی

$$S = \frac{n}{n-1}S_n$$

$$E\left(\frac{n}{n-1}S_{ik}\right) = \sigma_{ik} \qquad S = \frac{1}{n-1}\sum(X_j - \bar{X})(X_j - \bar{X})'$$

$$\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij} - \bar{X}_i)(X_{kj} - \bar{X}_k)$$

درایه ik ام ماتریس S

$$\begin{cases} E(\bar{X}) = \mu, \quad Cov(\bar{X}) = \frac{\Sigma}{n} \\ E(S_n) = \frac{n-1}{n}\Sigma \end{cases}$$

$X' = [X_1 \cdots X_p]$

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \\ x_{p1} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \bar{x}_1 \\ \\ \to \bar{x}_p \end{matrix}$$

معیارهای پراکنش

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X})(X_j - \bar{X})'$$

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n} X_j X_j' - n\bar{X}\bar{X}'\right]$$

$$S = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{j=1}^{n} X_j X_j' - n\bar{X}\bar{X}'\right] \qquad E(S) = E\left(\frac{n}{n-1}S_n\right) = \Sigma$$

$(n-1)S = nS_n$

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1p} \\ \vdots & \ddots & \\ s_{1p} & & s_{pp} \end{bmatrix}_{p \times p} \to$$

p واریانس

تعداد کل کوواریانس‌ها $p^2 - p$

$\frac{1}{2}p(p-1)$ کوواریانس متمایز

$\cancel{(p-1)+(p-2)+(p-3)+\cdots+(p-(p-1))}$

$$s_{ik} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_k)$$

بعضی مواقع علاقمند به ارائه یک مقدار عددی برای تغییرات هستیم

واریانس کل:

$$T = \begin{cases} s_{11} + \cdots + s_{pp} = \sum_{i=1}^{p} s_{ii} = tr(S) \quad \text{نمونه} \\ \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{p}\sigma_i^2 = tr(\Sigma) \quad \text{برای جامعه} \end{cases}$$

واریانس تعمیم یافته:

$$G = \begin{cases} |S| = \prod_{i=1}^{p}\lambda_i \quad \text{برای نمونه} \\ |\Sigma| = \prod_{i=1}^{p}\lambda_i \quad \text{برای جامعه} \end{cases}$$

نمایش ماتریسی بردار میانگین و ماتریس کوواریانس نمونه:

$\cancel{H_n = I_n - \frac{1}{n}J_n}$

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{bmatrix} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \\ x_{p1} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \boxed{\frac{1}{n} X 1_n}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

با تعریف

$$H_n = I_n - \frac{1}{n} J_n = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots \\ \vdots & & \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ & \ddots & \\ -\frac{1}{n} & & 1-\frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

$$\underset{X}{\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \\ & & \end{bmatrix}} \underset{H}{\begin{bmatrix} 1-\frac{1}{n} & & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \\ -\frac{1}{n} & & 1-\frac{1}{n} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} x_{11}-\bar{x}_1 & \cdots & x_{1n}-\bar{x}_1 \\ \vdots & & \\ x_{p1}-\bar{x}_p & \cdots & x_{pn}-\bar{x}_p \end{bmatrix}$$

$$\underset{H}{\begin{bmatrix} 1-\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & & \\ -\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} \end{bmatrix}} \underset{X'}{\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{p1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n} & & x_{pn} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} x_{11}-\bar{x}_1 & \cdots \\ & \\ & \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X H^{H} X' = (n-1) S$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \frac{1}{n-1} X H X'}$$

$$D^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{s_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{s_{pp}} \end{bmatrix} \rightarrow$$ حاوی انحراف استاندارد متغیرها

تعریف شود

$$R = \begin{bmatrix} \frac{S_{11}}{\sqrt{S_{11}}\sqrt{S_{11}}} & \frac{S_{12}}{\sqrt{S_{11}}\sqrt{S_{22}}} & \cdots & \frac{S_{1p}}{\sqrt{S_{11}}\sqrt{S_{pp}}} \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & \frac{S_{pp}}{\sqrt{S_{pp}}\sqrt{S_{pp}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ \vdots & \ddots & & \\ r_{1p} & \cdots & & 1 \end{bmatrix}$$

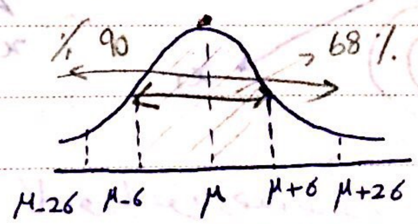
$$R = D^{-1/2}\, S\, D^{-1/2}$$

$$S = D^{1/2}\, R\, D^{1/2}$$

جلسه چهارم: چگالی نرمال چندمتغیره

تاکنون با توزیع نرمال یک متغیره با میانگین μ و واریانس σ^2 به صورت زیر آشنا شده اید

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\} \quad -\infty < x < \infty$$



$$P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) \simeq 0.68$$

$$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \simeq 0.95$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

نمونه تصادفی $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_{(m)} \quad m = 1, \ldots, n$

$$Z = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0,1) \Rightarrow T = \frac{Z}{\sqrt{U/m}} \sim t_m$$

$$U \sim \chi^2_{(m)}$$

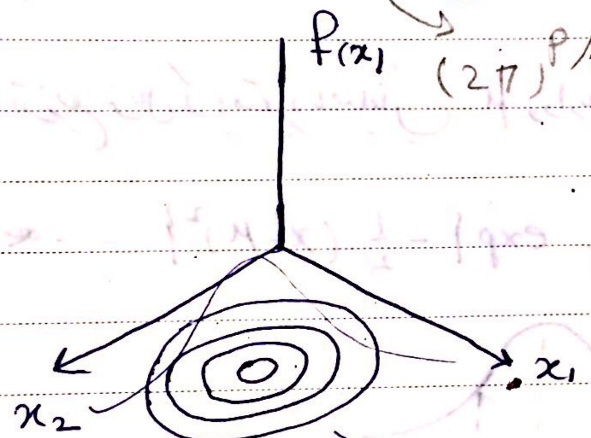
$$\left.\begin{array}{l} U \sim \chi^2_{(m)} \\ V \sim \chi^2_{(n)} \\ U, V \text{ ; independent} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} F = \dfrac{U/m}{V/n} \sim F(m, n) \\ \beta = \dfrac{V}{U+V} \sim Beta\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right) \end{array}$$

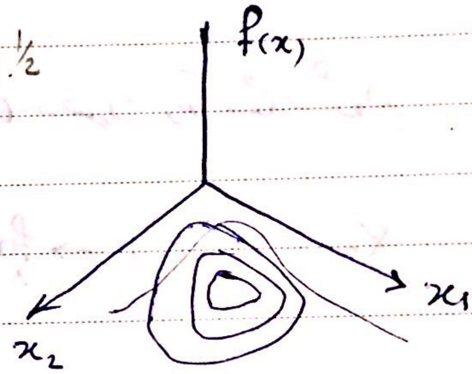
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)(\sigma^2)^{-1}(x-\mu)\right\}$$

$\underset{\sim}{X}' = [X_1 \ldots X_p]$; $\underset{\sim}{X} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$

$$\boxed{f(\underset{\sim}{x}) = \frac{1}{|2\pi\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})'\Sigma^{-1}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})\right\}}$$

$$|2\pi\Sigma|^{1/2} \rightarrow (2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}$$

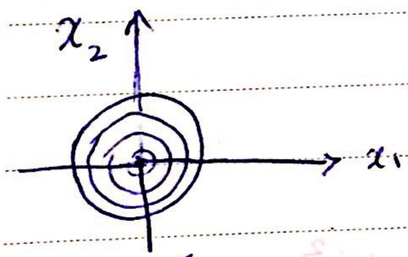




کانتور یا نمودار خطوط تراز

تمرین: نشان دهید

$$\int\cdots\int f(\underset{\sim}{x})\,d\underset{\sim}{x} = 1$$



$\mu = \underset{\sim}{0}$ $\Sigma = I$

با در نظر گرفتن

$$K = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}}$$

$|aA| = a^p|A|$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} K e^{-\frac{1}{2}(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})'\Sigma^{-1}(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})}\, dx_1\ldots dx_p = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})'\Sigma^{-1}(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})\right\} dx_1\ldots dx_p = \frac{1}{K}$$

(۱۰)

Subject:

Year. Month. Date. ( )

با تعریف
$$\boxed{\underset{\sim}{X} = \Sigma^{1/2}\underset{\sim}{Y} + \underset{\sim}{\mu}} \leftarrow \underset{\sim}{Y} = \Sigma^{-1/2}(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})$$

$$\frac{dx}{dy} \Longrightarrow J = |\Sigma^{1/2}| = |\Sigma|^{1/2} \quad , \quad (\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})'\Sigma^{-1}(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu}) = \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} = \sum_{i=1}^{p} Y_i^2$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} K|\Sigma|^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y}}\, dy_1 \ldots dy_p = 1$$

$$K|\Sigma|^{1/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y}}\, dy_1 \ldots dy_p}_{(\sqrt{2\pi})^p} \qquad e^{-\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + \cdots)}$$

$$\frac{1}{|\Sigma|^{1/2}(2\pi)^{p/2}} \cdot |\Sigma|^{1/2}(2\pi)^{p/2} = 1$$

تابع چگالی نرمال دو متغیره:

$$\underset{\sim}{X}' = (X_1, X_2)$$

$$E(X_1) = \mu_1 \quad E(X_2) = \mu_2 \quad V(X_1) = \sigma_{11} \quad V(X_2) = \sigma_{22}$$

$$\sigma_{12} = Cov(X_1, X_2) \;,\; \rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}} \Longrightarrow \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \Sigma^{-1} = \frac{1}{\underbrace{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2}} \begin{bmatrix} \sigma_{22} & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_{11} \end{bmatrix}$$

$$-\sigma_{12}^2 = -\rho_{12}^2\sigma_{11}\sigma_{22} \Rightarrow \underbrace{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2} = \sigma_{11}\sigma_{22} - \rho_{12}^2\sigma_{11}\sigma_{22} = \sigma_{11}\sigma_{22}(1 - \rho_{12}^2)$$

$$\sigma_{12} = \rho_{12}\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}} \rightarrow \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 = \sigma_{11}\sigma_{22}(1 - \rho_{12}^2)$$

$$(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})'\Sigma^{-1}(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu}) = \underset{1\times 2}{[X_1 - \mu_1 \quad X_2 - \mu_2]} \cdot \underbrace{\Sigma^{-1}} \begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 \\ X_2 - \mu_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{1 - \rho_{12}^2} \begin{bmatrix} \sigma_{22} & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_{11} \end{bmatrix}$$

$$[(X_1 - \mu_1)\sigma_{22} - (X_2 - \mu_2)\sigma_{12} \quad -(X_1 - \mu_1)\sigma_{12} + (X_2 - \mu_2)\sigma_{11}] \begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 \\ X_2 - \mu_2 \end{bmatrix}$$

$$(X_1 - \mu_1)^2\sigma_{22} - (X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)\sigma_{12} - (X_1 - \mu_1)\ldots\sigma_{12} + (X_2 - \mu_2)\ldots\sigma_{11}$$

$\frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}}$

$$= \frac{1}{1-\rho_{12}^2}\left[\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right)^2 + \left(\frac{X_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right)^2 - 2\rho_{12}\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right)\left(\frac{X_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right)\right]$$

ودرنتیجه

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho_{12}^2)}} \cdot \qquad |\Sigma|^{\frac{1}{2}} =$$

$$\exp\left\{ \frac{-1}{2(1-\rho_{12}^2)}\left[\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right)^2 + \left(\frac{X_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right)^2 - 2\rho_{12}\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right)\left(\frac{X_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right)\right]\right\}$$

* اگر $\rho_{12} = 0$ چگالی توأم فوق، بصورت حاصلضرب دو چگالی نرمال یک متغیره است که استقلال X_1 و X_2 را نتیجه می دهد.

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \to p_1\times 1 \\ X_2 \to p_2 \times 1 \end{bmatrix} \qquad p_1 + p_2 = p$$

* صفر بودن ضریب همبستگی بین دو مجموعه از عناصر X (اگر $X \sim N(\mu, \Sigma)$) به مفهوم استقلال آماری آن دو مجموعه است.

X_1 و X_2 مستقلند $\iff Cov(X_1, X_2) = 0$

* هر مجموعه از ترکیبات خطی دارای توزیع نرمال است

$X \sim N(\mu, \Sigma)$ تعریف $Y = AX + b$

$$\Rightarrow Y \sim N(A\mu + b, A\Sigma A')$$

$A_{q\times p} \qquad b_{q\times 1}$

(۱۱)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* اگر توزیع های کناری یک توزیع توأم هر کدام نرمال باشند آن گاه دلیلی ندارد که توزیع توأم آنها نیز نرمال باشد

① ولی توزیع های کناری یک توزیع چند متغیره نرمال یک توزیع یک متغیره نرمال است.

قضیه ②: تابع مشخصه $\underset{\sim}{X}$ عبارت است از $\{\underset{\sim}{X} \sim N(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)\}$

$$\boxed{\Phi_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{t}) = \exp\left(i\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\mu} - \frac{1}{2}\underset{\sim}{t}'\Sigma\underset{\sim}{t}\right)}$$

صفحه بعد

برهان

$$\underset{\sim}{X} = \Sigma^{1/2}\underset{\sim}{Y} + \underset{\sim}{\mu} \rightarrow \text{تبدیل رو برو را در نظر بگیرید}$$

$$\Phi_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{t}) = E(e^{i\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{X}}) = e^{i\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\mu}}\, E(e^{i\underset{\sim}{u}'\underset{\sim}{Y}})$$

$(1\times p)(p\times 1)$

$$= e^{i\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\mu}}\, E(e^{i(u_1y_1+\cdots+u_py_p)})$$

$$\underset{\sim}{Y} \sim N(0, I) \quad = e^{i\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\mu}}\underbrace{[E(e^{iu_1y_1}) \times \cdots}_{e^{-\frac{u_1^2}{2}} \cdots e^{-\frac{u_p^2}{2}}} \qquad \underset{\sim}{u}' = \underset{\sim}{t}'\Sigma^{1/2} \quad \text{که در آن}$$

$\downarrow$

y_1 ها متغیرهای مستقل با توزیع $N(0,1)$ $\Rightarrow \underbrace{e^{-\underset{\sim}{u}'\underset{\sim}{u}/2}}$

$$\Phi_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{t}) = e^{i\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\mu}} \prod_{i=1}^{p} e^{-\frac{u_i^2}{2}}$$

$\frac{1}{|2\pi\Sigma|^{1/2}} \exp\{-\frac{1}{2}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})'\Sigma^{-1}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})\}$

$$= e^{i\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\mu} - \frac{\underset{\sim}{u}'\underset{\sim}{u}}{2}}$$

$$= e^{\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\mu} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{t}'\Sigma\underset{\sim}{t}}$$

$\underset{\sim}{u}' = \underset{\sim}{t}'\Sigma^{1/2}$ به همین ترتیب $= e^{i\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\mu} - \frac{1}{2}\underset{\sim}{t}'\Sigma\underset{\sim}{t}}$

$M_{\underset{\sim}{X}}(t) = E(e^{\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{X}})$

مشتقات تابع بالا

قضیه ①: فرض کنید $\underset{\sim}{X} \sim N(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ و $\underset{\sim}{Y} = \Sigma^{-1/2}(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})$ در این صورت

$$\underset{\sim}{X} = \Sigma^{1/2}\underset{\sim}{Y} + \underset{\sim}{\mu}$$

$y_1 \dots y_p$ متغیرهای $N(0,1)$ مستقل هستند

برهان:

$$(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})'\Sigma^{-1}(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu}) = \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y}$$

ژاکوبین تبدیل Y به X عبارت است از $|\Sigma|^{1/2}$ است لذا تابع چگالی $\underset{\sim}{Y}$ به صورت

$$(\Sigma^{1/2}\underset{\sim}{y})'\Sigma^{-1}(\Sigma^{1/2}\underset{\sim}{y}) \qquad g(\underset{\sim}{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} e^{-\sum y_i^2/2}$$

P4PCO

$$g(y_1) \cdots g(y_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y_1^2/2} \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y_p^2/2}$$

قضیه: اگر $\underset{\sim}{X} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ و $|\Sigma|>0$ باشد آنگاه

$\underset{\sim}{u} = (\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})' \Sigma^{-1} (\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu}) \sim \chi^2_{(p)}$ با تعریف $Y = \Sigma^{-1/2}(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})$

$$(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})' \Sigma^{-1} (\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu}) = Y'Y = \sum^{p} Y_i^2$$

Y_i ها متغیرهای مستقل با توزیع $N(0,1)$ پس $Y_i^2 \sim \chi^2_1$ و $\sum_{i=1}^{p} Y_i^2 \sim \chi^2_p$

قضیه: تابع مشخصه *

قضیه: تمام زیرمجموعه‌های $\underset{\sim}{X}$ دارای توزیع نرمال اند اگر $\underset{\sim}{X} \sim N(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$

$$\underset{\sim}{X}_{p\times 1} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}_1 \\ \hline \underset{\sim}{X}_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} q\times 1 \\ (p-q)\times 1 \end{matrix} \longrightarrow \underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mu}_1 \\ \hline \underset{\sim}{\mu}_2 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} q & p-q \end{array} \\ \begin{array}{c} q \\ p-q \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \hline \Sigma_{22} & \Sigma_{22} \end{array}\right] \end{array}$$

PAPCO

برای مثال $\underset{\sim}{X}_1 \sim N_q(\underset{\sim}{\mu}_1, \Sigma_{11})$

کافیست $A_{q\times p} = \left[\underset{q\times q}{I} \quad \underset{(p-q)(p-q)}{0}\right]$ در نظر بگیرید

$$A\underset{\sim}{X} = [\underbrace{I_{q\times q} \quad 0}_{q\times p}]\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix}_{p\times 1} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_q \end{bmatrix}_{q\times 1} = \underset{\sim}{X}_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & & & \\ 0 & & 1 & & \end{bmatrix}_{q\times p}$$

که می‌دانیم

$$\underset{\sim}{X}_1 = A\underset{\sim}{X} \sim N(A\underset{\sim}{\mu}, A\Sigma A')$$

$$\underset{\sim}{X}_1 \sim N_q(\underset{\sim}{\mu}_1, \Sigma_{11})$$

تمرین

قضیه: اگر $\underset{\sim}{X}_{1\,q_1\times 1}$ و $\underset{\sim}{X}_{2\,q_2\times 1}$ مستقل باشند آنگاه $Cov(\underset{\sim}{X}_1, \underset{\sim}{X}_2) = 0$

یک ماتریس $q_1 \times q_2$ از صفر است.

اگر $\begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}_1 \\ \underset{\sim}{X}_2 \end{bmatrix}$ دارای توزیع $N_{q_1+q_2}\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}\right)$ باشد. آنگاه $\underset{\sim}{X}_1$ و $\underset{\sim}{X}_2$

مستقلند اگر و فقط اگر $\Sigma_{12} = 0$ (به عنوان تمرین احکام ثابت شوند)

توزیع شرطی

قضیه: فرض کنید $\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}_1 \\ \hline \underset{\sim}{X}_2 \end{bmatrix}$ دارای توزیع $N_p(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ با $\underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$

و $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$ که $|\Sigma_{22}| > 0$، آنگاه توزیع شرطی $\underset{\sim}{X}_1$ با

معلوم بودن $\underset{\sim}{X}_2 = \underset{\sim}{x}_2$ نرمال بوده و میانگین و کواریانس آن عبارت است از

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\mu_{1.2} = \mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\underset{\sim}{X}_2 - \underset{\sim}{\mu}_2)$$

$$\Sigma_{11.2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$$

اثبات :

$$A = \left[\begin{array}{c|c} I_{q\times q} & (-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1})_{q\times p-q} \\ \hline 0_{(p-q)\times q} & I_{(p-q)\times(p-q)} \end{array}\right]$$

$\underset{\sim}{Y} = A(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu}) \sim N(\underbrace{A\underset{\sim}{\mu} - A\underset{\sim}{\mu}}_{0}, A\Sigma A')$

آن گاه

$$\underbrace{A(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})}_{\downarrow} = A\left[\begin{array}{c} \underset{\sim}{X}_1 - \underset{\sim}{\mu}_1 \\ \hline \underset{\sim}{X}_2 - \underset{\sim}{\mu}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \overbrace{\underset{\sim}{X}_1 - \underset{\sim}{\mu}_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\underset{\sim}{X}_2 - \underset{\sim}{\mu}_2)}^{\underset{\sim}{Y}_1} \\ \hline \underbrace{\underset{\sim}{X}_2 - \underset{\sim}{\mu}_2}_{\underset{\sim}{Y}_2} \end{array}\right]$$

نرمال توام با ماتریس کوواریانس $A\Sigma A'$

$\underset{\sim}{Y} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{Y}_1 \\ \underset{\sim}{Y}_2 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} \end{pmatrix}, \Sigma_{\underset{\sim}{Y}}\right)$

$$\Sigma_{\underset{\sim}{Y}} = \left[\begin{array}{c|c} I & -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ \hline 0 & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \hline \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & 0' \\ \hline -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} & I \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} & 0' \\ \hline 0 & \Sigma_{22} \end{array}\right]$$

چون $\underset{\sim}{X}_1 - \underset{\sim}{\mu}_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\underset{\sim}{X}_2 - \underset{\sim}{\mu}_2)$ و $\underset{\sim}{X}_2 - \underset{\sim}{\mu}_2$ دارای کوواریانس صفرند پس مستقلند از طرفی

$\underset{\sim}{Y}_1 = \underset{\sim}{X}_1 - \underset{\sim}{\mu}_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\underset{\sim}{X}_2 - \underset{\sim}{\mu}_2) \sim N$

$\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\cancel{\Sigma_{22}\Sigma_{22}^{-1}}\Sigma_{21}$

دارای توزیع نرمال $N_q(0, \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})$ است ~~اگر $\underset{\sim}{X}_2 = \underset{\sim}{x}_2$~~

Subject :

Year . Month . Date . ( )

همبستگی نرمال :

$X , Y \longrightarrow$ مستقلند

$X | Y \sim X \quad f(x|y)$

$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)}$

$$\begin{cases} \underset{\sim}{X}_1 - \underset{\sim}{\mu}_1 - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (\underset{\sim}{X}_2 - \underset{\sim}{\mu}_2) \\ \underset{\sim}{X}_2 - \underset{\sim}{\mu}_2 \end{cases} \Rightarrow \text{مستقلند}$$

$\Rightarrow$ توزیع شرطی آنها مثل توزیع غیرشرطی آنهاست

$$\underset{\sim}{X}_1 - \underset{\sim}{\mu}_1 - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (\underset{\sim}{X}_2 - \underset{\sim}{\mu}_2) \sim N_q(0, \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21})$$

از طرفی اگر $\underset{\sim}{X}_2 = \underset{\sim}{x}_2$ معلوم باشد، آن گاه

$$\underset{\sim}{\mu}_1 + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (\underset{\sim}{X}_2 - \underset{\sim}{\mu}_2) \longrightarrow \text{ثابت است}$$

$$\left(\underset{\sim}{X}_1 - \underbrace{(\underset{\sim}{\mu}_1 + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (\underset{\sim}{X}_2 - \underset{\sim}{\mu}_2))}_{a} \;\middle|\; \underset{\sim}{X}_2 = \underset{\sim}{x}_2 \right)$$

$$\stackrel{D}{=} \underset{\sim}{X}_1 - a$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{X}_1 \mid \underset{\sim}{X}_2 = \underset{\sim}{x}_2 \sim N_q(a, \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21})$$

$$= N_q(\mu_1 + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (X_2 - \mu_2), \quad)$$

– توزیع نرمال دو متغیره

– میانگین شرطی توزیع نرمال دو متغیره

$\cancel{X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_{11})}$

$\cancel{X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_{22})}$ $\cancel{\underset{\sim}{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)}$ فرض کنید

$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{22} & \sigma_{22} \end{pmatrix}\right)$

$\cancel{Cov(X_1, X_2) = \sigma_{12}}$

میانگین شرطی $\underset{\sim}{X}_1$ به معلوم بودن $\underset{\sim}{X}_2 = \underset{\sim}{x}_2$ عبارت است از : (از صفحه قبل)

$$(\underset{\sim}{X}_1 \mid \underset{\sim}{X}_2 = \underset{\sim}{x}_2) \sim N\left(\mu_1 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}} (\underset{\sim}{X}_2 - \underset{\sim}{\mu}_2), \sigma_{11} - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{22}}\right)$$

$\sigma_{11}\left(1 - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{22}\sigma_{11}}\right)$

$\sigma_{11}(1 - \rho_{12}^2)$

$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}} \longrightarrow \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{11}\sigma_{22}} = \rho_{12}^2$

اثبات به طور مستقیم :

$$f(x_1 | x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_2)} \quad ①$$

$$f(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{22}}} \exp\left\{ -(x_2-\mu_2)^2 / 2\sigma_{22} \right\} \quad ②$$

$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_{22})$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{22}} \times \sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{11}(1-\rho_{12}^2)}} \times$$

$2\pi\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho_{12}^2)}$

$$\exp\left\{ \frac{-1}{2(1-\rho_{12}^2)} \left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_{11}} - 2\rho_{12} \frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_{22}} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{11}(1-\rho_{12}^2)}} \cdot \exp\left\{ \frac{-1}{2\sigma_{11}(1-\rho_{12}^2)} \left(x_1 - \mu_1 - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}(x_2-\mu_2) \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_{22}} \right\} \quad ③$$

ص ۱۷۹ جانسون

با جایگذاری ۲ و ۳ در ۱

②, ③

$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{11}(1-\rho_{12}^2)}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma_{11}(1-\rho_{12}^2)} \left(x_1 - \mu_1 - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}(x_2-\mu_2) \right)^2 \right\}$$

$$\sim N\left(\mu_1 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}(x_2-\mu_2), \ \sigma_{11}(1-\rho_{12}^2) \right)$$

Subject. Year. Month. Date.

$\underset{\sim}{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)\quad f(\underset{\sim}{x}) = \frac{1}{|2\pi\Sigma|^{1/2}} \exp\{-\frac{1}{2}(\underset{\sim}{x}-\mu)'\Sigma^{-1}(\underset{\sim}{x}-\mu)\}$

$f(\underset{\sim}{x_1}|\underset{\sim}{x_2}) \sim N_q(\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2-\mu_2), \Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})$

قضیه : فرض کنید $\underset{\sim}{X_1}, \dots, \underset{\sim}{X_n}$ دو به دو مستقل بوده و $\underset{\sim}{X}_j$ دارای توزیع $N_p(\underset{\sim}{\mu_j}, \Sigma)$ باشد (ماتریس واریانس کوواریانس $\underset{\sim}{X_j}$ ها یکی و برابر Σ است). در این صورت اگر تعریف کنیم

$$\underset{\sim}{V_1} = c_1\underset{\sim}{X_1} + \dots + c_n\underset{\sim}{X_n}$$

$$\underset{\sim}{V_2} = b_1\underset{\sim}{X_1} + \dots + b_n\underset{\sim}{X_n}$$

آنگاه $\underset{\sim}{V_1} \sim N_p\left(\sum_{j=1}^n c_j\underset{\sim}{\mu_j}, \sum_{j=1}^n c_j^2\Sigma\right)$ و

$$\begin{pmatrix}\underset{\sim}{V_1}\\ \underset{\sim}{V_2}\end{pmatrix} \sim N_{2p}\left(\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^n c_j\underset{\sim}{\mu_j}\\ \sum_{j=1}^n b_j\underset{\sim}{\mu_j}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}(\sum_{j=1}^n c_j^2)\Sigma & (\underset{\sim}{b}'\underset{\sim}{c})\Sigma\\ (\underset{\sim}{b}'\underset{\sim}{c})\Sigma & (\sum_{j=1}^n b_j^2)\Sigma\end{pmatrix}\right)$$

$\sum c_j b_j$

$\sum c_j b_j$

$X_2 \sim (\mu_2, \Sigma_{22})_{q_2}$

$X_1 \sim N_{q_1}(\mu_1, \Sigma_{11})$

$\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix} \sim \left[\begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\Sigma_{11} & 0\\ 0 & \Sigma_{22}\end{bmatrix}\right]_{q_1+q_2}$

و V_1 و V_2 مستقلند اگر $\underset{\sim}{b}'\underset{\sim}{c} = 0$ باشد.

$$\underset{\sim}{b}'\underset{\sim}{c} = \sum_{j=1}^n c_j b_j = 0$$

می دانیم اگر $\underset{\sim}{X_1}, \underset{\sim}{X_2}, \dots, \underset{\sim}{X_n}$ دو به دو مستقل باشند

$$\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix}\underset{\sim}{X_1}\\ \underset{\sim}{X_2}\\ \vdots\\ \underset{\sim}{X_n}\end{bmatrix} \sim N_{\underbrace{p+\dots+p}_{np}}\left(\begin{bmatrix}\underset{\sim}{\mu_1}\\ \vdots\\ \underset{\sim}{\mu_n}\end{bmatrix}_{np\times1}, \overbrace{\begin{bmatrix}\Sigma & & 0\\ & \Sigma & \\ 0 & & \ddots \ \Sigma\end{bmatrix}}^{\Sigma_x}\right)$$

با انتخاب $A_{2p\times np} = \begin{bmatrix}c_1 I & c_2 I \dots & c_n I\\ b_1 I & b_2 I \dots & b_n I\end{bmatrix}$ که در آن I ماتریس همانی $p\times p$ است می توان نوشت

$A = \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1 & & 0\\ & \ddots & c_1\end{bmatrix}_{p\times p} \dots \begin{bmatrix}c_n & & \\ & \ddots & c_n\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}b_1 & & \\ & \ddots & b_1\end{bmatrix}_{p\times p} \dots \begin{bmatrix}b_n & & \\ & \ddots & b_n\end{bmatrix}\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}X_1\\ \vdots \\ X_n\end{bmatrix}$

$$A\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix}c_1\underset{\sim}{X_1} + c_2\underset{\sim}{X_2} + \dots + c_n\underset{\sim}{X_n}\\ b_1\underset{\sim}{X_1} + b_2\underset{\sim}{X_2} + \dots + b_n\underset{\sim}{X_n}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sum_{j=1}^n c_j\underset{\sim}{X_j}\\ \sum_{j=1}^n b_j\underset{\sim}{X_j}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underset{\sim}{V_1}\\ \underset{\sim}{V_2}\end{bmatrix}$$

$x_1|x_2 \sim N(\mu_1 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}(x_2-\mu_2), \sigma_{11}(1-\rho_{12}^2))$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

پس می‌دانیم $\underset{\sim}{X}A$ دارای توزیع $N_{2p}(A\underset{\sim}{\mu}, A\Sigma_x A')$ است.

$$A\underset{\sim}{\mu} = A\begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mu}_1 \\ \vdots \\ \underset{\sim}{\mu}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} c_j \underset{\sim}{\mu}_j \\ \sum_{j=1}^{n} b_j \underset{\sim}{\mu}_j \end{bmatrix}$$

$$A\Sigma_x A' = \begin{bmatrix} c_1 I & \cdots & c_n I \\ b_1 I & \cdots & b_n I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 I & b_1 I \\ \vdots & \vdots \\ c_n I & b_n I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1\Sigma & c_2\Sigma & \cdots & c_n\Sigma \\ b_1\Sigma & b_2\Sigma & \cdots & b_n\Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 I & b_1 I \\ \vdots & \vdots \\ c_n I & b_n I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1^2\Sigma + c_2^2\Sigma + c_n^2\Sigma & c_1 b_1\Sigma + \dots + c_n b_n \Sigma \\ b_1 c_1 \Sigma + \dots + b_n c_n \Sigma & b_1^2\Sigma + \dots + b_n^2\Sigma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right)\Sigma & \left(\sum_{j=1}^{n} c_j b_j\right)\Sigma \\ \left(\sum_{j=1}^{n} c_j b_j\right)\Sigma & \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right)\Sigma \end{bmatrix}$$

به راحتی اگر $\sum_{j=1}^{n} c_j b_j = \underset{\sim}{b}'\underset{\sim}{c} = 0$ باشد، $(\sum c_j b_j)\Sigma = \underset{\sim}{0}$ خواهد شد و دیگر $\underset{\sim}{V}_1$ و $\underset{\sim}{V}_2$ مستقل اند.

تمرین: ثابت کنید $\bar{X}$ میانگین نمونه‌ای از جامعه نرمال چندمتغیره دارای توزیع نرمال $N_p(\underset{\sim}{\mu}, \frac{1}{n}\Sigma)$ است. (n اندازه نمونه)

قضایای مفید:

قضیه ۱: اگر $\underset{\sim}{X} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ باشد آنگاه $A\underset{\sim}{X}$ و $B\underset{\sim}{X}$ مستقلند اگر و تنها اگر

$$A\Sigma B' = 0$$

مثال: فرض کنید $\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}_1 \\ \underset{\sim}{X}_2 \end{bmatrix} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ نشان دهید $\underset{\sim}{X}_1$ و $\underset{\sim}{X}_2 - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\underset{\sim}{X}_1$ مستقلند و توزیع آنها عبارت است از:

$$\underset{\sim}{X}_1 \sim N(\underset{\sim}{\mu}_1, \Sigma_{11}) \quad , \quad \underset{\sim}{X}_2 - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\underset{\sim}{X}_1 \sim N(\underset{\sim}{\mu}_2 - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\mu_1, \Sigma_{22.1})$$

$$\Sigma_{22.1} = \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}$$

تعریف می‌کنیم $A = [-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1} \quad I]$ و $B = [I \quad 0]$ آنگاه

$$A\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{X}_2 - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\underset{\sim}{X}_1 \quad , \quad B\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{X}_1$$

کافیست نشان دهیم $A\Sigma B' = 0$

$$[-\Sigma_{21} \cdot \Sigma_{11}^{-1} \quad I]\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= [-\Sigma_{21} + \Sigma_{21} \quad -\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} + \Sigma_{22}]\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

پس $\underset{\sim}{X}_1$ و $\underset{\sim}{X}_2 - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\underset{\sim}{X}_1$ مستقلند توزیع $\underset{\sim}{X}_1$: $\underset{\sim}{X}_1 \sim N(\underset{\sim}{\mu}_1, \Sigma_{11})$

$$\underset{\sim}{X}_2 - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\underset{\sim}{X}_1 \sim N(A\underset{\sim}{\mu}, A\Sigma A') = N(\underset{\sim}{\mu}_2 - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\mu_1, \Sigma_{22.1})$$

$$[0 \quad -\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} + \Sigma_{22}]\begin{bmatrix} -\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1} \\ I \end{bmatrix} = \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}$$

قضیه ۲: اگر $\underset{\sim}{X} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ آنگاه $\underset{\sim}{X}'A\underset{\sim}{X}$ و $\underset{\sim}{X}'B\underset{\sim}{X}$ مستقلند اگر و تنها اگر

$$A\Sigma B = 0 \quad \text{یا} \quad B\Sigma A = 0$$

قضیه ۳: اگر $X_{p\times n}$ ماتریسی از $N(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ باشد آنگاه $Z = CX'D$, $Y = AX'B$

Z و Y مستقلند اگر $AC' = 0$ یا $B'\Sigma D = 0$

مثال ۲: نشان دهید $\bar{X}$ و S مستقلند ($\underset{\sim}{X} \sim N(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$)

$$\bar{\underset{\sim}{X}} \sim N(\underset{\sim}{\mu}, \frac{\Sigma}{n}) \qquad \bar{\underset{\sim}{X}} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{A} \underbrace{X}_{X} \underbrace{\underset{\sim}{1}_n}_{B}$$

اگر X مستقل باشد
اگر X^2 مستقل است

$$S = \underbrace{\frac{1}{n-1} X H X'}_{} = \frac{1}{n-1} X H \underbrace{H X'}_{(XH)(XH)'}$$

$$\underbrace{I}_{C} \underbrace{X}_{X} \underbrace{H}_{D}$$

$$\begin{cases} \overbrace{n^{-1} \underset{\sim}{1}_n'}^{A} X' \overset{B}{I} & : \bar{X}' \\ \underset{C}{H} X' \underset{D}{I} & : HX' \end{cases}$$

$$AC' = n^{-1} \underbrace{\underset{\sim}{1}_n'}_{1\times n} \underbrace{H}_{n\times n}$$

مثال ۳: فرض کنید $\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}_1 \\ \underset{\sim}{X}_2 \end{bmatrix} \sim N_{2p}(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ که در آن $\underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mu}_1 \\ \underset{\sim}{\mu}_2 \end{bmatrix}$ و $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{11} \end{pmatrix}$ نشان دهید $\underset{\sim}{X}_1 + \underset{\sim}{X}_2$ و $\underset{\sim}{X}_1 - \underset{\sim}{X}_2$ از یکدیگر مستقلند

$$A = [I_p \quad I_p] \longrightarrow A\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{X}_1 + \underset{\sim}{X}_2$$

$$B = [I_p \quad -I_p] \longrightarrow B\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{X}_1 - \underset{\sim}{X}_2$$

$$A\Sigma B' = [I_p \quad I_p] \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p \\ -I_p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Sigma_{11} + \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12} + \Sigma_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p \\ -I_p \end{bmatrix} = \Sigma_{11} + \Sigma_{12} - \Sigma_{12} - \Sigma_{11} = 0$$

یا می توان نوشت

$$A = \begin{pmatrix} I_p & I_p \\ I_p & -I_p \end{pmatrix} \qquad A\underset{\sim}{X} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{X}_1 + \underset{\sim}{X}_2 \\ \underset{\sim}{X}_1 - \underset{\sim}{X}_2 \end{pmatrix} \sim N(A\underset{\sim}{\mu}, A\Sigma A')$$

$$A\Sigma A' = \begin{pmatrix} I_p & I_p \\ I_p & -I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & I_p \\ I_p & -I_p \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \Sigma_{11} + \Sigma_{12} & \Sigma_{12} + \Sigma_{11} \\ \Sigma_{11} - \Sigma_{12} & \Sigma_{12} - \Sigma_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & I_p \\ I_p & -I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\Sigma_{11} + 2\Sigma_{12} & 0 \\ 0 & 2\Sigma_{11} - 2\Sigma_{12} \end{pmatrix}$$

نمونه‌گیری از توزیع نرمال چندمتغیره و برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها:

~~می دانیم برآورد MLE به دنبال مقداری از پارامتر هستیم که به ازای آن نمونه مشاهده شده دارای بیشترین شانس وقوع است.~~

~~به عبارت دیگر ما به دنبال مقداری برای پارامتر خاصی هستیم که داده‌ی مشاهده شده را بهترین وجه بیان می کند.~~ درعمل μ و Σ نامعلومند و باید برآورد شوند

در این جا برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای μ و Σ را برای یک جامعه نرمال چندمتغیره را بدست می آوریم

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{p1} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{pn} \end{bmatrix}$$

فرض کنید که بردارهای $p\times 1$، $X_1, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از جامعه نرمال چندمتغیری با بردار میانگین μ و ماتریس کوواریانس Σ باشد.

$$X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} N_p(\mu, \Sigma)$$

چون $X_1, \dots, X_n$ مستقل هستند و هریک دارای توزیع $N_p(\mu, \Sigma)$ پس چگالی توأم تمام مشاهدات حاصلضرب چگالیهای نرمال حاشیه‌ای است پس:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (x_j - \mu)' \Sigma^{-1} (x_j - \mu) \right\} \right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}}} \cdot \frac{1}{|\Sigma|^{n/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu)' \Sigma^{-1} (x_j - \mu)}_{A} \right\} \quad (1)$$

از طرفی داریم:

$$\underset{\text{اسکالر}}{(x_j - \mu)'_{1\times p} \Sigma^{-1}_{p\times p} (x_j - \mu)_{p\times 1}} = tr[(x_j - \mu)' \Sigma^{-1} (x_j - \mu)]$$

و از خواص جابجایی اثر:

$$= tr[\Sigma^{-1} (x_j - \mu)(x_j - \mu)'] \quad (2)$$

$f(x) = e^{-x}$

$x \to \infty$

با جایگذاری ۲ در A :

$$\sum_{j=1}^{n} (\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu})' \Sigma^{-1} (\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu}) = \sum_{j=1}^{n} tr\left(\Sigma^{-1} (\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu})(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu})' \right)$$

$$= tr\left[\Sigma^{-1} \left(\sum_{j=1}^{n} (\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu})(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu})' \right) \right]$$

به هر جمله $(\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\mu})$ مقدار $\bar{\underset{\sim}{X}}$ را اضافه و کم می‌کنیم

$$\sum_{j=1}^{n} (\underset{\sim}{X}_j - \bar{\underset{\sim}{X}} + \bar{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{\mu})(\underset{\sim}{X}_j - \bar{\underset{\sim}{X}} + \bar{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{\mu})'$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\underset{\sim}{X}_j - \bar{\underset{\sim}{X}})(\underset{\sim}{X}_j - \bar{\underset{\sim}{X}})' + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (\bar{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{\mu})(\underset{\sim}{X}_j - \bar{\underset{\sim}{X}})'}_{0}$$

$$+ \underbrace{\sum (\underset{\sim}{X}_j - \bar{\underset{\sim}{X}})(\bar{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{\mu})'}_{0} + n(\bar{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{\mu})(\bar{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{\mu})'$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\underset{\sim}{X}_j - \bar{\underset{\sim}{X}})(\underset{\sim}{X}_j - \bar{\underset{\sim}{X}})' + n(\bar{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{\mu})(\bar{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{\mu})'$$

اکنون می‌توانیم چگالی 1 را به صورت زیر بنویسیم :

$$f(\underset{\sim}{x}_1, \dots \underset{\sim}{x}_n) = \frac{1}{(2\pi)^{np/2} |\Sigma|^{n/2}} \cdot \exp\left\{ -tr\left[\Sigma^{-1} \left(\sum_{j=1}^{n} (\underset{\sim}{x}_j - \bar{\underset{\sim}{x}})(\underset{\sim}{x}_j - \bar{\underset{\sim}{x}})' + n(\bar{\underset{\sim}{x}} - \underset{\sim}{\mu})(\bar{\underset{\sim}{x}} - \underset{\sim}{\mu})' \right) \right] / 2 \right\}$$

عبارت حاصل به ازای مجموعه ثابتی از مشاهدات $\underset{\sim}{x}_1, \dots \underset{\sim}{x}_n$ تابع درستنمایی نامیده می‌شود بنابراین با قرار دادن مشاهدات $\underset{\sim}{x}_1, \dots \underset{\sim}{x}_n$ در چگالی توأم فوق تابع درستنمایی به صورت $\underset{\sim}{X}_1 = \underset{\sim}{x}_1, \dots \underset{\sim}{X}_n = \underset{\sim}{x}_n$

$$L(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}} |\Sigma|^{n/2}} \cdot \exp\left\{ -tr\left[\Sigma^{-1} \left(\sum_{j=1}^{n} (\underset{\sim}{x}_j - \bar{\underset{\sim}{x}})(\underset{\sim}{x}_j - \bar{\underset{\sim}{x}})' + n(\bar{\underset{\sim}{x}} - \underset{\sim}{\mu})(\bar{\underset{\sim}{x}} - \underset{\sim}{\mu})' \right) \right] / 2 \right\}$$

تابع درستنمایی تابعی از پارامترهای مجهول جامعه یعنی $\underset{\sim}{\mu}$ و Σ است .

فرض کردیم به ازای $\underset{\sim}{X}$ مقادیر ثابت $\underset{\sim}{x}$ را گذاشتیم و تابعی برحسب $\underset{\sim}{\mu}$ و Σ که مجهول اند داریم .

(۷) $\Sigma = P\Lambda P' \iff \Sigma^{-1} = P\,diag(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_p})P'$

Subject: $\Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$

Year. Month. Date. ( )

$\forall t \quad t'\Sigma t = t'P\Lambda P't > 0$

$\Rightarrow [diag(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \cdots \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}})P't]'[diag(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \cdots \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}})P't] > 0 \qquad = w'w >$

که $L(\mu, \Sigma)$ را به صورت زیر با به خواص اثر می‌نویسیم:

$$L(\mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}}|\Sigma|^{n/2}} \exp\{-\frac{1}{2} tr[\Sigma^{-1}\underbrace{\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})(x_j-\bar{x})'}_{(n-1)S}]\}$$

$\bar{x}$ و S آماره بسنده‌اند

$$\cdot \exp\{-\frac{n}{2}(\bar{x}-\mu)'\Sigma^{-1}(\bar{x}-\mu)\} \quad (۳)$$

اکنون برای بدست آوردن برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی μ و Σ، چون Σ معین مثبت است

پس Σ^{-1} نیز معین مثبت است لذا

$$(\bar{x}-\mu)'\Sigma^{-1}(\bar{x}-\mu) > 0$$

و زمانی برابر با صفر است که $\bar{x}-\mu = 0$ باشد. پس ماکسیمم تابع درستنمایی نسبت به μ در نقطه $\hat{\mu} = \bar{x}$ بدست می‌آید. اکنون تابع $L(\hat{\mu}, \Sigma)$ را نسبت به Σ ماکسیمم می‌کنیم: از ۳ و $\hat{\mu} = \bar{x}$ داریم: (از روش مشتق‌گیری)

$$L(\hat{\mu}, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}}|\Sigma|^{n/2}} \cdot \exp\{-\frac{1}{2} tr[\Sigma^{-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})(x_j-\bar{x})']\}$$

با فرض

$$A = \sum_{j=1}^{n}\underset{p\times 1}{(x_j-\bar{x})}\underset{1\times p}{(x_j-\bar{x})'}$$

$$L(\hat{\mu}, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{np/2}|\Sigma|^{n/2}} \exp\{-\frac{1}{2} tr[\Sigma^{-1}A]\}$$

اکنون نشان می‌دهیم که $l(\hat{\mu}, \Sigma) = \ln L(\hat{\mu}, \Sigma)$ یا $L(\hat{\mu}, \Sigma)$ ماکسیمم می‌شود وقتی $\Sigma = \frac{1}{n}A$ باشد یعنی

$$H: \ln L(\hat{\mu}, \frac{1}{n}A) - \ln L(\hat{\mu}, \Sigma) \geq 0$$

$$\left[-\frac{pn}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\left|\frac{1}{n}A\right|-\frac{1}{2}tr\left\{\left(\frac{1}{n}A\right)^{-1}A\right\}\right]$$

$$-\left[-\frac{pn}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln|\Sigma|-\frac{1}{2}tr(\Sigma^{-1}A)\right]$$

$$=-\frac{n}{2}\ln\left|\frac{1}{n}A\right|-\frac{np}{2}+\frac{n}{2}\ln|\Sigma|+\frac{1}{2}tr(\Sigma^{-1}A)$$

$$=-\frac{n}{2}\left\{\ln\left|\frac{1}{n}A\right|+p-\ln|\Sigma|-tr\left(\Sigma^{-1}\frac{1}{n}A\right)\right\}$$

$$=-\frac{n}{2}\left\{\ln\left|\Sigma^{-1}\frac{1}{n}A\right|+p-tr\left(\Sigma^{-1}\frac{1}{n}A\right)\right\}$$

اگر $\lambda_p \dots \lambda_1$ مقادیر ویژه $\Sigma^{-1}\frac{1}{n}A$ باشند آنگاه

$$tr\left(\Sigma^{-1}\frac{1}{n}A\right)=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i$$

(می‌دانیم اگر A یک ماتریس مربعی باشد $|A|=\prod\lambda_i$ ، $tr(A)=\sum\lambda_i$)

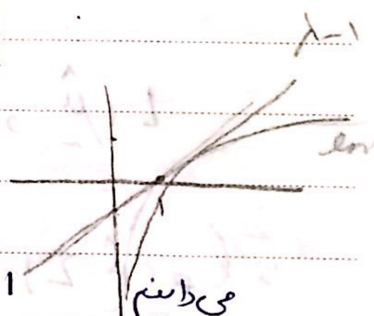
تمرین 2-12 صفحه 114

$$\left|\Sigma^{-1}\frac{1}{n}A\right|=\prod_{i=1}^{p}\lambda_i$$

داریم :

$$H=\frac{n}{2}\left\{tr\left(\Sigma^{-1}\frac{1}{n}A\right)-\ln\left|\Sigma^{-1}\frac{1}{n}A\right|-p\right\}$$

$$=\frac{n}{2}\left\{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i-\sum_{i=1}^{p}\ln\lambda_i-p\right\}$$



$$=\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{p}\cancel{[\lambda_i-\ln\lambda_i-1]}$$

$\sum\ln\lambda_i\leq\sum\lambda_i-p \longleftarrow$ پس $\ln\lambda\leq\lambda-1$ می‌دانیم

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i-p-\sum_{i=1}^{p}\ln\lambda_i\geq 0$$

$$\Rightarrow H=\ln(\hat{\mu},{}^1\!/_n A)-\ln(\hat{\mu},\Sigma)\geq 0$$

$e^{c-1} \geq c$

Subject: $\hat{\Sigma} = \frac{1}{n}\sum_{j}(\underset{\sim}{x}_j - \bar{\underset{\sim}{x}})(\underset{\sim}{x}_j - \bar{\underset{\sim}{x}})' = S_n = \frac{n-1}{n} S$

Year. Month. Date. ( ) $\hat{\mu} = \bar{\underset{\sim}{x}}$

بنابراین برآورد ماکسیمم درستنمایی برای Σ

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n} A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\underset{\sim}{x}_i - \bar{\underset{\sim}{x}})(\underset{\sim}{x}_i - \bar{\underset{\sim}{x}})' = \frac{n-1}{n} S$$

* فرض کنید A یک ماتریس معین مثبت با تجزیه طیفی $A = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i e_i'$ باشد

آن‌گاه A :

$$A = \sum \lambda_i e_i e_i' = \underset{p\times p}{P}\,\underset{p\times p}{\Lambda}\,\underset{p\times p}{P'}$$

$$PP' = P'P = I$$

$$, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{bmatrix} \qquad \lambda_i > 0$$

$$tr(A) = tr(\Lambda P P') = tr(\Lambda) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$$

$$|A| = |P\Lambda P'| = |P||\Lambda||P'| = |\Lambda|\underbrace{|I|}_{1} = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i$$

$$|PP'| = |P'||P| = |I|$$ دترمینان ماتریس قطری حاصلضرب اعضای روی قطر

اکنون به جای μ و Σ برآوردهایشان را در L می‌گذاریم :

$$L(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{np/2}|\Sigma|^{n/2}} \cdot \exp\{-\tfrac{1}{2} tr(\Sigma^{-1}\sum_{j=1}^{n}(\underset{\sim}{x}_j - \bar{\underset{\sim}{x}})(\underset{\sim}{x}_j - \bar{\underset{\sim}{x}})')\}.\exp\{-\tfrac{n}{2}(\bar{\underset{\sim}{x}} - \mu)'\Sigma^{-1}(\bar{x} - \mu)\}$$

$$L(\hat{\underset{\sim}{\mu}}, \hat{\Sigma}) = \left[\frac{1}{(2\pi)^{np/2}} \exp\left\{\frac{-np}{2}\right\}\right] \frac{1}{|\hat{\Sigma}|^{n/2}}$$

یا $|\hat{\Sigma}| = \left[\frac{n-1}{n}\right]^{p} \underbrace{|S|}$

$$L(\hat{\underset{\sim}{\mu}}, \hat{\Sigma}) = \text{ثابت} \times (\text{واریانس تعمیم یافته})^{-n/2}$$

تذکر: برآوردگر درستنمایی خاصیت ناوردایی دارند یعنی اگر $\hat{\theta}$ برآوردگر درستنمایی θ باشد
آن گاه برآوردگر ماکسیمم درستنمایی هر تابعی از θ مثل $h(\theta)$، $h(\hat{\theta})$ خواهد بود.

برآوردگر ماکسیمم درستنمایی μ از روش مشتق گیری

$$L(\mu,\Sigma) = (2\pi)^{-n/2} |\Sigma|^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} tr\left[\Sigma^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}(\underset{\sim}{x}_j-\bar{\underset{\sim}{x}})(\underset{\sim}{x}_j-\bar{\underset{\sim}{x}})'\right]\right\} \times \exp\left\{-\frac{n}{2} tr\left[\cancel{\Sigma^{-1}}(\bar{\underset{\sim}{x}}-\underset{\sim}{\mu})'\Sigma^{-1}(\bar{\underset{\sim}{x}}-\underset{\sim}{\mu})\right]\right\}$$

پس

$$\ln L(\mu,\Sigma) = \frac{-np}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln|\Sigma|$$

$$-\frac{1}{2} tr\left[\Sigma^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}(\underset{\sim}{x}_j-\bar{\underset{\sim}{x}})(\underset{\sim}{x}_j-\bar{\underset{\sim}{x}})'\right]$$

$$-\frac{n}{2} \cancel{tr}\left[\cancel{\Sigma^{-1}}(\bar{\underset{\sim}{x}}-\underset{\sim}{\mu})'\Sigma^{-1}(\bar{\underset{\sim}{x}}-\underset{\sim}{\mu})\right]$$

$$\frac{\partial\, x'Ax}{\partial x} = 2Ax$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\Sigma)}{\partial \mu} = -\frac{n}{2} 2\Sigma^{-1}(\bar{\underset{\sim}{x}}-\underset{\sim}{\mu}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\mu} = \bar{x}$$

توزیع نمونه ای $\bar{\underset{\sim}{x}}$ و S

$$\bar{x} = \frac{1}{n} X \underset{\sim}{1} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \\ x_{p1} & \cdots & x_{pn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_p\end{bmatrix}$$

$$(n-1)S = X H X' \qquad H = I - \frac{1}{n}J$$

n تا نمونه

$$X = \begin{array}{c} \\ \\ p \end{array} \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix}_{p\times n} = [\underset{\sim}{x}_1 \cdots \underset{\sim}{x}_n]$$

$$\underset{\sim}{\bar{x}} = \frac{1}{n} X \underset{\sim}{1} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ & & \vdots \\ x_{p1} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}$$

$$(n-1)S = X H X' \qquad H = I - \frac{1}{n} J$$

if $p=1$ $\quad X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

بطور مشابه

دیدیم

if $p \geq 2 \Rightarrow \underset{\sim}{\bar{X}} \sim N(\underset{\sim}{\mu}, \frac{1}{n}\Sigma)$

$$\begin{cases} E(\bar{X}) = \mu \\ V(\bar{X}) = \Sigma/n \end{cases}$$

و نشان دادیم $(n-1)S \sim W_p(\Sigma, n-1)$ دارد.

توزیع ویشارت:

فرض کنید که ماتریس $X_{p\times n}$ از توزیع $N_p(\underset{\sim}{0}, \Sigma)$ باشد آنگاه تعریف میکنیم:

($X_1 \ldots X_n$ نمونه تصادفی)

$$\underset{p\times p}{M} = \underset{p\times n}{X}\,\underset{n\times p}{X'} \sim W_p(\Sigma, n)$$

درجه آزادی

ابعاد ماتریس Σ

۱) اگر $M \sim W_p(\Sigma, n)$ آنگاه $E(M) = n\Sigma$

۲) اگر M_i ، $i=1,\ldots,k$ مستقل و دارای توزیع $W_p(\Sigma, n_i)$ باشند آنگاه

$$\sum_{i=1}^{k} M_i \sim W_p(\Sigma, n) \quad , \quad n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

۳) چگالی $W_p(\Sigma, n)$ به صورت زیر است

$$f(M) = \frac{|M|^{\frac{1}{2}(n-p-1)} \exp\{-\frac{1}{2} tr(M\Sigma^{-1})\}}{2^{np/2} \pi^{\frac{p(p-1)}{4}} |\Sigma|^{n/2} \prod_{i=1}^{p} \Gamma\{\frac{n+1-i}{2}\}}$$

قضیه: اگر $M \sim W_p(\Sigma, n)$ و $B_{p\times q}$ پس توزیع $B'MB$

به صورت $W_q(B'\Sigma B, n)$ است

اثبات: $W = \cancel{M'} = B'MB = B'(XX')B = (X'B)'(X'B)$

$= (B'X)(B'X)'$

$X \sim N(0, \Sigma) \Rightarrow B'X \sim N(0, B'\Sigma B)$

$W = (B'X)(B'X)' \sim W_q(B'\Sigma B, n)$

(مارديا)

قضیه: اگر $M \sim W_p(\Sigma, m)$ ، $a \in R^p$ با $a'\Sigma a \neq 0$ آنگاه

(اثبات از قضیه ۱)

$$\frac{a'\Sigma^{-1}a}{a'M^{-1}a} \sim \chi^2_{m-p+1} \quad , \quad \frac{a'Ma}{a'\Sigma a} \sim \chi^2_m$$

(مارديا)

قضیه: فرض کنید $X_{p\times n}$ ماتریس داده از $N_p(0, \Sigma)$ باشد و $C_{n\times n}$ یک

ماتریس متقارن است آنگاه:

a) $X'C_{n\times n}X'$ دارای توزیع ویشارت خواهد بود اگر و تنها اگر ~~$C^2 = C$~~ C خودتوان باشد

$$X'CX' \sim W_p(\Sigma, r)$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 1$

$\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0 \leftarrow r = rank(C) = tr(C)$

چون C خودتوان

b) XCX' توزیعی مشابه مجموع وزنی ماتریس‌هایی از توزیع ویشارت مستقل از هم هر یک با درجه

آزادی ۱ باشد $XCX' = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i M_i \quad , M_i \sim W_p(\Sigma, 1)$

$rank(C) = r$ ، $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_r > 0$ ، $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$

۲۰

$X_{p\times n} \sim N_p(0, \Sigma)$ $C_{n\times n}$ $XCX' \sim W_p(\Sigma, r)$

خودتوان

Subject:

Year. Month. Date. ( )

ویژگی

نتیجه: اگر $X \sim N_p(0, \Sigma)$ آنگاه

$$(n-1)S \sim W_p(\Sigma, n-1)$$

چون:

$$(n-1)S = \underbrace{X H X'}_{p\times p} \qquad H = I_n - \frac{1}{n}J_n \qquad HH = H$$

$$r(H) = n-1$$

نکته: اگر M_1 و M_2 ~~M_1~~ مستقل و

$$M_1 \sim W_p(\Sigma, n_1)$$
$$M_2 \sim W_p(\Sigma, n_2)$$

آنگاه:

$$M = M_1 + M_2 \sim W_p(\Sigma, n_1+n_2)$$

اثبات:

مستقل
$$\begin{cases} X_{1(p\times n_1)} \sim N(\underset{\sim}{0}, \Sigma) \longrightarrow M_1 = X_1X_1' \sim W_p(\Sigma, n_1) \\ X_{2(p\times n_2)} \sim N(\underset{\sim}{0}, \Sigma) \longrightarrow M_2 = X_2X_2' \sim W_p(\Sigma, n_2) \end{cases}$$

$$n = n_1+n_2 \quad X_{p\times n} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim W_p(\Sigma, n) \qquad \left\{ \begin{array}{l} XX' = X_1X_1' + X_2X_2' \\ \hookrightarrow W_p(\Sigma, n) \end{array} \right\} \Rightarrow W_p(\Sigma, n_1+n_2)$$

توزیع T^2 هتلینگ:

$$\text{if} \quad p=1 \quad \text{مستقل} \begin{cases} u \sim N(0,1) \\ v \sim \chi^2_{(m)} \end{cases} \qquad t = \frac{u}{\sqrt{v/m}} \sim t_{(m)}$$

$$t^2_{(m)} = \frac{u^2}{v/m} = m\,u\,v^{-1}u \sim F_{(1,m)}$$

$$\text{if} \quad p \geq 2 \quad \text{مستقل} \begin{cases} \underset{\sim}{u} \sim N_p(\underset{\sim}{0}, I) \\ \underset{\sim}{v} \sim W_p(I, n) \end{cases} \Rightarrow T^2 = n\,\underset{1\times p}{\underset{\sim}{u}'}\,\underset{p\times p}{v^{-1}}\,\underset{p\times 1}{\underset{\sim}{u}} \sim T^2(p, n)$$

ماتریس

به عبارت دیگر توزیع T^2 هتلینگ (Hotelling) تعمیمی از توزیع t استودنت است.
همین ترتیب.

$$\text{مستقل}\begin{cases} \underset{\sim}{u} \sim N_p(\underset{\sim}{0}, \Sigma) \\ V \sim W_p(\Sigma, n) \end{cases} \Rightarrow T^2 = n\, \underset{\sim}{u}'\, V^{-1}\, \underset{\sim}{u} \sim T^2(p,n)$$

قضیه: اگر $\underset{\sim}{X} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ مستقل از $M \sim W_p(\Sigma, n)$ باشد آن گاه

$$n\,\underset{1\times p}{(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})'}\;\underset{p\times p}{M^{-1}}\;\underset{p\times 1}{(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})} \sim T^2(p,n)$$

نتیجه: اگر $\bar{X}$ میانگین نمونه استخراج شده از $N_p(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ باشد و S ماتریس کوواریانس نمونه باشد آن گاه،

$$\begin{cases} \bar{\underset{\sim}{X}} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}, \frac{\Sigma}{n}) \\ (n-1)S \sim W(\Sigma, n-1) \end{cases} n\,(\bar{\underset{\sim}{X}}-\underset{\sim}{\mu})'\,\underset{p\times p}{S^{-1}}\,(\bar{\underset{\sim}{X}}-\underset{\sim}{\mu}) \sim T^2(p, n-1)$$

اثبات:

$$X_{p\times n} \sim N(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma) \rightarrow \begin{cases} (n-1)S \sim W_p(\Sigma, n-1) \\ \bar{X} \sim N(\underset{\sim}{\mu}, \frac{1}{n}\Sigma) \Rightarrow \end{cases}$$

$$\sqrt{n}\,(\bar{\underset{\sim}{X}}-\underset{\sim}{\mu}) \sim N(\underset{\sim}{0}, \Sigma)$$

$$\Rightarrow (n-1)\,(\sqrt{n}\,(\bar{\underset{\sim}{X}}-\underset{\sim}{\mu}))'\,[(n-1)S]^{-1}\,(\sqrt{n}\,(\bar{\underset{\sim}{X}}-\underset{\sim}{\mu}))$$

$$\Rightarrow T^2 = n\,(\bar{\underset{\sim}{X}}-\underset{\sim}{\mu})'\,S^{-1}\,(\bar{\underset{\sim}{X}}-\underset{\sim}{\mu}) \sim T^2(p, n-1)$$

نتیجه صفحه بعد ←

قضیه: رابطه بین T^2 و توزیع فیشر به صورت زیر است

$$T^2(p,n) = \frac{np}{n-p+1}\,F_{p,\,n-p+1}$$

$$\frac{(n-1)(p-1)}{(n-1)-p}$$

$$\Rightarrow \underbrace{n\,(\bar{\underset{\sim}{X}}-\underset{\sim}{\mu})'\,S^{-1}\,(\bar{\underset{\sim}{X}}-\underset{\sim}{\mu})}_{T^2(p,\,n-1)} \sim \frac{(n-1)p}{n-p}\,F_{p,\,n-p}$$

$$T^2(p,n) = \frac{np}{n-p+1} F_{p,n-p+1}$$

اثبات

مستقل $\underset{\sim}{d} \sim N_p(\underset{\sim}{0}, I)$

$M \sim W_p(I,n)$ $\qquad n\underset{\sim}{d}' M^{-1} \underset{\sim}{d} \sim T^2(p,n)$

$$n\underset{\sim}{d}' M^{-1}\underset{\sim}{d} = \frac{n\underset{\sim}{d}' M^{-1}\underset{\sim}{d}}{\underset{\sim}{d}'\underset{\sim}{d}} \cdot \underset{\sim}{d}'\underset{\sim}{d} = n \frac{\underset{\sim}{d}'\underset{\sim}{d}}{\frac{\underset{\sim}{d}'\underset{\sim}{d}}{\underset{\sim}{d}' M^{-1}\underset{\sim}{d}}}$$

$$\frac{\underset{\sim}{d}'\underset{\sim}{d}}{\underset{\sim}{d}' M^{-1}\underset{\sim}{d}} \sim \chi^2_{n-p+1}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{\underset{\sim}{d}' M^{-1}\underset{\sim}{d}}{\underset{\sim}{d}'\underset{\sim}{d}}\right)^{-1} \sim \chi^2_{n-p+1} \\ \underset{\sim}{d}'\underset{\sim}{d} \sim \chi^2_p \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{a'\Sigma^{-1}a}{a'M^{-1}a} \sim \chi^2_{m-p+1} \\ M \sim W_p(\Sigma, m) \end{array}\right.$$

$$n\underset{\sim}{d}' M^{-1}\underset{\sim}{d} = n\frac{\chi^2_p}{\chi^2_{n-p+1}} = n\frac{\chi^2_p / p}{\chi^2_{n-p+1}/(n-p+1)} \times \frac{p}{n-p+1}$$

$$= \frac{np}{n-p+1} F_{p,n-p+1}$$

قانون اعداد بزرگ و قضیه حد مرکزی :

قانون اعداد بزرگ : اگر $Y_1, \dots, Y_n$ مشاهدات مستقل از یک جامعه با $E(Y_i)=\mu$ باشد در این صورت

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{Y}-\mu| > \varepsilon) = 0 \qquad \bar{Y} \xrightarrow{P} \mu$$

$$\cancel{\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(|\bar{Y}-\mu| < \varepsilon) = 1}$$

نتیجه ۱: اگر $X = [X_1 \; ... \; X_n]$ نمونه‌ای از یک توزیع با میانگین μ و واریانس Σ باشند آن گاه $\bar{X}$ و S در احتمال به μ و Σ همگرا هستند.

برای اثبات کافیست نشان دهیم که i امین درایه از $\bar{X}$ و (i,j) امین درایه از S به μ_i و σ_{ij} همگرا هستند یعنی

$$\begin{cases} \bar{X}_i \xrightarrow{P} \mu \\ S_{ij} \xrightarrow{P} \sigma_{ij} \end{cases}$$

قضیه حد مرکزی: اگر $X_1, \dots, X_n$ مشاهدات مستقل از جامعه با میانگین μ و کواریانس متناهی Σ باشند آن گاه برای نمونه‌ای با حجم بزرگ

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)$$

دارای توزیع تقریبی $N_p(0, \Sigma)$ است و

$\cancel{S \xrightarrow{P} \Sigma}$

$\cancel{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}$ $\quad n(\bar{X} - \mu)' S^{-1} (\bar{X} - \mu) \approx \chi^2_p$

چند نکته:

۱) اگر $X \sim N_p(0, \sigma^2 I_p)$ آن گاه

$$\frac{1}{\sigma^2} X' X = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{p} x_i^2 \sim \chi^2_p$$

۲) $X \sim N_p(\mu, \sigma^2 I_p)$ آن گاه

$$\frac{1}{\sigma^2} X' X \sim \chi^2_p \left(\frac{1}{\sigma^2} \mu' \mu\right)$$

۳) اگر $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ آن گاه:

$$X - \mu \sim N(0, \Sigma) \Rightarrow \Sigma^{-1/2}(X - \mu) \sim N(0, I_p)$$

Z

$$\xrightarrow{\text{از نتیجه ۱}} (X - \mu)' \Sigma^{-1} (X - \mu) \sim \chi^2_p$$

Subject:

Year. , Month. Date. ( )

۴) اگر $\underset{\sim}{X} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ آن گاه

غیرمرکزی

$$\underset{\sim}{X}'\Sigma^{-1}\underset{\sim}{X} \sim \chi^2_p(\underbrace{\underset{\sim}{\mu}'\Sigma\underset{\sim}{\mu}}_{\text{پارامتر غیرمرکزی}})$$

۵) اگر $\underset{\sim}{X} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}, I_p)$ آن گاه $\underset{\sim}{X}'A\underset{\sim}{X} \sim \chi^2_r(\underset{\sim}{\mu}'A\underset{\sim}{\mu})$

اگر و تنها اگر A خودتوان باشد و $rank(A)=r$

تمرین ۱: فرض کنید $\underset{\sim}{X}_{p\times 1}$ بردار تصادفی با میانگین $\underset{\sim}{\mu}$ و ماتریس کوواریانس Σ باشد. نشان دهید

$$E(\underset{\sim}{X}'A\underset{\sim}{X}) = tr(A\Sigma) + \underset{\sim}{\mu}'A\underset{\sim}{\mu}$$

$$E(\underset{\sim}{X}'A\underset{\sim}{X}) = E(tr(X'AX)) = E(tr(AXX'))$$

$$= tr(A\,E(XX')) = tr(A(\Sigma + \underset{\sim}{\mu}\underset{\sim}{\mu}'))$$

$$= tr(A\Sigma) + tr(A\underset{\sim}{\mu}\underset{\sim}{\mu}') = tr(A\Sigma) + \underset{\sim}{\mu}'A\underset{\sim}{\mu}$$

تمرین ۲. ثابت کنید $\Sigma_{1.2}$ معین مثبت است.

می دانیم Σ معین مثبت است پس

$$\forall t \quad \underset{\sim}{t}'\overset{PAP'}{\Sigma}\underset{\sim}{t} > 0 \Rightarrow (t_1' \;\; 0)\begin{pmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_1\\ 0\end{pmatrix} = t_1'\Sigma_{11}t_1$$

$$\begin{bmatrix} I & -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0\\ -\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} & I\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} & 0\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0\\ -\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} & I\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} & 0\\ 0 & \Sigma_{22}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

تمرین ۳) فرض کنید $\underset{\sim}{X} \sim N_4(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ که در آن

$$\underset{\sim}{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \underset{\sim}{\mu} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

الف) توزیع $\begin{pmatrix} X_2 \\ X_4 \end{pmatrix}$ ، $X_1 - X_4$ ، ~~$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_4 \end{pmatrix}$ به شرط X_3 و~~

$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_4 \end{pmatrix}$ به شرط $X_3 + X_2 = y$ را بدست آورید.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 4} \underset{\sim}{X}_{4\times 1} = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_4 \end{pmatrix}_{2\times 1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{1\times 4} \underset{\sim}{X}_{4\times 1} = X_1 - X_4$$

$$\begin{pmatrix} \underset{\sim}{X}_1 \\ \underset{\sim}{X}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_4 \end{pmatrix} \\ X_2 + X_3 \end{pmatrix} = A\underset{\sim}{X}$$

توزیع $A\underset{\sim}{X}$ را بدست می‌آوریم.

$$A\underset{\sim}{X} \sim N_3\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 11 \end{pmatrix} \right)$$

از روی توزیع شرطی $\underset{\sim}{X}_1 \mid \underset{\sim}{X}_2$ روابط را می‌نویسیم.

— تجزیه طیفی داریم

— نحوهٔ $\bar{X}$ و S

— استقلال