۱-۵ توصیه های نهایی

ما کوشش کردیم تا مطالعهٔ تجزیه و تحلیل چندمتغیری را دارای انگیزه کنیم و برای شما روشهای مقدماتی ولی مهم سازماندهی و خلاصه کردن داده ها را فراهم نماییم . علاوه بر این یک مفهوم کلی فاصله را ارائه دادیم که در فصول بعد به دفعات از آن استفاده خواهیم نمود .

تمرینها

۱.۱ هفت زوج از اندازه های (x_1, x_2) که در شکل ۱-۱ رسم شده اند را در نظر می گیریم .

x_1	3	4	2	6	8	2	5
x_2	5	5.5	4	7	10	5	7.5

میانگینهای نمونه $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ ، واریانسهای نمونه s_{11} و s_{22} و کوواریانس نمونهٔ s_{12} را محاسبه کنید .

۲.۱ یک روزنامهٔ صبح قیمت اتومبیلهای دست دوم زیر را برای یک پیمان خارجی که در آن سن x_1 برحسب سال و قیمت فروش برحسب هزارها دلار است ، فهرست کرده است :

x_1	3	5	5	7	7	7	8	9	10	11
x_2	2.30	1.90	1.00	.70	.30	1.00	1.05	.45	.70	.30

(الف) یک نمودار پراکنش داده ها و نمودارهای نقطه ای حاشیه ای را بسازید .

(ب) علامت کوواریانس نمونه s_{12} را در نمودار پراکنش حدس بزنید .

(ج) میانگینهای نمونه $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ و واریانسهای نمونه s_{11} و s_{22} را محاسبه کنید . کوواریانس نمونهٔ s_{12} و ضریب همبستگی نمونه r_{12} را محاسبه کنید . این کمیتها را تعبیر و تفسیر کنید .

(د) با استفاده از (۱-۸) میانگین نمونهٔ $\bar{x}$ ، آرایهٔ واریانس ـ کوواریانس نمونهٔ S_n و آرایهٔ همبستگی نمونهٔ **R** را مشخص کنید .

۳.۱ پنج اندازه روی متغیرهای x_1 ، x_2 و x_3 داده شده است ،

x_1	9	2	6	5	8
x_2	12	8	6	4	10
x_3	3	4	0	2	1

آرایه های $\bar{\mathbf{x}}$ ، $\mathbf{S}_n$ و **R** را پیدا کنید .

۴.۱ داده های زیر مربوط به ده شرکت از بزرگترین شرکتهای صنعتی آمریکا است

(الف) نمودار پراکنش و نمودارهای نقطه ای حاشیه ای را برای متغیرهای x_1 و x_2 رسم کنید . در مورد این نمودارها نظر خود را بنویسید :

ب ـ $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ ، s_{11} ، s_{22} ، s_{12} و r_{12} را محاسبه کنید . r_{12} را تعبیر و تفسیر کنید .

نام شرکت	دارایی = x_1 (میلیونها دلار)	درآمد خالص = x_2 (میلیونها دلار)	انصاف صاحب سهام = x_3 (میلیونها دلار)
جی . ام	۲۶/۷	۳/۳	۱۵/۸
اگزون	۳۸/۴	۲/۴	۱۹/۵
فورد	۱۹/۲	۱/۷	۸/۴
موبایل	۲۰/۶	۱/۰	۸/۲
تکزاکو	۱۸/۹	۰/۹	۹/۴
نفت اسی تی دی	۱۴/۸	۱/۰	۷/۶
آی . بی . ام	۱۹/۰	۲/۷	۱۲/۶
گُلف	۱۴/۲	۰/۸	۷/۳
جی . ای	۱۳/۷	۱/۱	۵/۹
کریسلر	۷/۷	۰/۲	۲/۹

۵.۱ با استفاده از داده های تمرین ۱-۴

(الف) نمودارهای پراکنش و نقطه ای را برای (x_2 , x_3) و (x_1 , x_2) رسم کنید . در مورد طرحهای حاصله نظر بدهید .

(ب) آرایه های $\bar{x}$ ، S_n و R برای (x_1 , x_2 , x_3) محاسبه کنید .

۶.۱ داده های جدول ۱-۲ چهل و دو اندازهٔ مربوط به متغیرهای آلودگی هواست که درساعت دوازده ظهر در ناحیهٔ لوس آنجلوس در روزهای مختلف ثبت شده اند .

(الف) نمودارهای نقطه ای حاشیه ای را برای تمام متغیرها رسم کنید .

(ب) آرایه های $\bar{x}$ ، S_n و R را تشکیل دهید و درایه های R را تعبیر و تفسیر کنید .

۷.۱ به شما $n = 3$ مشاهده روی $p = 2$ متغیر داده شده است :

متغیر ۱ : $x_{11} = 2 \quad x_{12} = 3 \quad x_{13} = 4$

متغیر ۲ : $x_{21} = 1 \quad x_{22} = 2 \quad x_{23} = 4$

(الف) زوجهای مشاهدات را در «فضای متغیر» دوبُعدی رسم کنید . یعنی یک نمودار پراکنش دوبُعدی از داده ها را تشکیل دهید .

(ب) داده ها را به صورت دو نقطه در «فضای اقلام» سه بُعدی رسم کنید .

۸.۱ فاصلهٔ نقطهٔ $P = (-1, -1)$ تا نقطهٔ $Q = (1, 0)$ را با استفاده از فرمول فاصلهٔ اقلیدسی (۱-۱۲) با $p = 2$ و با استفاده از فاصلهٔ آماری (۱-۲۰) با $a_{11} = \frac{1}{3}$ ، $a_{22} = \frac{4}{27}$ و $a_{12} = \frac{1}{9}$ محاسبه کنید . مکان هندسی نقاطی را که دارای فاصلهٔ آماری ثابت ۱ از نقطهٔ Q است ، رسم کنید .

۹.۱ هشت زوج اندازه را روی دو متغیر x_1 و x_2 که در زیر آمده است در نظر بگیرید .

x_1	−6	−3	−2	1	2	5	6	8
x_2	−2	−3	1	−1	2	1	5	3

(الف) داده هارا به صورت یک نمودارپراکنش رسم کنید و s_{11} ، s_{22} و s_{12} را محاسبه کنید .

(ب) با استفاده از (۱-۱۸) اندازه های متناظر روی متغیرهای $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ را با فرض این که محورهای مختصات اولیه به اندازهٔ زاویهٔ $\theta = 26^\circ$ دوران کرده باشند را محاسبه کنید [می دانیم که $\cos(26^\circ) = 0.899$ و $\sin(26^\circ) = 0.438$] .

ج - با استفاده از اندازه های $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ داده شدهٔ (ب) واریانسهای نمونه $\tilde{s}_{11}$ و $\tilde{s}_{22}$ را محاسبه کنید .

Scanned with CamScanner

جدول ۱-۲ داده‌های مربوط به آلودگی هوا

باد (x_1)	اشعهٔ خورشیدی (x_2)	CO (x_3)	NO (x_4)	NO_2 (x_5)	O_3 (x_6)	HC (x_7)
۸	۹۸	۷	۲	۱۲	۸	۲
۷	۱۰۷	۴	۳	۹	۵	۳
۷	۱۰۳	۴	۳	۵	۶	۳
۱۰	۸۸	۵	۲	۸	۱۵	۴
۶	۹۱	۴	۲	۸	۱۰	۳
۸	۹۰	۵	۲	۱۲	۱۲	۴
۹	۸۴	۷	۴	۱۲	۱۵	۵
۵	۷۲	۶	۴	۲۱	۱۴	۴
۷	۸۲	۵	۱	۱۱	۱۱	۳
۸	۶۴	۵	۲	۱۳	۹	۴
۶	۷۱	۵	۴	۱۰	۳	۳
۶	۹۱	۴	۲	۱۲	۷	۳
۷	۷۲	۷	۴	۱۸	۱۰	۳
۱۰	۷۰	۴	۲	۱۱	۷	۳
۱۰	۷۲	۴	۱	۸	۱۰	۳
۹	۷۷	۴	۱	۹	۱۰	۳
۸	۷۶	۴	۱	۷	۷	۳
۸	۷۱	۵	۳	۱۶	۴	۴
۹	۶۷	۴	۲	۱۳	۲	۳
۹	۶۹	۳	۳	۹	۵	۳
۱۰	۶۲	۵	۳	۱۴	۴	۴
۹	۸۸	۴	۲	۷	۶	۳
۸	۸۰	۴	۲	۱۳	۱۱	۴
۵	۳۰	۳	۳	۵	۲	۳
۶	۸۳	۵	۱	۱۰	۲۳	۴
۸	۸۴	۳	۲	۷	۶	۳
۶	۷۸	۴	۲	۱۱	۱۱	۳
۸	۷۹	۲	۱	۷	۱۰	۳
۶	۶۲	۴	۳	۹	۸	۳
۱۰	۳۷	۳	۱	۷	۲	۳
۸	۷۱	۴	۱	۱۰	۷	۳
۷	۵۲	۴	۱	۱۲	۸	۴
۵	۴۸	۶	۵	۸	۲۴	۳
۶	۷۵	۴	۱	۱۰	۲۴	۳
۱۰	۳۵	۴	۱	۶	۹	۲
۸	۸۵	۴	۱	۹	۱۰	۲
۵	۸۶	۳	۱	۶	۱۲	۲
۵	۸۶	۷	۲	۱۳	۱۸	۲
۷	۷۹	۷	۴	۹	۲۵	۳
۷	۷۹	۵	۲	۸	۶	۲
۶	۶۸	۶	۲	۱۱	۱۴	۳
۸	۴۰	۴	۳	۶	۵	۲

منبع : داده‌های پروفسور جی . سی . تیائو

جدول ۱-۳ داده‌های مربوط به بیماری MS

داده‌های مربوط به گروهی که MS ندارند

شمارهٔ مورد	x_1 (سن)	x_2 (S1L + S1R)	x_3 (S1L + S1R)	x_4 (S1L + S1R)	x_5 (S1L + S1R)
۱/	۱۸/	۱۵۲/۰	۱/۶	۱۹۸/۴	/۰
۲/	۱۹/	۱۳۸/۰	/۴	۱۸۰/۸	۱/۶
۳/	۲۰/	۱۴۴/۰	/۰	۱۸۶/۴	/۸
۴/	۲۰/	۱۴۳/۶	۳/۲	۱۹۴/۸	/۰
۵/	۲۰/	۱۴۸/۸	/۰	۲۱۷/۶	/۰
۶/	۲۱/	۱۴۱/۶	/۸	۱۸۱/۶	/۸
۷/	۲۱/	۱۳۶/۰	۱/۶	۱۸۰/۰	/۸
۸/	۲۱/	۱۳۷/۶	۱/۶	۱۸۵/۶	۳/۲
۹/	۲۲/	۱۴۰/۴	۳/۲	۱۸۲/۰	۳/۲
۱۰/	۲۲/	۱۳۷/۲	/۰	۱۸۱/۸	/۰
۱۱/	۲۲/	۱۲۵/۴	۱/۰	۱۶۹/۲	/۰
۱۲/	۲۲/	۱۴۲/۴	۴/۸	۱۸۵/۶	/۰
۱۳/	۲۲/	۱۵۰/۴	/۰	۲۱۴/۴	۳/۲
۱۴/	۲۲/	۱۴۵/۶	۱/۶	۲۰۳/۶	۵/۲
۱۵/	۲۳/	۱۴۷/۲	۳/۲	۱۹۶/۸	۱/۶
۱۶/	۲۳/	۱۳۹/۲	۱/۶	۱۷۹/۲	/۰
۱۷/	۲۴/	۱۶۹/۶	۰/	۲۰۴/۸	/۰
۱۸/	۲۴/	۱۳۹/۲	۱/۶	۱۷۶/۰	۳/۲
۱۹/	۲۴/	۱۵۳/۶	/۰	۲۱۲/۰	/۸
۲۰/	۲۵/	۱۴۶/۸	/۰	۱۹۴/۸	۳/۲
۲۱/	۲۵/	۱۳۹/۲	۱/۶	۱۹۸/۴	۳/۲
۲۲/	۲۵/	۱۳۶/۰	۱/۶	۱۸۱/۶	۲/۴
۲۳/	۲۶/	۱۳۸/۸	۱/۶	۱۹۱/۶	/۰
۲۴/	۲۶/	۱۵۰/۴	/۰	۲۰۵/۲	/۴
۲۵/	۲۶/	۱۳۹/۰	۱/۴	۱۷۸/۶	/۲
۲۶/	۲۷/	۱۳۳/۸	/۲	۱۸۰/۸	/۰
۲۷/	۲۷/	۱۳۹/۰	۱/۸	۱۹۰/۴	۱/۶
۲۸/	۲۸/	۱۳۶/۰	۱/۶	۱۹۳/۲	۳/۶
۲۹/	۲۸/	۱۴۶/۴	/۸	۱۹۵/۶	۲/۸
۳۰/	۲۹/	۱۴۵/۲	۴/۸	۱۹۴/۲	۳/۸
۳۱/	۲۹/	۱۴۶/۴	/۸	۲۰۸/۲	/۲
۳۲/	۲۹/	۱۳۸/۰	۲/۸	۱۸۱/۲	/۴
۳۳/	۳۰/	۱۴۸/۸	۱/۶	۱۹۶/۴	۱/۶
۳۴/	۳۱/	۱۳۷/۲	/۰	۱۸۴/۰	/۰
۳۵/	۳۱/	۱۴۷/۲	/۰	۱۹۷/۶	/۸

ادامهٔ جدول ۱-۳

داده های مربوط به گروهی که MS ندارند

شمارهٔ مورد	x_1 (سن)	x_2 (SIL + SIR)	x_3 (SIL + SIR)	x_4 (SIL + SIR)	x_5 (SIL + SIR)
۳۶/	۳۲/	۱۴۴/۰	/۰	۱۸۵/۸	/۲
۳۷/	۳۲/	۱۵۶/۰	/۰	۱۹۲/۸	۲/۴
۳۸/	۳۴/	۱۳۷/۰	/۲	۱۸۲/۴	/۰
۳۹/	۳۵/	۱۴۳/۲	۲/۴	۱۸۴/۰	۱/۶
۴۰/	۳۶/	۱۴۱/۶	/۸	۱۸۷/۲	۱/۶
۴۱/	۳۷/	۱۵۲/۰	۱/۶	۱۸۹/۲	۲/۸
۴۲/	۳۹/	۱۵۷/۴	۳/۴	۲۲۷/۰	۲/۶
۴۳/	۴۰/	۱۴۱/۴	/۶	۲۰۹/۲	۱/۶
۴۴/	۴۲/	۱۵۶/۰	۲/۴	۱۹۵/۲	۳/۲
۴۵/	۴۳/	۱۵۰/۴	۱/۶	۱۸۰/۰	/۸
۴۶/	۴۳/	۱۴۲/۴	۱/۶	۱۸۸/۸	/۰
۴۷/	۴۶/	۱۵۸/۰	۲/۰	۱۹۲/۰	۳/۲
۴۸/	۴۸/	۱۳۰/۰	۳/۶	۱۹۰/۰	/۴
۴۹/	۴۹/	۱۵۲/۲	۱/۴	۲۰۰/۰	۴/۸
۵۰/	۴۹/	۱۵۰/۰	۳/۲	۲۰۶/۶	۲/۲
۵۱/	۵۰/	۱۴۶/۴	۲/۴	۱۹۱/۶	۲/۸
۵۲/	۵۴/	۱۴۶/۰	۱/۲	۲۰۳/۲	۱/۶
۵۳/	۵۵/	۱۴۰/۸	/۰	۱۸۴/۰	۱/۶
۵۴/	۵۶/	۱۴۰/۴	/۴	۲۰۳/۲	۱/۶
۵۵/	۵۶/	۱۵۵/۸	۳/۰	۱۸۷/۸	۲/۶
۵۶/	۵۶/	۱۴۱/۶	/۸	۱۹۶/۸	۱/۶
۵۷/	۵۷/	۱۴۴/۸	/۸	۱۸۸/۰	/۸
۵۸/	۵۷/	۱۴۶/۸	۳/۲	۱۹۱/۶	/۰
۵۹/	۵۹/	۱۷۶/۸	۲/۴	۲۳۲/۸	/۸
۶۰/	۶۰/	۱۷۱/۰	۱/۸	۲۰۲/۰	۳/۶
۶۱/	۶۰/	۱۶۳/۲	/۰	۲۲۴/۰	/۰
۶۲/	۶۰/	۱۷۱/۶	۱/۲	۲۱۳/۸	۳/۴
۶۳/	۶۰/	۱۴۶/۴	۴/۰	۲۰۳/۲	۴/۸
۶۴/	۶۲/	۱۴۶/۸	۳/۶	۲۰۱/۶	۳/۲
۶۵/	۶۷/	۱۵۴/۴	۲/۴	۲۰۵/۲	۶/۰
۶۶/	۶۹/	۱۷۱/۲	۱/۶	۲۱۰/۴	/۸
۶۷/	۷۳/	۱۵۷/۲	/۴	۲۰۴/۸	/۰
۶۸/	۷۴/	۱۷۵/۲	۵/۶	۲۳۵/۶	/۴
۶۹/	۷۹/	۱۵۵/۰	۱/۴	۲۰۴/۴	/۰

داده های مربوط به گروهی که MS ندارند

شمارهٔ مورد	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
۱/	۲۳/	۱۴۸/۰	/۸	۲۰۵/۴	/۶
۲/	۲۵/	۱۹۵/۲	۳/۲	۲۰۹/۸	۱۲/۲
۳/	۲۵/	۱۵۸/۰	۸/۰	۱۹۸/۴	۱۰/۶
۴/	۲۸/	۱۳۴/۴	/۰	۱۹۸/۴	۱۰/۶
۵/	۲۹/	۱۹۰/۲	۱۴/۲	۲۴۳/۸	۳۱/۲
۶/	۲۹/	۱۶۰/۴	۱۸/۴	۲۲۲/۸	۸۳/۰
۷/	۳۱/	۲۲۷/۸	۹۰/۲	۲۷۰/۲	۵/۲
۸/	۳۴/	۲۱۱/۰	۳/۰	۲۵۰/۸	۱۱/۲
۹/	۳۵/	۲۰۴/۸	۱۲/۸	۲۵۴/۴	۲۱/۶
۱۰/	۳۶/	۱۴۱/۲	۶/۸	۱۹۴/۴	۲/۶
۱۱/	۳۹/	۱۵۷/۴	۳/۴	۲۲۷/۰	/۰
۱۲/	۴۲/	۱۶۶/۴	/۰	۲۲۶/۰	۴۰/۸
۱۳/	۴۳/	۱۹۱/۸	۳۵/۴	۲۴۳/۶	/۰
۱۴/	۴۴/	۱۵۶/۸	/۰	۲۰۳/۲	۲۴/۸
۱۵/	۴۴/	۲۰۲/۸	۲۹/۲	۲۴۶/۴	۴۶/۴
۱۶/	۴۴/	۱۶۵/۲	۱۸/۴	۲۵۴/۰	۸/۸
۱۷/	۴۵/	۱۶۲/۰	۵/۶	۲۲۴/۴	۴/۰
۱۸/	۴۵/	۱۳۸/۴	/۸	۱۷۶/۸	/۰
۱۹/	۴۵/	۱۵۸/۴	۱/۶	۲۱۴/۴	۶/۰
۲۰/	۴۶/	۱۵۵/۴	۱/۸	۲۰۱/۲	/۶
۲۱/	۴۶/	۲۱۴/۸	۹/۲	۲۹۰/۶	۷/۶
۲۲/	۴۷/	۱۸۵/۰	۱۹/۰	۲۷۴/۴	/۰
۲۳/	۴۸/	۲۳۶/۰	۲۰/۰	۳۲۸/۰	۳۳/۶
۲۴/	۵۷/	۱۷۰/۸	۲۴/۰	۲۲۸/۴	۱۵/۶
۲۵/	۵۷/	۱۶۵/۶	۱۶/۸	۲۲۹/۲	۶/۰
۲۶/	۵۸/	۲۳۸/۴	۸/۰	۳۰۴/۴	/۸
۲۷/	۵۸/	۱۶۴/۰	/۸	۲۱۶/۸	۱/۶
۲۸/	۵۸/	۱۶۹/۸	/۰	۲۱۹/۲	۱/۰
۲۹/	۵۹/	۱۹۹/۸	۴/۶	۲۵۰/۲	

منبع : داده های دکتر جی . جی . سیلسیا .

جدول ۱-۴ داده‌های رادیوتراپی

x_1 علائم	x_2 فعالیت	x_3 خواب	x_4 خوراک	x_5 اشتها	x_6 عکس العمل پوست
,۸۸۹	۱,۳۸۹	۱,۵۵۵	۲,۲۲۲	۱,۹۴۵	۱,۰۰۰
۲,۸۱۳	۱,۴۳۷	,۹۹۹	۲,۳۱۲	۲,۳۱۲	۲,۰۰۰
۱,۴۵۴	۱,۰۹۱	۲,۳۶۴	۲,۴۵۵	۲,۹۰۹	۳,۰۰۰
,۲۹۴	,۹۴۱	۱,۰۵۹	۲,۰۰۰	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰
۲,۲۷۲	۲,۵۴۵	۲,۸۱۹	۲,۷۲۷	۴,۰۹۱	,۰۰۰
۳,۹۳۷	۱,۲۵۰	۱,۹۳۷	۲,۹۳۷	۳,۷۴۹	۱,۰۰۰
۲,۷۸۶	۱,۷۱۴	۲,۳۵۷	۲,۰۷۱	۲,۰۰۰	۲,۰۰۰
۵,۲۳۱	۲,۶۹۲	۱,۰۷۷۷	۱,۸۴۶	۲,۵۳۹	۱,۰۰۰
۱,۱۵۰	۱,۱۰۰	,۹۵۰	۲,۰۰۰	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰
۶,۵۰۰	۲,۵۶۲	۱,۷۴۹	۲,۵۶۲	۲,۴۹۹	۱,۰۰۰
,۸۰۰	۱,۰۰۰	۲,۲۰۰	۲,۲۶۷	۲,۴۶۶	۲,۰۰۰
۴,۶۰۰	۲,۰۰۰	۳,۰۰۰	۲,۵۰۰	۳,۴۰۰	۱,۰۰۰
۳,۵۰۰	۱,۲۸۶	۲,۷۱۴	۱,۲۸۶	۱,۲۵۲	۳,۰۰۰
۳,۴۴۴	۲,۵۵۶	۲,۳۸۸	۲,۳۸۹	۳,۰۰۰	۱,۰۰۰
۴,۰۷۱	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	۲,۳۵۷	۱,۵۷۲	۱,۰۰۰
۳,۶۹۲	۱,۰۰۰	۲,۵۳۸	۲,۱۵۴	۲,۶۱۵	۱,۰۰۰
۵,۱۶۷	۳,۰۰۰	۱,۰۰۰	۲,۶۶۷	۳,۶۶۶	,۰۰۰
,۵۰۰	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	۲,۰۰۰	۱,۰۰۰	,۰۰۰
۲,۳۸۵	۱,۹۲۳	۲,۵۳۹	۲,۱۵۴	۲,۴۶۱	۱,۰۰۰
۲,۱۰۰	۱,۳۰۰	۱,۳۰۰	۱,۸۰۰	۲,۶۰۰	۱,۰۰۰
۵,۰۰۰	۳,۲۵۰	۳,۱۲۵	۲,۳۷۵	۳,۳۷۵	,۰۰۰
۴,۵۷۱	۱,۲۱۴	۳,۲۸۶	۲,۵۷۱	۳,۵۷۲	۱,۰۰۰

ادامهٔ جدول ۱-۴

x_1 علائم	x_2 فعالیت	x_3 خواب	x_4 خوراک	x_5 اشتها	x_6 عکس العمل پوست
۲٫۷۳۳	۱٫۱۳۳	۲٫۶۰۰	۱٫۹۳۳	۱٫۶۶۷	۱٫۰۰۰
۴٫۲۳۵	۲٫۲۹۴	۲٫۷۰۶	۲٫۱۷۶	۱٫۸۸۳	۱٫۰۰۰
٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۱٫۹۴۱	۲٫۰۰۰	۲٫۰۰۰	٫۰۰۰
٫۷۵۰	۱٫۱۲۵	۳٫۰۰۰	۱٫۸۷۵	۲٫۰۰۰	۳٫۰۰۰
۳٫۰۷۷	۱٫۴۶۲	۲٫۳۸۴	۲٫۰۰۰	۱٫۸۴۶	۲٫۰۰۰
۱٫۶۰۰	۱٫۲۰۰	۲٫۹۵۰	۲٫۰۰۰	۲٫۷۵۰	۱٫۰۰۰
۶٫۲۷۳	۳٫۶۳۶	۱٫۱۸۲	۲٫۵۴۵	۳٫۳۶۴	٫۰۰۰
۲٫۶۲۵	۱٫۰۰۰	۲٫۴۳۸	۱٫۹۳۷	۲٫۰۶۲	۲٫۰۰۰
۱٫۲۵۰	۱٫۰۰۰	۲٫۰۰۰	۲٫۰۰۰	۳٫۰۰۰	۱٫۰۰۰
۲٫۴۳۷	۲٫۰۶۲	۱٫۶۸۷	۱٫۸۷۵	۱٫۳۷۵	۱٫۰۰۰
۴٫۴۵۴	۱٫۷۲۷	۲٫۶۳۷	۲٫۶۳۶	۳٫۵۴۶	۱٫۰۰۰
٫۱۳۳	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۲٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	٫۰۰۰
٫۲۲۲	۱٫۲۲۲	۱٫۴۴۵	۲٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰
۲٫۴۶۷	۲٫۶۶۷	۲٫۲۰۰	۱٫۹۳۳	۱٫۸۰۰	۳٫۰۰۰
۴٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۴٫۰۰۰	۲٫۱۶۷	۲٫۵۰۰	٫۰۰۰
۵٫۳۸۵	۳٫۱۵۴	۲٫۳۸۴	۲٫۸۴۶	۲٫۵۳۹	۱٫۰۰۰
٫۷۷۳	۱٫۰۰۰	۲٫۲۷۳	۱٫۹۰۹	۲٫۰۹۱	٫۰۰۰
۳٫۷۸۶	۲٫۰۰۰	۱٫۵۷۱	۱٫۷۸۶	۱٫۲۸۵	۳٫۰۰۰
۱٫۹۲۳	۱٫۶۱۵	۱٫۶۹۳	۲٫۰۰۰	۱٫۸۴۶	۱٫۰۰۰
۱٫۰۰۰	۱٫۳۳۳	۱٫۸۳۴	۲٫۰۰۰	۱٫۹۱۷	۱٫۰۰۰
۵٫۸۰۰	۲٫۶۰۰	۳٫۰۰۰	۲٫۸۰۰	۴٫۲۰۰	۱٫۰۰۰
۶٫۰۶۲	۱٫۰۰۰	۱٫۵۶۲	۲٫۳۷۵	۱٫۷۵۰	٫۰۰۰
۳٫۷۰۶	۱٫۲۳۵	۱٫۵۳۰	۲٫۱۱۸	۲٫۲۹۴	۱٫۰۰۰
۲٫۴۴۴	۲٫۳۳۳	۱٫۲۲۳	۲٫۴۴۴	۱٫۷۷۶	۳٫۰۰۰
۶٫۱۱۱	۲٫۲۲۲	۲٫۸۸۹	۲٫۸۸۹	۳٫۵۵۵	۲٫۰۰۰
۲٫۵۳۳	۱٫۰۶۷	۱٫۶۰۰	۲٫۰۰۰	۱٫۳۳۳	۱٫۰۰۰
۲٫۱۶۷	۱٫۰۰۰	۲٫۱۶۷	۲٫۰۰۰	۲٫۵۰۰	۱٫۰۰۰
۲٫۳۷۵	۱٫۰۶۲	۲٫۳۷۵	۲٫۰۰۰	۲٫۱۲۵	۳٫۰۰۰

منبع : داده‌های خانم آنت تیلی ، آر . ان . مقادیر x_2 و x_3 کمتر از ۱ به خاطر خطاها در فرآیندجمع آوری داده‌هاست . سطرهای شامل مقادیر x_2 و x_3 کمتر از ۱ را می‌توان حذف کرد .

جدول ۱-۵ محتویات مصرفی در استخوان

شمارهٔ مورد	شعاع نافذ	شعاع	استخوان بازوی نافذ	استخوان بازو	زند زبرین نافذ	زند زبرین
۱	۱٫۱۰۳	۱٫۰۵۲	۲٫۱۳۹	۲٫۲۳۸	٫۸۷۳	٫۸۷۲
۲	٫۸۴۲	٫۸۵۹	۱٫۸۷۳	۱٫۷۴۱	٫۵۹۰	٫۷۴۴
۳	٫۹۲۵	٫۸۷۳	۱٫۸۸۷	۱٫۸۰۹	٫۷۶۷	٫۷۱۳
۴	٫۸۵۷	٫۷۴۴	۱٫۷۳۹	۱٫۵۴۷	٫۷۰۶	٫۶۷۴
۵	٫۷۹۵	٫۸۰۹	۱٫۷۳۴	۱٫۷۱۵	٫۵۴۹	٫۶۵۴
۶	٫۷۸۷	٫۷۷۹	۱٫۵۰۹	۱٫۴۷۴	٫۷۸۲	٫۵۷۱
۷	٫۹۳۳	٫۸۸۰	۱٫۶۹۵	۱٫۶۵۶	٫۷۳۷	٫۸۰۳
۸	٫۷۹۹	٫۸۵۱	۱٫۷۴۰	۱٫۷۷۷	٫۶۱۸	٫۶۸۲
۹	٫۹۴۵	٫۸۷۶	۱٫۸۱۱	۱٫۷۵۹	٫۸۵۳	٫۷۷۷
۱۰	٫۹۲۱	٫۹۰۶	۱٫۹۵۴	۲٫۰۰۹	٫۸۲۳	٫۷۶۵
۱۱	٫۷۹۲	٫۸۲۵	۱٫۶۲۴	۱٫۶۵۷	٫۶۸۶	٫۶۶۸
۱۲	٫۸۱۵	٫۷۵۱	۲٫۲۰۴	۱٫۸۴۶	٫۶۷۸	٫۵۴۶
۱۳	٫۷۵۵	٫۷۲۴	۱٫۵۰۳	۱٫۴۵۸	٫۶۶۲	٫۵۹۵
۱۴	٫۹۰۰	٫۸۳۸	۱٫۹۰۲	۱٫۶۰۶	٫۷۲۳	٫۶۷۷
۱۵	٫۷۶۴	٫۷۵۷	۱٫۷۴۳	۱٫۷۹۴	٫۵۸۶	٫۵۴۱
۱۶	٫۷۳۳	٫۷۴۸	۱٫۸۶۳	۱٫۸۶۹	٫۶۷۲	٫۷۵۲
۱۷	٫۹۳۲	٫۸۹۸	۲٫۰۳۲	۱٫۸۴۶	٫۸۳۶	٫۸۰۵
۱۸	٫۸۵۶	٫۷۸۶	۱٫۳۹۰	۱٫۳۲۴	٫۵۷۸	٫۶۱۰
۱۹	٫۸۹۰	٫۹۵۰	۲٫۱۸۷	۲٫۰۸۷	٫۷۵۸	٫۷۱۸
۲۰	٫۶۸۸	٫۵۳۲	۱٫۶۵۰	۱٫۳۷۸	٫۵۳۳	٫۴۸۲
۲۱	٫۹۴۰	٫۸۵۰	۲٫۳۳۴	۲٫۲۲۵	٫۷۵۷	٫۷۳۱
۲۲	٫۴۹۳	٫۶۱۶	۱٫۰۳۷	۱٫۲۶۸	٫۵۴۶	٫۶۱۵
۲۳	٫۸۳۵	٫۷۵۲	۲٫۵۰۹	۱٫۴۲۲	٫۶۱۸	٫۶۶۴
۲۴	٫۹۱۵	٫۹۳۶	۱٫۹۷۱	۱٫۸۶۹	٫۸۶۹	٫۸۶۸

منبع : داده‌های اورت اسمیس .

جدول ۴- ۱۰ داده‌های مربوط به اشعه (درهای بسته)

شماره اجاق	اشعه	شماره اجاق	اشعه	شماره اجاق	اشعه
۱	۰/۱۵	۱۶	۰/۱۰	۳۱	۰/۱۰
۲	۰/۹	۱۷	۰/۰۲	۳۲	۰/۲۰
۳	۰/۱۸	۱۸	۰/۱۰	۳۳	۰/۱۱
۴	۰/۱۰	۱۹	۰/۰۱	۳۴	۰/۳۰
۵	۰/۰۵	۲۰	۰/۴۰	۳۵	۰/۰۲
۶	۰/۱۲	۲۱	۰/۱۰	۳۶	۰/۲۰
۷	۰/۰۸	۲۲	۰/۰۵	۳۷	۰/۲۰
۸	۰/۰۵	۲۳	۰/۰۳	۳۸	۰/۳۰
۹	۰/۰۸	۲۴	۰/۰۵	۳۹	۰/۳۰
۱۰	۰/۱۰	۲۵	۰/۱۵	۴۰	۰/۴۰
۱۱	۰/۰۷	۲۶	۰/۱۰	۴۱	۰/۳۰
۱۲	۰/۰۲	۲۷	۰/۱۵	۴۲	۰/۰۵
۱۳	۰/۰۱	۲۸	۰/۰۹		
۱۴	۰/۱۰	۲۹	۰/۰۸		
۱۵	۰/۱۰	۳۰	۰/۱۸		

منبع : داده‌های جی . دی . کرایر .

جدول ۴-۳ چهار اندازه گیری سفتی

x_1	x_2	x_3	x_4	شماره مشاهده	z_1	z_2	z_3	z_4	d^2
۱۸۸۹	۱۶۵۱	۱۵۶۱	۱۷۷۸	۱	-۰٫۱	-۰٫۳	۰٫۲	۰٫۲	۰٫۶۰
۲۴۰۳	۲۰۴۸	۲۰۸۷	۲۱۹۷	۲	۱٫۵	۰٫۹	۱٫۹	۱٫۵	۵٫۴۸
۲۱۱۹	۱۷۰۰	۱۸۱۵	۲۲۲۲	۳	۰٫۷	-۰٫۲	۱٫۰	۱٫۵	۷٫۶۲
۱۶۴۵	۱۶۲۷	۱۱۱۰	۱۵۳۳	۴	-۰٫۸	-۰٫۴	-۱٫۳	-۰۶	۵٫۲۱
۱۹۷۶	۱۹۱۶	۱۶۱۴	۱۸۸۳	۵	۰٫۲	۰٫۵	۰٫۳	۰٫۵	۱٫۴۰
۱۷۱۲	۱۷۱۲	۱۴۳۹	۱۵۴۶	۶	-۰٫۶	-۰٫۱	-۰٫۲	-۰٫۶	۲٫۲۲
۱۹۴۳	۱۶۸۵	۱۲۷۱	۱۶۷۱	۷	۰٫۱	-۰٫۲	-۰٫۸	-۰٫۲	۴٫۹۹
۲۱۰۴	۱۸۲۰	۱۷۱۷	۱۸۷۴	۸	۰٫۶	۰٫۲	۰٫۷	۰٫۵	۱٫۴۹
۲۹۸۳	۲۷۹۴	۲۴۱۲	۲۵۸۱	۹	۳٫۳	۳٫۳	۳٫۰	۲٫۷	۱۲٫۲۶
۱۷۴۵	۱۶۰۰	۱۳۸۴	۱۵۰۸	۱۰	-۰٫۵	-۰٫۵	-۰٫۴	-۰٫۷	۰٫۷۷
۱۷۱۰	۱۵۹۱	۱۵۱۸	۱۶۶۷	۱۱	-۰٫۶	-۰٫۵	۰٫۰	-۰٫۲	۱٫۹۳
۲۰۴۶	۱۹۰۷	۱۶۲۷	۱۸۹۸	۱۲	۰٫۴	۰٫۵	۰٫۴	۰٫۵	۰٫۴۶
۱۸۴۰	۱۸۴۱	۱۵۹۵	۱۷۴۱	۱۳	-۰٫۲	۰٫۳	۰٫۳	۰٫۰	۲٫۷۰
۱۸۶۷	۱۶۸۵	۱۴۹۳	۱۶۷۸	۱۴	-۰٫۱	-۰٫۲	-۰٫۱	-۰٫۱	۰٫۱۳
۱۸۵۹	۱۶۴۹	۱۳۸۹	۱۷۱۴	۱۵	-۰٫۱	-۰٫۳	-۰٫۴	-۰٫۰	۱٫۰۸
۱۹۵۴	۲۱۴۹	۱۱۸۰	۱۲۸۱	۱۶	۰٫۱	۱٫۳	-۱٫۱	-۱٫۴	۱۶٫۸۵
۱۳۲۵	۱۱۷۰	۱۰۰۲	۱۱۷۶	۱۷	-۱٫۸	-۱٫۸	-۱٫۷	-۱٫۷	۳٫۵۰
۱۴۱۹	۱۳۷۱	۱۲۵۲	۱۳۰۸	۱۸	-۱٫۵	-۱٫۲	-۰٫۸	-۱٫۳	۳٫۹۹
۱۸۲۸	۱۶۳۴	۱۶۰۲	۱۷۵۵	۱۹	-۰٫۲	-۰٫۴	۰٫۳	۰٫۱	۱٫۳۶
۱۷۲۵	۱۵۹۴	۱۳۱۳	۱۶۴۶	۲۰	-۰٫۶	-۰٫۵	-۰٫۶	-۰٫۲	۱٫۴۶
۲۲۷۶	۲۱۸۹	۱۵۴۷	۲۱۱۱	۲۱	۱٫۱	۱٫۴	۰٫۱	۱٫۲	۹٫۹۰
۱۸۹۹	۱۶۱۴	۱۴۲۲	۱۴۷۷	۲۲	-۰٫۰	-۰٫۴	-۰٫۳	-۰٫۸	۵٫۰۶
۱۶۳۳	۱۵۱۳	۱۲۹۰	۱۵۱۶	۲۳	-۰٫۸	-۰٫۷	-۰٫۷	-۰٫۶	۰٫۸۰
۲۰۶۱	۱۸۶۷	۱۶۴۶	۲۰۳۷	۲۴	۰٫۵	۰٫۴	۰٫۵	۱٫۰	۲٫۵۴
۱۸۵۶	۱۴۹۳	۱۳۵۶	۱۵۳۳	۲۵	-۰٫۲	-۰٫۸	-۰٫۵	-۰٫۶	۴٫۵۸
۱۷۲۷	۱۴۱۲	۱۲۳۸	۱۴۶۹	۲۶	-۰٫۶	-۱٫۱	-۰٫۹	-۰٫۸	۳٫۴۰
۲۱۶۸	۱۸۹۶	۱۷۰۱	۱۸۳۴	۲۷	۰٫۸	۰٫۵	۰٫۶	۰٫۳	۲٫۳۸
۱۶۵۵	۱۶۷۵	۱۴۱۴	۱۵۹۷	۲۸	-۰٫۸	-۰٫۲	-۰٫۳	-۰٫۴	۳٫۰۰
۲۳۶۵	۲۳۰۱	۲۰۶۵	۲۲۳۴	۲۹	۱٫۳	۱٫۷	۱٫۸	۱٫۶	۶٫۲۸
۱۴۹۰	۱۳۸۲	۱۲۱۴	۱۲۸۴	۳۰	-۱٫۳	-۱٫۲	-۱٫۰	-۱٫۴	۲٫۵۸

منبع : داده های ویلیام گالینگان.

جدول ۴-۴ داده‌های مربوط به اشعه فرضی

شماره اجاق	اشعه	شماره اجاق	اشعه	شماره اجاق	اشعه
۱	۰/۳۰	۱۶	۰/۲۰	۳۱	۰/۱۰
۲	۰/۰۹	۱۷	۰/۰۴	۳۲	۰/۱۰
۳	۰/۳۰	۱۸	۰/۱۰	۳۳	۰/۱۰
۴	۰/۱۰	۱۹	۰/۰۱	۳۴	۰/۳۰
۵	۰/۱۰	۲۰	۰/۶۰	۳۵	۰/۱۲
۶	۰/۱۲	۲۱	۰/۱۲	۳۶	۰/۲۵
۷	۰/۰۹	۲۲	۰/۱۰	۳۷	۰/۲۰
۸	۰/۱۰	۲۳	۰/۰۵	۳۸	۰/۴۰
۹	۰/۰۹	۲۴	۰/۰۵	۳۹	۰/۳۳
۱۰	۰/۱۰	۲۵	۰/۱۵	۴۰	۰/۳۲
۱۱	۰/۰۷	۲۶	۰/۳۰	۴۱	۰/۱۲
۱۲	۰/۰۵	۲۷	۰/۱۵	۴۲	۰/۱۲
۱۳	۰/۰۱	۲۸	۰/۰۹		
۱۴	۰/۴۵	۲۹	۰/۰۹		
۱۵	۰/۱۲	۳۰	۰/۲۸		

منبع : داده‌های جی . دی . کرایر .

تمرینها

۱.۴ فرض کنید X_1, X_2, X_3, X_4 بردارهای تصادفی مستقل $N_p(\mu, \Sigma)$ باشند .

(الف) توزیعهای حاشیه ای بردارهای تصادفی

$$V_1 = \tfrac{1}{4}X_1 - \tfrac{1}{4}X_2 + \tfrac{1}{4}X_3 - \tfrac{1}{4}X_4$$

و

$$V_2 = \tfrac{1}{4}X_1 + \tfrac{1}{4}X_2 - \tfrac{1}{4}X_3 - \tfrac{1}{4}X_4$$

را پیدا کنید .

(ب) چگالی توأم بردارهای تصادفی V_1 و V_2 تعریف شده در (الف) را پیدا کنید .

۲.۴ یک جامعهٔ نرمال دومتغیّری با $\mu_1 = 0$ ، $\mu_2 = 2$ ، $\sigma_{11} = 2$ ، $\sigma_{22} = 1$ ، $\rho_{12} = 0.5$ را در نظر می گیریم .

(الف) چگالی نرمال دومتغیّری را بنویسید .

(ب) مربع واریانس تعمیم یافتهٔ $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$ را به صورت تابعی از x_1 و x_2 بنویسید .

(ج) منحنی چگالی ثابتی که 50% احتمال را شامل شود ، تعیین نموده و رسم کنید .

۳.۴ فرض کنید $\mathbf{X}$ دارای توزیع $N_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ با $\boldsymbol{\mu}' = [-3, 1, 4]$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

باشد . کدامیک از متغیّرهای تصادفی زیر مستقل اند ؟ توضیح دهید .

(الف) X_1 و X_2

(ب) X_2 و X_3

(ج) (X_1, X_2) و X_3

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

A

$A\Sigma A' = ?$

(د) $\frac{X_1 + X_2}{2}$ و X_3

(هـ) X_2 و $X_2 - \frac{5}{2}X_1 - X_3$

۴.۴ فرض کنید $\mathbf{X}$ دارای $N_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ با $\boldsymbol{\mu}' = [2, -3, 1]$ و

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

باشد .

(الف) توزیع $3X_1 - 2X_2 + X_3$ را پیدا کنید .

(ب) در صورت لزوم متغیّرها را دوباره اندیس گذاری کرده ، و یک بردار دوبُعدی $\mathbf{a}$ را طوری

پیدا کنید که X_2 و $X_2 - \mathbf{a}'\begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \end{bmatrix}$ مستقل باشند .

۵.۴ هر یک از موارد زیر را مشخص کنید :

(الف) توزیع شرطی X_1 را با معلوم بودن $X_2 = x_2$ برای توزیع توأم در تمرین (۴-۲) .

(ب) توزیع شرطی X_2 را با معلوم بودن $X_1 = x_1$ و $X_3 = x_3$ برای توزیع توأم درتمرین(۴-۳) .

(ج) توزیع شرطی X_3 را با معلوم بودن $X_1 = x_1$ و $X_2 = x_2$ برای توزیع توأم در تمرین (۴-۴) .

۶.۴ (مثالی از توزیع غیرنرمال دومتغیّری با توزیعهای حاشیه ای نرمال) . فرض کنید X_1 دارای توزیع $N(0, 1)$ و

$$X_2 = \begin{cases} -X_1 & -1 \le X_1 \le 1 \\ X_1 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

هریک از موارد زیر را ثابت کنید .

(الف) X_2 نیز دارای توزیع $N(0, 1)$ است .

(ب) X_1 و X_2 دارای توزیع نرمال دومتغیّری نیستند .

(راهنمایی :

(الف) چون X_1 ، $N(0, 1)$ است . ، لذا برای هر x داریم .

وقتی $-1 < x_2 < 1$ آن گاه

$$P[-1 < X_1 \le x] = P[-x \le X_1 < 1]$$

$$P[X_2 \le x_2] = P[X_1 \le -1] + P[-1 < X_2 \le x_2] = P[X_2 \le -1] + P[-1 < -X_1 \le x_2] = P[X_1 \le -1] + P[-x_2 \le X_1 < 1]$$

ولی با توجه به استدلال مربوط به تقارنی که در خط اول بالا بود ، داریم :

$$P[-x_2 \le X_1 < 1] = P[-1 < X_1 \le x_2] .$$

از این رو $P[X_2 \le x_2] = P[X_1 \le -1] + P[-1 < X_1 \le x_2] = P[X_1 \le x_2]$ که یک احتمال نرمال استاندارد است .

(ب) ترکیب خطی $X_1 - X_2$ که با احتمال $P[|X_1| > 1 = .3174$ برابر صفر است را در نظر می گیریم .

۷.۴ هر یک از موارد زیر را ثابت کنید .

(الف)

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}' & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$$

(ب)

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0}' & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \qquad |\mathbf{A}| \neq 0$$

(راهنمایی :

(الف) $\begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}' & \mathbf{B} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}' & \mathbf{I} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}' & \mathbf{B} \end{vmatrix}$ اگر دترمینان $\begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}' & \mathbf{B} \end{vmatrix}$ را نسبت به سطر اول بسط دهیم (تعریف ۲ الف ـ ۲۴ را ملاحظه کنید) نتیجه اش عدد یک ضربدر همان دترمینان است که مرتبهٔ I یکی کم شده است . این روش را تا حصول $1 \times |\mathbf{B}|$ تکرار می کنیم . به طور مشابه اگر دترمینان $\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}' & \mathbf{I} \end{vmatrix}$ را نسبت به سطر آخر بسط دهیم ، داریم :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}' & \mathbf{I} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}|$$

(ب) $\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0}' & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}' & \mathbf{B} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} \\ \mathbf{0}' & \mathbf{I} \end{vmatrix}$. اما بسط دترمینان $\begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} \\ \mathbf{0}' & \mathbf{I} \end{vmatrix}$ نسبت به سطر آخر $= 1$ را به ما می دهد . حال ازنتیجهٔ بخش الف استفاده کنید) .

۸.۴ نشان دهید که اگر A مربع باشد ، آن گاه

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_{22}||\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}| \qquad \text{for } |\mathbf{A}_{22}| \neq 0$$
$$= |\mathbf{A}_{11}||\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}| \qquad \text{for } |\mathbf{A}_{11}| \neq 0$$

(راهنمایی : A را افراز نموده و ثابت کنید

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \\ \mathbf{0}' & \mathbf{I} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}' & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

دترمینان دوطرف این تساوی را به دست می آوریم . از تمرین (۴ . ۷) برای دترمینانهای اول و سوم سمت چپ و برای دترمینان سمت راست استفاده کنید . با در نظر گرفتن

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0}' & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}' & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} \end{bmatrix}$$

تساوی دوم مربوط به $|\mathbf{A}|$ نتیجه می شود .

۹.۴ نشان دهید که برای ماتریس متقارن $\mathbf{A}$ ،

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21} & \mathbf{I} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}' & \mathbf{A}_{22}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \\ \mathbf{0}' & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

از این رو $(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}^{-1}{}_{22}\mathbf{A}_{21})^{-1}$ بخش بالایی سمت چپ $\mathbf{A}^{-1}$ است .

راهنمایی : عبارت راهنمایی تمرین (۴ . ۸) را از چپ در $\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \\ \mathbf{0}' & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1}$ و از راست در $\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1}$ ضرب کنید و وارون عبارت حاصله را به دست آورید .

۱۰-۴ اگر $|\Sigma| \neq 0$، موارد زیر را ثابت کنید :

(الف) تحقیق کنید که $|\Sigma| = |\Sigma_{22}||\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}|$. (توجه کنید $|\Sigma|$ را می توان به صورت حاصل ضربهایی از توزیعهای حاشیه ای و شرطی نوشت)

(ب) تحقیق کنید که

$$\begin{aligned}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = {} & [\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)]' \\ & \times (\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21})^{-1} \\ & \times [\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)] \\ & + (\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)'\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)\end{aligned}$$

از این رو توان چگالی توأم را می توان به صورت مجموع دو جملهٔ متناظر با سهمهایی از توزیعهای حاشیه ای و شرطی تجزیه کرد) .

(ج) اگر نتایج بخشهای (الف) و (ب) معلوم باشند توزیع حاشیه ای $\mathbf{X}_2$ و توزیع شرطی $\mathbf{X}_1 | \mathbf{X}_2 = \mathbf{x}_2$ را مشخص کنید .

راهنمایی : (الف) تمرین (۴ . ۸) را به کار ببرید .

(ب) از تمرین (۴ . ۹) توجه می کنیم که می توانیم $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$ را به صورت

زیر بنویسیم :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1 \\ \mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}' & \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \\ \mathbf{0}' & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1 \\ \mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}$$

اگر حاصل ضرب را به صورت زیر دسته بندی کنیم ، نتیجه حاصل می شود .

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \\ \mathbf{0}' & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1 \\ \mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2) \\ \mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}$$

۱۱.۴ اگر $\mathbf{X}$ دارای توزیع $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ با $|\boldsymbol{\Sigma}| \neq 0$ باشد، نشان دهید که اگر $\boldsymbol{\Sigma}_{12} = \underset{((p-q)\times q)}{\mathbf{0}}$ آن گاه چگالی توأم را به صورت حاصل ضرب چگالیهای حاشیه ای

$\underset{(q\times 1)}{\mathbf{X}_1}$ و $\underset{((p-q)\times 1)}{\mathbf{X}_2}$

می توان نوشت . (*راهنمایی* : با ضرب کردن بلوکی نشان دهید که

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}' & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}$$ وارون $$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}' & \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$ است . سپس بنویسید

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = [(\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1)'\ (\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)'] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}' & \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1 \\ \mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}$$
$$= (\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1)'\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}(\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1) + (\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)'\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)$$

توجه کنید که با توجه به تمرین ۴.۷ (الف) ، داریم : $|\boldsymbol{\Sigma}| = |\boldsymbol{\Sigma}_{11}||\boldsymbol{\Sigma}_{22}|$. حال چگالی توأم تجزیه به عوامل می شود) .

۱۲.۴ نشان دهید که $\sum_{j=1}^{n} (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})'$ و $\sum_{j=1}^{n} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})'$ دو ماتریس با اعضای صفرند . در این جا $\mathbf{x}'_j = [x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{pj}]$ ، $j = 1, 2, \ldots, n$

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{x}_j$$

۱۳.۴ برآوردهای درست نمایی ماکزیمم *بردار* میانگین $\boldsymbol{\mu}$ ، 2×1 و ماتریس کوواریانس $\boldsymbol{\Sigma}$ ، 2×2 را بر مبنای نمونهٔ تصادفی

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 4 \\ 6 & 4 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

از یک جامعهٔ نرمال دو متغیّری پیدا کنید .

۱۴.۴ فرض کنید $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_{20}$ یک نمونهٔ تصادفی به حجم $n = 20$ از یک جامعهٔ $N_6(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$

هستند . هر یک از موارد زیر را به طور کامل مشخص کنید .

(الف) توزیع $(\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu})$

(ب) توزیع $\bar{\mathbf{X}}$ و $\sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})$.

(ج) توزیع $(n-1)\mathbf{S}$.

۱۵.۴ برای متغیّرهای تصادفی $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_{20}$ در تمرین (۱۴.۴) توزیع $\mathbf{B}(19\mathbf{S})\mathbf{B}'$ را برای هرحالت مشخص کنید.

(الف)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

(ب)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۶.۴ فرض کنید $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_{75}$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با میانگین $\boldsymbol{\mu}$ و ماتریس کوواریانس $\boldsymbol{\Sigma}$ است . توزیع تقریبی هر یک از موارد زیر کدام است ؟

(الف) $\bar{\mathbf{X}}$

(ب) $n(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})$

۱۷.۴ متوسط نرخ سالانهٔ برگشت سرمایه (به انضمام سود سهام) شرکت دو جونز برای سالهای ۱۹۷۲-۱۹۶۳ را در نظر بگیرید . این داده ها که در 100 ضرب شده اند ، عبارتند از : 20.6 ، 18.7 ، 14.2 ، 15.7- ، 19 ، 7.7 ، 11.6- ، 8.8 ، 9.8 و 18.2 . با استفادهٔ از این ده مشاهده به موارد زیر جواب دهید :

(الف) یک نمودار $Q-Q$ را بسازید . آیا به نظر می رسد داده ها دارای توزیع نرمال باشند؟ توضیح دهید .

(ب) یک آزمون نرمال بودن مبتنی بر ضریب همبستگی $2Q$ انجام دهید [(۴-۳۱) را ملاحظه کنید] . سطح معنی داری را $\alpha = 0.10$ در نظر بگیرید .

۱۸.۴ تمرین ۲.۱ عمر x_1 که به سال اندازه گیری می شود و قیمت فروش x_2 به هزار دلار را برای $n = 10$ اتومبیل دست دوم می دهد . این داده ها مطابق جدول زیر هستند :

x_1	3	5	5	7	7	7	8	9	10	11
x_2	2.30	1.90	1.00	.70	.30	1.00	1.05	.45	.70	.30

(الف) با استفاده از نتایج تمرین (۱ . ۲) مربع فواصل تعمیم یافته $(\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})'\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})$ ، $j = 1, 2, ..., 10$ که $\mathbf{x}'_j = [x_{1j}, x_{2j}]$ را محاسبه کنید .

(ب) با کاربرد فواصل در بخش الف نسبت مشاهداتی را که داخل مسیر احتمال 50% برآوردشده یک توزیع نرمال دومتغیّری واقع می شود تعیین کنید .

(ج) فواصل در بخش الف را مرتب کرده و یک نمودار کی دو بسازید .

(د) با معلوم بودن نتایج در بخشهای ب و ج آیا این داده ها تقریباً نرمال دومتغیّری اند ؟ توضیح دهید .

۱۹ . ۴ داده های مربوط به اشعهٔ (دربسته) در مثال (۹ . ۴) را در نظر بگیرید . یک نمودار $Q-Q$ برای لگاریتم طبیعی این داده ها بسازید [توجه داشته باشید که تبدیل لگاریتم طبیعی متناظر با مقدار $\lambda = 0$ در (۴-۳۴) است] . آیا لگاریتمهای طبیعی به نظر می رسد ، توزیع نرمال داشته باشند ؟ نتایج خودتان را با شکل (۸ . ۴) مقایسه کنید . آیا انتخاب $\lambda = 1/2$ یا $\lambda = 0$ در این حالت تفاوت زیادی می کنند ؟ در تمرینهای زیر ممکن است رایانه مورد نیاز باشد .

۲۰ . ۴ داده های مربوط به آلودگی هوای داده شده در جدول (۱ . ۲) را در نظر بگیرید . یک نمودار $Q-Q$ را برای اندازه های اشعهٔ خورشیدی بسازید و یک آزمون نرمال بودن مبتنی بر ضریب همبستگی r_Q را انجام دهید ((۴-۳۱) را ملاحظه کنید) . $\alpha = 0.05$ فرض کنید و از مقدار متناظر با $n = 40$ در جدول (۴ . ۲) استفاده کنید .

۲۱ . ۴ با معلوم بودن داده های آلودگی هوای در جدول (۱ . ۲) ، زوجهای $x_5 = NO_2$ و $x_6 = O_3$ را برای نرمال بودن دومتغیّری امتحان کنید .

(الف) فواصل تعمیم یافته $(\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})'\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})$ ، $j = 1, 2, ..., 42$ که $\mathbf{x}'_j = [x_{5j}, x_{6j}]$ اضافه کنید .

(ب) نسبت مشاهدات $\mathbf{x}'_j = [x_{5j}, x_{6j}]$ ، $j = 1, 2, ..., 42$ که در داخل مسیر احتمال تقریباً 5% یک توزیع نرمال دومتغیّری واقع می شود را تعیین کنید .

(ج) یک نمودار کی دو فواصل مرتب شدهٔ در بخش الف را بسازید .

۲۲ . ۴ داده های مربوط به اتومبیلهای دست دوم در تمرین (۱۸ . ۴) را در نظر بگیرید .

(الف) تبدیل توانی $\hat{\lambda}_1$ که مقادیر x_1 را تقریباً نرمال می کند ، به دست آورید . یک نمودار $Q-Q$ را برای داده های تبدیل یافته بسازید .

(ب) تبدیل توانی $\hat{\lambda}_2$ که مقادیر x_2 را تقریباً نرمال می کند به دست آورید . یک نمودار $Q-Q$ و برای داده های تبدیل یافته بسازید .

جدول ۵-۱ داده‌های مربوط به تعریق

فرد	X_1 (میزان عرق کردن)	X_2 (سدیم)	X_3 (پتاسیم)
۱	۳/۷	۴۸/۵	۹/۳
۲	۵/۷	۶۵/۱	۸/۰
۳	۳/۸	۴۷/۲	۱۰/۹
۴	۳/۲	۵۳/۲	۱۲/۰
۵	۳/۱	۵۵/۵	۹/۷
۶	۴/۶	۳۶/۱	۷/۹
۷	۲/۴	۲۴/۸	۱۴/۰
۸	۷/۲	۳۳/۱	۷/۶
۹	۶/۷	۴۷/۴	۸/۵
۱۰	۵/۴	۵۴/۱	۱۱/۳
۱۱	۳/۹	۳۶/۹	۱۲/۷
۱۲	۴/۵	۵۸/۸	۱۲/۳
۱۳	۳/۵	۲۷/۸	۹/۸
۱۴	۴/۵	۴۰/۲	۸/۴
۱۵	۱/۵	۱۳/۵	۱۰/۱
۱۶	۸/۵	۵۶/۴	۷/۱
۱۷	۴/۵	۷۱/۶	۸/۲
۱۸	۶/۵	۵۲/۸	۱۰/۹
۱۹	۴/۱	۴۴/۱	۱۱/۲
۲۰	۵/۵	۴۰/۹	۹/۴

منبع : داده های دکتر جرالد بارگمن .

جدول ۵-۲ داده‌های مربوط به آزمون دانشکده

فرد	X_1 (علوم اجتماعی و تاریخ)	X_2 (شفاهی)	X_3 علوم
۱	۴۶۸	۴۱	۲۶
۲	۴۲۸	۳۹	۲۶
۳	۵۱۴	۵۳	۲۱
۴	۵۴۷	۶۷	۳۳
۵	۶۱۴	۶۱	۲۷
۶	۵۰۱	۶۷	۲۹
۷	۴۲۱	۴۶	۲۲
۸	۵۲۷	۵۰	۲۳
۹	۵۲۷	۵۵	۱۹
۱۰	۶۲۰	۷۲	۳۲
۱۱	۵۸۷	۶۳	۳۱
۱۲	۵۴۱	۵۹	۱۹
۱۳	۵۶۱	۵۳	۲۶
۱۴	۴۶۸	۶۲	۲۰
۱۵	۶۱۴	۶۵	۲۸
۱۶	۵۲۷	۴۸	۲۱
۱۷	۵۰۷	۳۲	۲۷
۱۸	۵۰۸	۶۴	۲۱
۱۹	۵۰۷	۵۹	۲۱
۲۰	۵۲۱	۵۴	۲۳
۲۱	۵۷۴	۵۲	۲۵
۲۲	۵۸۷	۶۴	۳۱
۲۳	۴۸۸	۵۱	۲۷
۲۴	۴۸۸	۶۲	۱۸
۲۵	۵۸۷	۵۶	۲۶
۲۶	۴۲۱	۳۸	۱۶
۲۷	۴۸۱	۵۲	۲۶
۲۸	۴۲۸	۴۰	۱۹
۲۹	۶۴۰	۶۵	۲۵
۳۰	۵۷۴	۶۱	۲۸
۴۵	۴۹۴	۴۱	۲۴
۴۶	۵۴۱	۴۷	۲۵
۴۷	۳۶۲	۳۶	۱۷
۴۸	۴۰۸	۲۸	۱۷
۴۹	۵۹۴	۶۸	۲۳
۵۰	۵۰۱	۲۵	۲۶
۵۱	۶۸۷	۷۵	۳۳
۵۲	۶۳۳	۵۲	۳۱
۵۳	۶۴۷	۶۷	۲۹
۵۴	۶۴۷	۶۵	۳۴
۵۵	۶۱۴	۵۹	۲۵
۵۶	۶۳۳	۶۵	۲۸
۵۷	۴۴۸	۵۵	۲۴
۵۸	۴۰۸	۵۱	۱۹
۵۹	۴۴۱	۳۵	۲۲
۶۰	۴۳۵	۶۰	۲۰
۶۱	۵۰۱	۵۴	۲۱
۶۲	۵۰۷	۴۲	۲۴
۶۳	۶۲۰	۷۱	۳۶
۶۴	۴۱۵	۵۲	۲۰
۶۵	۵۵۴	۶۹	۳۰
۶۶	۳۴۸	۲۸	۱۸
۶۷	۴۶۸	۴۹	۲۵
۶۸	۵۰۷	۵۴	۲۶
۶۹	۵۲۷	۴۷	۳۱
۷۰	۵۲۷	۴۷	۲۶
۷۱	۴۳۵	۵۰	۲۸
۷۲	۶۶۰	۷۰	۲۵
۷۳	۷۳۳	۷۳	۳۳
۷۴	۵۰۷	۴۵	۲۸

ادامهٔ جدول ۵-۲

فرد	X_1 (علوم اجتماعی و تاریخ)	X_2 (شفاهی)	X_3 علوم
۳۱	۵۴۷	۶۴	۲۷
۳۲	۵۸۰	۶۴	۲۸
۳۳	۴۹۴	۵۳	۲۶
۳۴	۵۵۴	۵۱	۲۱
۳۵	۶۴۷	۵۸	۲۳
۳۶	۵۰۷	۶۵	۲۳
۳۷	۴۵۴	۵۲	۲۸
۳۸	۴۲۷	۵۷	۲۱
۳۹	۵۲۱	۶۶	۲۶
۴۰	۴۶۸	۵۷	۱۴
۴۱	۵۸۷	۵۵	۳۰
۴۲	۵۰۷	۶۱	۳۱
۴۳	۵۷۴	۵۴	۳۱
۴۴	۵۰۷	۵۳	۲۳

فرد	X_1 (علوم اجتماعی و تاریخ)	X_2 (شفاهی)	X_3 (علوم)
۷۵	۵۲۷	۶۲	۲۹
۷۶	۴۲۸	۳۷	۱۹
۷۷	۴۸۱	۴۸	۲۳
۷۸	۵۰۷	۶۱	۱۹
۷۹	۵۲۷	۶۶	۲۳
۸۰	۴۸۸	۴۱	۲۸
۸۱	۶۰۷	۶۹	۲۸
۸۲	۵۶۱	۵۹	۳۴
۸۳	۶۱۴	۷۰	۲۳
۸۴	۵۲۷	۴۹	۳۰
۸۵	۴۷۴	۴۱	۱۶
۸۶	۴۴۱	۴۷	۲۶
۸۷	۶۰۷	۶۷	۳۲

منبع : داده های ریچارد دبلیو . جانسون .

جدول ۵-۶ داده‌های مربوط به الوارها

x_1 (سفتی : به پیمانهٔ قابلیت ارتجاع)	x_2 (قدرت خم شدن)	x_1 (سفتی : به پیمانهٔ قابلیت ارتجاع)	x_2 (قدرت خم شدن)
۱۲۳۲	۴۱۷۵	۱۷۱۲	۷۷۴۹
۱۱۱۵	۶۶۵۲	۱۹۳۲	۶۸۱۸
۲۲۰۵	۷۶۱۲	۱۸۲۰	۹۳۰۷
۱۸۹۷	۱۰۹۱۴	۱۹۰۰	۶۴۵۷
۱۹۳۲	۱۰۸۵۰	۲۴۲۶	۱۰۱۰۲
۱۶۱۲	۷۶۲۷	۱۵۵۸	۷۴۱۴
۱۵۹۸	۶۹۰۴	۱۴۷۰	۷۵۵۶
۱۸۰۴	۸۳۶۵	۱۸۵۸	۷۸۳۳
۱۷۵۲	۹۴۶۹	۱۵۸۷	۸۳۰۹
۲۰۶۷	۶۴۱۰	۲۲۰۸	۹۵۵۹
۲۳۶۵	۱۰۳۲۷	۱۴۸۷	۶۳۵۵
۱۶۴۶	۷۳۲۰	۲۲۰۶	۱۰۷۲۳
۱۵۷۹	۸۱۹۶	۲۳۳۲	۵۴۳۰
۱۸۸۰	۹۷۰۹	۲۵۴۰	۱۲۰۹۰
۱۷۷۳	۱۰۳۷۰	۲۳۳۲	۱۰۰۷۲

منبع : داده‌های آزمایشگاه محصولات جنگلی ایالات متحده .

جدول ۵-۷ داده‌های مربوط به پرندگان

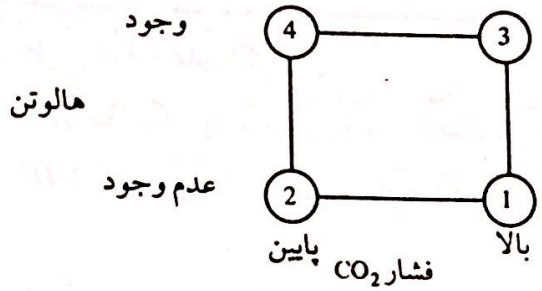
x_1 (درازای بال)	x_2 (درازای دُم)	x_1 (درازای بال)	x_2 (درازای دُم)	x_1 (درازای بال)	x_2 (درازای دُم)
۱۹۱	۲۸۴	۱۸۶	۲۶۶	۱۷۳	۲۷۱
۱۹۷	۲۸۵	۱۹۷	۲۸۵	۱۹۴	۲۸۰
۲۰۸	۲۸۸	۲۰۱	۲۹۵	۱۹۸	۳۰۰
۱۸۰	۲۷۳	۱۹۰	۲۸۲	۱۸۰	۲۷۲
۱۸۰	۲۷۵	۲۰۹	۳۰۵	۱۹۰	۲۹۲
۱۸۸	۲۸۰	۱۸۷	۲۸۵	۱۹۱	۲۸۶
۲۱۰	۲۸۳	۲۰۷	۲۹۷	۱۹۶	۲۸۵
۱۹۶	۲۸۸	۱۷۸	۲۶۸	۲۰۷	۲۸۶
۱۹۱	۲۷۱	۲۰۲	۲۷۱	۲۰۹	۳۰۳
۱۷۹	۲۵۷	۲۰۵	۲۸۵	۱۷۹	۲۶۱
۲۰۸	۲۸۹	۱۹۰	۲۸۰	۱۸۶	۲۶۲
۲۰۲	۲۸۵	۱۸۹	۲۷۷	۱۷۴	۲۴۵
۲۰۰	۲۷۲	۲۱۱	۳۱۰	۱۸۱	۲۵۰
۱۹۲	۲۸۲	۲۱۶	۳۰۵	۱۸۹	۲۶۲
۱۹۹	۲۸۰	۱۸۹	۲۷۴	۱۸۸	۲۵۸

منبع : داده‌های اس. تمپل .

جدول ۶-۱ داده‌های مربوط به جریان آب

نمونهٔ j	آزمایشگاه خصوصی		آزمایشگاه بهداشت ایالتی	
	x_{11j} (BOD)	x_{12j} (SS)	x_{21j} (BOD)	x_{22j} (SS)
۱	۶	۲۷	۲۵	۱۵
۲	۶	۲۳	۲۸	۱۳
۳	۱۸	۶۴	۳۶	۲۲
۴	۸	۴۴	۳۵	۲۹
۵	۱۱	۳۰	۱۵	۳۱
۶	۳۴	۷۵	۴۴	۶۴
۷	۲۸	۲۶	۴۲	۳۰
۸	۷۱	۱۲۴	۵۴	۶۴
۹	۴۳	۵۴	۳۴	۵۶
۱۰	۳۳	۳۰	۲۹	۲۰
۱۱	۲۰	۱۴	۳۹	۲۱

منبع : داده‌های اس . وبر .



جدول ۶-۲ ـ چهار اندازهٔ مربوط به هر یک از نوزده سگ را شامل می شود .

CO_2 با فشار بالا و بدون H = تیمار ۱

CO_2 با فشار پایین و بدون H = تیمار ۲

CO_2 با فشار بالا با H = تیمار ۳

CO_2 با فشار پایین با H = تیمار ۴

جدول ۶-۲ داده‌های مربوط به خواب سگها

سگ	تیمار ۱	تیمار ۲	تیمار ۳	تیمار ۴
۱	۴۲۶	۶۰۹	۵۵۶	۶۰۰
۲	۲۵۳	۲۳۶	۳۹۲	۳۹۵
۳	۳۵۹	۴۳۳	۳۴۹	۳۵۷
۴	۴۳۲	۴۳۱	۵۲۲	۶۰۰
۵	۴۰۵	۴۲۶	۵۱۳	۵۱۳
۶	۳۲۴	۴۳۸	۵۰۷	۵۳۹
۷	۳۱۰	۳۱۲	۴۱۰	۴۵۹
۸	۳۲۶	۳۲۶	۳۵۰	۵۰۴
۹	۳۷۵	۴۴۷	۵۴۷	۵۴۸
۱۰	۲۸۶	۲۸۶	۴۰۳	۴۲۲
۱۱	۳۴۹	۳۸۲	۴۷۳	۴۹۷
۱۲	۴۲۹	۴۱۰	۴۸۸	۵۴۷
۱۳	۳۴۸	۳۷۷	۴۴۷	۵۱۴
۱۴	۴۱۲	۴۷۳	۴۷۲	۴۴۶
۱۵	۳۴۷	۳۲۶	۴۵۵	۴۶۸
۱۶	۴۳۴	۴۵۸	۶۳۷	۵۲۴
۱۷	۳۶۴	۳۶۷	۴۳۲	۴۶۹
۱۸	۴۲۰	۳۹۵	۵۰۳	۵۳۱
۱۹	۳۹۷	۵۵۶	۶۴۵	۶۲۵

منبع : داده‌های دکتر جی . آتلی .

مثال ۶-۹

ادارهٔ بهداشت و خدمات اجتماعی ایالت ویسکانسین هزینه های آسایشگاههای واقع در ایالت را در مقابل خدمات ارائه شده می سازد . این اداره مجموعهٔ فرمولهای نرخها را برای هر امکان بر مبنای عواملی چون : سطح مراقبت، میانگین نرخ دستمزد و متوسط نرخ دستمزد در ایالت، فراهم نموده است . آسایشگاهها را می توان بر پایهٔ مالکیت (دستهٔ خصوصی ، سازمان غیرانتفاعی و دولت) و گواهینامه (امکانات پرستاری ماهرانه ، (SNF) ، امکانات مراقبتی بینابینی (ICF) یا ترکیب (SNF & ICF) رده بندی کرد .

یک هدف مطالعهٔ اخیر بررسی اثرات مالکیت یا تأیید (یا هر دو) روی هزینه هاست . چهار هزینه را بر مبنای یک روز هر مریض محاسبه و برحسب ساعت برای هر بیمار اندازه گیری نموده ، و برای تحلیل انتخاب کردیم : هزینهٔ خدمات پرستاری = X_1 ، هزینهٔ خدمات رژیم غذایی = X_2 ، هزینه نگهداری و عملیات پایگاهی = X_3 ، هزینهٔ خانه داری و لباسشویی = X_4 . ابتدا $n = 516$ مشاهده روی هر یک از $p = 4$ متغیر هزینه بر اساس مالکیت تفکیک گردید . آماره های خلاصه شده برای هر یک از $g = 3$ دسته در زیر داده شده است .

گروه	تعداد مشاهدات	بردارهای میانگین نمونه
$\ell = 1$ (خصوصی)	$n_1 = 271$	$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 2.066 \\ .480 \\ .082 \\ .360 \end{bmatrix}$; $\bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 2.167 \\ .596 \\ .124 \\ .418 \end{bmatrix}$; $\bar{x}_3 = \begin{bmatrix} 2.273 \\ .521 \\ .125 \\ .383 \end{bmatrix}$
$\ell = 2$ (غیرانتفاعی)	$n_2 = 138$	
$\ell = 3$ (دولت)	$n_3 = 107$	
	$\sum_{\ell=1}^{3} n_\ell = 516$	

ماتریسهای کوواریانس نمونه

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} .291 & & & \\ -.001 & .011 & & \\ .002 & .000 & .001 & \\ .010 & .003 & .000 & .010 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} .561 & & & \\ .011 & .025 & & \\ .001 & .004 & .005 & \\ .037 & .007 & .002 & .019 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} .261 & & & \\ .030 & .017 & & \\ .003 & -.000 & .004 & \\ .018 & .006 & .001 & .013 \end{bmatrix}$$

منبع : داده های بخش خدمات سلامتی و اجتماعی ایالت ویسکانسین.

جدول ۶-۴ داده‌های فیلم پلاستیکی

x_1 = مقاومت پارگی , x_2 = براقی, and x_3 = کدری

		میزان جمعی بودن : عامل ۲					
		پایین (1.0%)			بالا (1.5%)		
		x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
عامل ۱ : تغییر در نرخ	پایین (−10%)	[6.5	9.5	4.4]	[6.9	9.1	5.7]
		[6.2	9.9	6.4]	[7.2	10.0	2.0]
		[5.8	9.6	3.0]	[6.9	9.9	3.9]
		[6.5	9.6	4.1]	[6.1	9.5	1.9]
		[6.5	9.2	0.8]	[6.3	9.4	5.7]
	بالا (10%)	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
		[6.7	9.1	2.8]	[7.1	9.2	8.4]
		[6.6	9.3	4.1]	[7.0	8.8	5.2]
		[7.2	8.3	3.8]	[7.2	9.7	6.9]
		[7.1	8.4	1.6]	[7.5	10.1	2.7]
		[6.8	8.5	3.4]	[7.6	9.2	1.9]

محاسبهٔ ماتریسهای مجموع مربعات مناسب و حاصل ضربهای متقاطع مطابق MANOVA زیر است .

منبع تغییرات	SSP	d.f.
تغییر در نرخ : عامل ۱	$\begin{bmatrix} 1.7405 & -1.5045 & .8555 \\ & 1.3005 & -.7395 \\ & & .4205 \end{bmatrix}$	1
میزان جمعی بودن : عامل ۲	$\begin{bmatrix} .7605 & .6825 & 1.9305 \\ & .6125 & 1.7325 \\ & & 4.9005 \end{bmatrix}$	1
اثر متقابل	$\begin{bmatrix} .0005 & .0165 & .0445 \\ & .5445 & 1.4685 \\ & & 3.9605 \end{bmatrix}$	1
باقی مانده	$\begin{bmatrix} 1.7640 & .0200 & -3.0700 \\ & 2.6280 & -.5520 \\ & & 64.9240 \end{bmatrix}$	16
کل (تصحیح شده)	$\begin{bmatrix} 4.2655 & -.7855 & -.2395 \\ & 5.0855 & 1.9095 \\ & & 74.2055 \end{bmatrix}$	19

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \\ \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \}n_1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \}n_2 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}, \ldots, \mathbf{u}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \\ \\ \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \}n_g \\ \\ \\ \end{matrix}$$

۸.۶ یک بحث درست نمایی در ادغام کردن دو ماتریس کوواریانس نمونهٔ مستقل برای برآوردکردن یک ماتریس کوواریانس مشترك درحالت دوجامعهٔ نرمال به ما کمک می کند . تابع درست نمایی $L(\mu_1, \mu_2, \Sigma)$ را برای دونمونهٔ مستقل به حجمهای n_1 و n_2 از جامعه های به ترتیب $N_p(\mu_1, \Sigma)$ و $N_p(\mu_2, \Sigma)$ ارائه کنید . نشان دهید که این درست نمایی با انتخاب $\hat{\mu}_1 = \bar{x}_1$ ، $\hat{\mu}_2 = \bar{x}_2$ و

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n_1 + n_2}[(n_1 - 1)S_1 + (n_2 - 1)S_2] = \left(\frac{n_1 + n_2 - 2}{n_1 + n_2}\right)S_p$$

ماکزییم می شود [*راهنمایی* : از (۴-۱۶) و نتیجهٔ ماکزیمم ۴-۱۰ استفاده کنید] .

۹.۶ (MANOVA دوطرفه بدون تکرار) . مشاهدات روی دو پاسخ x_1 و x_2 که به شکل یک جدول دوطرفه در زیر نشان داده شده است را در نظر می گیریم . (توجه کنید که یک بردار مشاهدهٔ تکی در هر ترکیب سطوح عامل وجود دارد) .

		عامل ۲ سطح ۱	سطح ۲	سطح ۳	سطح ۴
عامل ۱ :	سطح ۱	$\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$
	سطح ۲	$\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$
	سطح ۳	$\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -4 \\ -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix}$

الگوی MANOVA دوطرفه بدون تکرار

$$X_{\ell k} = \mu + \tau_\ell + \beta_k + e_{\ell k}; \qquad \sum_{\ell=1}^{g} \tau_\ell = \sum_{k=1}^{b} \beta_k = 0$$

است که در آن e_{lk} بردارهای تصادفی مستقل $N_p(0, \Sigma)$ است .

(الف) مشاهدات را برای هر یک از دو متغیر به صورت

جدول ۶-۷ داده‌های مربوط به پرنده‌های نر

x_1 (درازای دُم)	x_2 (درازای بال)	x_1 (درازای دُم)	x_2 (درازای بال)	x_1 (درازای دُم)	x_2 (درازای بال)
۱۸۰	۲۷۸	۱۸۵	۲۸۲	۲۸۴	۲۷۷
۱۸۶	۲۷۷	۱۹۵	۲۸۵	۱۷۶	۲۸۱
۲۰۶	۳۰۸	۱۸۳	۲۷۶	۱۸۵	۲۸۷
۱۸۴	۲۹۰	۲۰۲	۳۰۸	۱۹۱	۲۹۵
۱۷۷	۲۷۳	۱۷۷	۲۵۴	۱۷۷	۲۶۷
۱۷۶	۲۶۷	۱۷۰	۲۶۰	۱۹۹	۲۹۹
۲۰۰	۲۸۱	۱۸۶	۲۷۴	۱۹۰	۲۷۳
۱۹۱	۲۸۷	۱۷۷	۲۷۲	۱۸۰	۲۷۸
۱۹۳	۲۷۱	۱۷۸	۲۶۶	۱۸۹	۲۸۰
۲۱۲	۳۰۲	۱۹۲	۲۸۱	۱۹۴	۲۹۰
۱۸۱	۲۵۴	۲۰۴	۲۷۶	۱۸۶	۲۸۷
۱۹۵	۲۹۷	۱۹۱	۲۹۰	۱۹۱	۲۸۶
۱۸۷	۲۸۱	۱۷۸	۲۶۵	۱۸۷	۲۸۸
۱۹۰	۲۸۴	۱۷۷	۲۷۵	۱۸۶	۲۷۵

منبع : داده‌های اس . تمپل .

$$x_{\ell k} = \bar{x} + (\bar{x}_{\ell\cdot} - \bar{x}) + (\bar{x}_{\cdot k} - \bar{x}) + (x_{\ell k} - \bar{x}_{\ell\cdot} - \bar{x}_{\cdot k} + \bar{x})$$

مشابه با آرایه های در مثال ۶-۸ تجزیه کنید . برای هر پاسخ ، این تجزیه به چندین ماتریس 4×3 منتهی می شود . در این جا $\bar{x}$ میانگین کل ، $\bar{x}_{\ell\cdot}$ میانگین سطح ℓام عامل ۱ و $\bar{x}_{\cdot k}$ متوسط سطح k ام عامل ۲ است .

(ب) سطرهای ماتریسهای در بخش الف را به صورت برداری «بلند» در نظر بگیرید و مجموع توانهای دوم

$$SS_{tot} = SS_{mean} + SS_{fac\ 1} + SS_{fac\ 2} + SS_{res}$$

و مجموع حاصل ضربهای متقاطع

$$SCP_{tot} = SCP_{mean} + SCP_{fac\ 1} + SCP_{fac\ 2} + SCP_{res}$$

محاسبه کنید . سرانجام ماتریسهای SSP_{cor} ، $SSP_{fac\ 1}$ ، $SSP_{fac\ 2}$ و SSP_{res} را به ترتیب با درجات آزادی $1 - gh$ ، $g - 1$ ، $b - 1$ و $(g - 1)(b - 1)$ محاسبه کنید .

(ج) محاسبات بخش ب را در یک جدول MANOVA خلاصه کنید (*راهنمایی* : این جدول MANOVA با جدول MANOVA دوطرفه مربوط به مقایسهٔ عوامل اثرات متقابل وقتی $n = 1$ ، سازگار است) . توجه کنید که با $n = 1$، SSP_{res} در جدول MANOVA کلی یک ماتریس صفر با صفر درجهٔ آزادی است . اکنون ماتریس مجموع مربعات اثرات متقابل و حاصل ضربهای متقاطع به صورت ماتریس مجموع مربعات باقی مانده و حاصل ضربهای متقاطع در می آید) .

(د) با معلوم بودن خلاصهٔ بخش ج ، اثرات عمدهٔ عامل ۱ و عامل ۲ را در سطح $\alpha = .05$ آزمون کنید . [*راهنمایی* : از نتایج در (۶-۶۰) و (۶-۶۲) استفاده نموده ولی به جای $gh\,(n - 1)$ ، $(g - 1)(b - 1)$ قرار دهیم .

توجه : در این آزمونها باید $p \leq (g - 1)(b - 1)$ به طوری که SSP_{res} (با احتمال ۱) معین مثبت شود .

۱۰.۶ یک تکرار آزمایش تمرین ۹.۶ داده های زیر را حاصل می کند :

	عامل ۲ سطح ۱	سطح ۲	سطح ۳	سطح ۴
سطح ۱	$\begin{bmatrix} 14 \\ 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 16 \\ -4 \end{bmatrix}$
عامل ۱ : سطح ۲	$\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 15 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$
سطح ۳	$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -11 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -6 \\ 6 \end{bmatrix}$

جدول ۶-۵ اندازه‌های مربوط به کاسه لاک‌پشت (به میلی‌متر) برای لاک‌پشتهای رنگ‌شده

ماده			نر		
ارتفاع	پهنا	درازا	ارتفاع	پهنا	درازا
x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
۹۸	۸۱	۳۸	۹۳	۷۴	۳۷
۱۰۳	۸۴	۳۸	۹۴	۷۸	۳۵
۱۰۳	۸۶	۴۲	۹۶	۸۰	۳۵
۱۰۵	۸۶	۴۲	۱۰۱	۸۴	۳۹
۱۰۹	۸۸	۴۴	۱۰۲	۸۵	۳۸
۱۲۳	۹۲	۵۰	۱۰۳	۸۱	۳۷
۱۲۳	۹۵	۴۶	۱۰۴	۸۳	۳۹
۱۳۳	۹۹	۵۱	۱۰۶	۸۳	۳۹
۱۳۳	۱۰۲	۵۱	۱۰۷	۸۲	۳۸
۱۳۳	۱۰۲	۵۱	۱۱۲	۸۹	۴۰
۱۳۴	۱۰۰	۴۸	۱۱۳	۸۸	۴۰
۱۳۶	۱۰۲	۴۹	۱۱۴	۸۶	۴۰
۱۳۸	۹۸	۵۱	۱۱۶	۹۰	۴۳
۱۳۸	۹۹	۵۱	۱۱۷	۹۱	۴۱
۱۴۱	۱۰۵	۵۳	۱۱۷	۹۱	۴۱
۱۴۷	۱۰۸	۵۷	۱۱۹	۹۳	۴۱
۱۴۹	۱۰۷	۵۵	۱۲۰	۸۹	۴۰
۱۵۳	۱۰۷	۵۶	۱۲۰	۹۳	۴۴
۱۵۵	۱۱۵	۶۳	۱۲۱	۹۵	۴۲
۱۵۵	۱۱۷	۶۰	۱۲۵	۹۳	۴۵
۱۵۸	۱۱۵	۶۲	۱۲۷	۹۶	۴۵
۱۵۹	۱۱۸	۶۳	۱۲۸	۹۵	۴۵
۱۶۲	۱۲۴	۶۱	۱۳۱	۹۵	۴۶
۱۷۷	۱۳۲	۶۷	۱۳۵	۱۰۶	۴۷

جدول ۶-۶ داده‌های مربوط به هزینهٔ حمل و نقل شیر

کامیونهای گازوئیلی			کامیونهای دیزلی		
x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
۱۶٫۴۴	۱۲٫۴۳	۱۱٫۲۳	۸٫۵۰	۱۲٫۲۶	۹٫۱۱
۷٫۱۹	۲٫۷۰	۳٫۹۲	۷٫۴۲	۵٫۱۳	۱۷٫۱۵
۹٫۹۲	۱٫۳۵	۹٫۷۵	۱۰٫۲۸	۳٫۳۲	۱۱٫۲۳
۴٫۲۴	۵٫۷۸	۷٫۷۸	۱۰٫۱۶	۱۴٫۷۲	۵٫۹۹
۱۱٫۲۰	۵٫۰۵	۱۰٫۶۷	۱۲٫۷۹	۴٫۱۷	۲۹٫۲۸
۱۴٫۲۵	۵٫۷۸	۹٫۸۸	۹٫۶۰	۱۲٫۲۷	۱۱٫۰۰
۱۳٫۵۰	۱۰٫۹۸	۱۰٫۶۰	۶٫۴۷	۸٫۸۹	۱۹٫۰۰
۱۳٫۳۲	۱۴٫۲۷	۹٫۴۵	۱۱٫۳۵	۹٫۹۵	۱۴٫۵۳
۲۹٫۱۱	۱۵٫۰۹	۳٫۲۸	۹٫۱۵	۲٫۹۴	۱۳٫۶۸
۱۲٫۶۸	۷٫۶۱	۱۰٫۲۳	۹٫۷۰	۵٫۰۶	۲۰٫۸۴
۷٫۵۱	۵٫۸۰	۸٫۱۳	۹٫۷۷	۱۷٫۸۶	۳۵٫۱۸
۹٫۹۰	۳٫۶۳	۹٫۱۳	۱۱٫۶۱	۱۱٫۷۵	۱۷٫۰۰
۱۰٫۲۵	۵٫۰۷	۱۰٫۱۷	۹٫۰۹	۱۳٫۲۵	۲۰٫۶۶
۱۱٫۱۱	۶٫۱۵	۷٫۶۱	۸٫۵۳	۱۰٫۱۴	۱۷٫۴۵
۱۲٫۱۷	۱۴٫۲۶	۱۴٫۳۹	۸٫۲۹	۶٫۲۲	۱۶٫۳۸
۱۰٫۲۴	۲٫۵۹	۶٫۰۹	۱۵٫۹۰	۱۲٫۹۰	۱۹٫۰۹
۱۰٫۱۸	۶٫۰۵	۱۲٫۱۴	۱۱٫۹۴	۵٫۶۹	۱۴٫۷۷
۸٫۸۸	۲٫۷۰	۱۲٫۲۳	۹٫۵۴	۱۶٫۷۷	۲۲٫۶۶
۱۶٫۴۴	۱۲٫۴۳	۱۱٫۲۳	۸٫۵۰	۱۲٫۲۶	۹٫۱۱
۱۲٫۳۴	۷٫۷۳	۱۱٫۶۸	۱۰٫۴۳	۱۷٫۶۵	۱۰٫۶۶
۸٫۵۱	۱۴٫۰۲	۱۲٫۰۱	۱۰٫۸۷	۲۱٫۵۲	۲۸٫۴۷
۲۶٫۱۶	۱۷٫۴۴	۱۶٫۸۹	۷٫۱۳	۱۳٫۲۲	۱۹٫۴۴
۱۲٫۹۵	۸٫۲۴	۷٫۱۸	۱۱٫۸۸	۱۲٫۱۸	۲۱٫۲۰
۱۶٫۹۳	۱۳٫۳۷	۱۷٫۵۹	۱۲٫۰۳	۹٫۲۲	۲۳٫۰۹
۱۴٫۷۰	۱۰٫۷۸	۱۴٫۵۸			
۱۰٫۳۲	۵٫۱۶	۱۷٫۰۰			
۸٫۹۸	۴٫۴۹	۴٫۲۶			
۹٫۷۰	۱۱٫۵۹	۶٫۸۳			
۱۲٫۲۷	۸٫۶۳	۵٫۵۹			
۹٫۴۹	۲٫۱۶	۶٫۲۳			
۸٫۲۲	۷٫۹۵	۶٫۷۲			
۱۳٫۷۰	۱۱٫۲۲	۴٫۹۱			
۸٫۲۱	۹٫۸۵	۸٫۱۷			
۱۵٫۸۶	۱۱٫۴۲	۱۳٫۰۶			
۹٫۱۸	۹٫۱۸	۹٫۴۹			
۱۲٫۴۹	۴٫۶۷	۱۱٫۴۹			
۱۷٫۳۲	۶٫۸۶	۴٫۴۴			

جدول ۶-۸ داده‌های مربوط به مصرف اکسیژن

مردان				زنان			
x_1 O_2 در حال استراحت (L/min)	x_2 O_2 در حال استراحت (kg/L/min)	x_3 O_2 در حال استراحت (L/min)	x_4 O_2 در حال استراحت (kg/L/min)	x_1 O_2 در حال استراحت (L/min)	x_2 O_2 در حال استراحت (kg/L/min)	x_3 O_2 ماکزیمم (L/min)	x_4 O_2 ماکزیمم (kg/L/min)
۰/۳۴	۳/۷۱	۲/۸۷	۳۰/۸۷	۰/۲۹	۵/۰۴	۱/۹۳	۳۳/۸۵
۰/۳۹	۵/۰۸	۳/۳۸	۴۳/۸۵	۰/۲۸	۳/۹۵	۲/۵۱	۳۵/۸۲
۰/۴۸	۵/۱۳	۴/۱۳	۴۴/۵۱	۰/۳۱	۴/۸۸	۲/۳۱	۳۶/۴۰
۰/۳۱	۳/۹۵	۳/۶۰	۴۶/۰۰	۰/۳۰	۵/۹۷	۱/۹۰	۳۷/۸۷
۰/۳۶	۵/۵۱	۳/۱۱	۴۷/۰۲	۰/۲۸	۴/۵۷	۲/۳۲	۳۸/۳۰
۰/۳۳	۴/۰۷	۳/۹۵	۴۸/۵۰	۰/۱۱	۱/۴۷	۲/۴۹	۳۹/۱۹
۰/۴۳	۴/۷۷	۴/۳۹	۴۸/۷۵	۰/۲۵	۴/۶۶	۲/۱۲	۳۹/۲۱
۰/۴۸	۶/۶۹	۳/۵۰	۴۸/۸۶	۰/۲۶	۵/۲۸	۱/۹۸	۳۹/۹۴
۰/۲۱	۳/۷۱	۲/۸۲	۴۸/۹۲	۰/۳۹	۷/۳۲	۲/۲۵	۴۲/۴۱
۰/۳۲	۴/۳۵	۳/۵۹	۴۸/۳۸	۰/۳۷	۶/۲۲	۱/۷۱	۲۸/۹۷
۰/۵۴	۷/۸۹	۳/۴۷	۵۰/۵۶	۰/۳۱	۴/۲۰	۲/۷۶	۳۷/۸۰
۰/۳۲	۵/۳۷	۳/۰۷	۵۱/۱۵	۰/۳۵	۵/۱۰	۲/۱۰	۳۱/۱۰
۰/۴۰	۴/۹۵	۴/۴۳	۵۵/۳۴	۰/۲۹	۴/۴۶	۲/۵۰	۳۸/۳۰
۰/۳۱	۴/۹۷	۳/۵۶	۵۶/۶۷	۰/۳۳	۵/۶۰	۳/۰۶	۵۱/۸۰
۰/۴۴	۶/۶۸	۳/۸۶	۵۸/۴۹	۰/۱۸	۲/۸۰	۲/۴۰	۳۷/۶۰
۰/۳۲	۴/۸۰	۳/۳۱	۴۹/۹۹	۰/۲۸	۴/۰۱	۲/۵۸	۳۶/۷۸
۰/۵۰	۶/۴۳	۳/۲۹	۴۲/۲۵	۰/۴۴	۶/۶۹	۳/۰۵	۴۶/۱۶
۰/۳۶	۵/۹۹	۳/۱۰	۵۱/۷۰	۰/۲۲	۴/۵۵	۱/۸۵	۳۸/۹۵
۰/۴۸	۶/۳۰	۴/۸۰	۶۳/۳۰	۰/۳۴	۵/۷۳	۲/۴۳	۴۰/۶۰
۰/۴۰	۶/۰۰	۳/۰۶	۴۶/۲۳	۰/۳۰	۵/۱۲	۲/۵۸	۴۳/۶۹
۰/۴۲	۶/۰۴	۳/۸۵	۵۵/۰۸	۰/۳۱	۴/۷۷	۱/۹۷	۳۰/۴۰
۰/۵۵	۶/۴۵	۵/۰۰	۵۸/۸۰	۰/۲۷	۵/۱۶	۲/۰۳	۳۹/۴۶
۰/۵۰	۵/۵۵	۵/۲۳	۵۷/۴۶	۰/۶۶	۱۱/۰۵	۲/۳۲	۳۹/۳۴
۰/۳۴	۴/۲۷	۴/۰۰	۵۰/۳۲	۰/۳۵	۵/۳۷	۲/۲۵	۳۵/۰۷

منبع : داده‌های اس . روکیکی

جدول ۶-۹ داده‌های مربوط به زوجها

نرخ بندی شوهر برای زن				نرخ بندی زن برای شوهر			
x_1	x_2	x_3	x_4	x_1	x_2	x_3	x_4
۲	۳	۵	۵	۴	۴	۵	۵
۵	۵	۴	۴	۴	۵	۵	۵
۴	۵	۵	۵	۴	۴	۵	۵
۴	۳	۴	۴	۴	۵	۵	۵
۳	۳	۵	۵	۴	۴	۵	۵
۳	۳	۴	۵	۳	۳	۴	۴
۳	۴	۴	۴	۴	۳	۵	۴
۴	۴	۵	۵	۳	۴	۵	۵
۴	۵	۵	۵	۴	۴	۵	۴
۴	۴	۳	۳	۳	۴	۴	۴
۴	۴	۵	۵	۴	۵	۵	۵
۵	۵	۴	۴	۵	۵	۵	۵
۴	۴	۴	۴	۴	۴	۵	۵
۴	۳	۵	۵	۴	۴	۴	۴
۴	۴	۵	۵	۴	۴	۵	۵
۳	۳	۴	۵	۳	۴	۴	۴
۴	۵	۴	۴	۵	۵	۵	۵
۵	۵	۵	۵	۴	۵	۴	۴
۵	۵	۴	۴	۳	۴	۴	۴
۴	۴	۴	۴	۵	۳	۴	۴
۴	۴	۴	۴	۵	۳	۴	۴
۴	۴	۴	۴	۵	۳	۴	۴
۴	۴	۴	۴	۴	۵	۴	۴
۳	۴	۵	۵	۲	۵	۵	۵
۵	۳	۵	۵	۳	۴	۵	۵
۵	۵	۳	۳	۴	۳	۵	۵
۳	۳	۴	۴	۴	۴	۴	۴
۴	۴	۴	۴	۴	۴	۵	۵
۳	۳	۵	۵	۳	۴	۴	۴
۴	۴	۳	۳	۴	۴	۵	۴
۴	۴	۵	۵	۴	۴	۵	۵

منبع : داده‌های ای . هات فیلد .

T.6.12

جدول ۶-۱۰ داده‌های مربوط به حشرات گزنده

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
۸۵	۴۱	۳۱	۱۳	۲۵	۹	۸	
۸۷	۳۸	۳۲	۱۴	۲۲	۱۳	۱۳	
۹۴	۴۴	۳۶	۱۵	۲۷	۸	۹	
۹۲	۴۳	۳۲	۱۷	۲۸	۹	۹	
۹۶	۴۳	۳۵	۱۴	۲۶	۱۰	۱۰	
۹۱	۴۴	۳۶	۱۲	۲۴	۹	۹	
۹۰	۴۲	۳۶	۱۶	۲۶	۹	۹	
۹۲	۴۳	۳۶	۱۷	۲۶	۹	۹	
۹۱	۴۱	۳۶	۱۴	۲۳	۹	۹	
۸۷	۳۸	۳۵	۱۱	۲۴	۹	۱۰	
۹۷	۴۵	۳۹	۱۷	۲۷	۹	۱۰	
۸۹	۳۸	۳۶	۱۳	۲۲	۹	۹	
۹۴	۴۵	۳۷	۱۳	۲۶	۹	۹	
۹۶	۴۴	۳۷	۱۴	۲۴	۹	۱۰	
۱۰۴	۴۹	۳۵	۱۴	۲۱	۱۰	۱۰	
۹۴	۴۱	۳۱	۱۷	۲۶	۱۰	۹	
۹۹	۴۴	۳۱	۱۸	۲۸	۱۰	۹	
۹۴	۳۸	۳۲	۱۳	۲۲	۹	۹	
۹۴	۴۳	۳۷	۱۶	۲۶	۹	۱۰	*L. torrens*
۹۳	۴۳	۳۸	۱۴	۲۸	۱۰	۱۰	
۹۵	۴۴	۳۷	۱۸	۲۷	۱۰	۱۰	
۹۵	۴۵	۳۹	۱۳	۲۷	۱۰	۱۰	
۹۶	۳۹	۳۷	۱۲	۲۶	۸	۸	
۱۰۳	۴۶	۳۴	۱۸	۲۶	۱۰	۱۰	
۱۰۸	۴۴	۳۷	۱۴	۲۵	۱۱	۱۱	
۱۰۶	۴۷	۳۸	۱۵	۲۶	۱۰	۱۰	
۱۰۵	۴۶	۳۴	۱۴	۳۱	۱۰	۱۱	
۱۰۳	۴۴	۳۴	۱۵	۲۳	۱۰	۱۰	
۱۰۰	۴۱	۳۵	۱۴	۲۴	۱۰	۱۰	
۱۰۹	۴۴	۳۶	۱۳	۲۷	۱۱	۱۰	
۱۰۴	۴۵	۳۶	۱۵	۳۰	۱۰	۱۰	

T 6.12

ادامهٔ جدول ۶-۱۰

x_7	x_6	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	
۱۰	۹	۲۳	۱۴	۳۵	۴۰	۹۵	
۱۰	۹	۲۹	۱۵	۳۴	۴۴	۱۰۴	
۱۰	۹	۲۲	۱۲	۳۷	۴۰	۹۰	
۱۰	۱۰	۳۰	۱۴	۳۷	۴۶	۱۰۴	
۹	۹	۲۵	۱۱	۳۷	۱۹	۸۶	
۷	۶	۳۱	۱۴	۳۸	۴۰	۹۴	
۱۰	۱۰	۳۳	۱۴	۳۹	۴۸	۱۰۳	
۸	۹	۲۵	۱۲	۳۵	۴۱	۸۲	
۹	۹	۳۲	۱۵	۴۲	۴۳	۱۰۳	
۹	۹	۲۵	۱۵	۴۰	۴۳	۱۰۱	
۱۱	۱۱	۲۹	۱۴	۴۴	۴۵	۱۰۳	
۱۰	۱۱	۳۱	۱۸	۴۰	۴۳	۱۰۰	
۱۰	۱۰	۳۱	۱۵	۴۲	۴۱	۹۹	
۱۰	۱۰	۳۴	۱۶	۴۳	۴۴	۱۰۰	
۱۱	۱۲	۳۸	۱۶	۴۴	۴۷	۱۱۲	
۹	۱۰	۳۲	۱۴	۳۷	۴۸	۹۹	
۸	۹	۳۱	۱۹	۴۱	۴۵	۹۸	
۱۰	۱۱	۲۴	۱۴	۴۲	۴۶	۱۰۱	
۹	۱۰	۲۸	۱۳	۳۷	۴۵	۹۹	
۹	۸	۲۰	۱۵	۴۴	۴۷	۱۰۳	
۸	۹	۳۲	۱۲	۳۸	۴۰	۹۸	*L. carteri*
۱۰	۱۰	۲۸	۱۴	۳۶	۴۶	۱۰۱	
۹	۹	۳۲	۱۷	۴۰	۴۶	۱۰۱	
۱۰	۱۰	۳۳	۱۵	۳۹	۴۷	۹۸	
۹	۱۰	۳۲	۱۵	۴۲	۴۵	۹۹	
۱۰	۱۰	۳۰	۱۵	۴۴	۴۵	۱۰۲	
۹	۱۰	۳۲	۱۵	۳۷	۴۵	۹۷	
۹	۹	۲۰	۱۴	۴۰	۳۹	۹۶	
۸	۹	۲۰	۱۲	۳۳	۳۹	۸۹	
۹	۹	۳۳	۱۴	۳۸	۴۲	۹۹	
۱۰	۹	۳۶	۱۷	۴۱	۴۵	۱۱۰	

ادامهٔ جدول ۶-۱۰

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
۹۹	۴۴	۳۵	۱۶	۳۱	۱۰	۱۰
۱۰۳	۴۳	۳۸	۱۴	۳۲	۱۰	۱۰
۹۵	۴۶	۳۶	۱۵	۳۱	۸	۸
۱۰۱	۴۷	۳۸	۱۴	۳۷	۱۱	۱۱
۱۰۳	۴۷	۴۰	۱۵	۳۲	۱۱	۱۱
۹۹	۴۳	۳۷	۱۴	۲۳	۱۱	۱۰
۱۰۵	۵۰	۴۰	۱۶	۳۳	۱۲	۱۱
۹۹	۴۷	۳۹	۱۴	۳۴	۷	۷

منبع : داده‌های ویلیام آتچلی .

6.13

جدول ۶-۱۱ محتوی مواد معدنی در استخوانها (بعد از یک‌سال)

شماره فرد	شعاع نافذ	شعاع	استخوان بازویی نافذ	استخوان بازو	زند زیرین نافذ	زند زیرین
۱	۱٫۰۲۷	۱٫۰۵۱	۲٫۲۶۸	۲٫۲۴۶	۰٫۸۶۹	۰٫۹۶۴
۲	۰٫۸۵۷	۰٫۸۱۷	۱٫۸۱۸	۱٫۷۱۰	۰٫۶۰۲	۰٫۶۸۹
۳	۰٫۸۷۵	۰٫۸۸۰	۱٫۹۵۳	۱٫۷۵۶	۰٫۷۶۵	۰٫۷۳۸
۴	۰٫۸۳۷	۰٫۶۹۸	۱٫۶۶۸	۱٫۴۴۳	۰٫۷۶۱	۰٫۶۹۸
۵	۰٫۸۱۱	۰٫۸۱۳	۱٫۶۴۳	۱٫۶۶۱	۰٫۵۵۱	۰٫۶۱۹
۶	۰٫۶۴۰	۰٫۷۳۴	۱٫۳۹۶	۱٫۳۷۸	۰٫۷۵۳	۰٫۵۱۵
۷	۰٫۹۴۷	۰٫۸۶۵	۱٫۸۵۱	۱٫۶۸۶	۰٫۷۰۸	۰٫۷۸۷
۸	۰٫۸۸۶	۰٫۸۰۶	۱٫۷۴۲	۱٫۸۱۵	۰٫۶۸۷	۰٫۷۱۵
۹	۰٫۹۹۱	۰٫۹۲۳	۱٫۹۳۱	۱٫۷۷۶	۰٫۸۴۴	۰٫۶۵۶
۱۰	۰٫۹۷۷	۰٫۹۲۵	۱٫۹۳۳	۲٫۱۰۶	۰٫۸۶۹	۰٫۷۸۹
۱۱	۰٫۸۲۵	۰٫۸۲۶	۱٫۶۰۹	۱٫۶۵۱	۰٫۶۵۴	۰٫۷۲۶
۱۲	۰٫۸۵۱	۰٫۷۶۵	۲٫۳۵۲	۱٫۹۸۰	۰٫۶۹۲	۰٫۵۲۶
۱۳	۰٫۷۷۰	۰٫۷۳۰	۱٫۴۷۰	۱٫۴۲۰	۰٫۶۷۰	۰٫۵۸۰
۱۴	۰٫۹۱۲	۰٫۸۷۵	۱٫۸۴۶	۱٫۸۰۹	۰٫۸۲۳	۰٫۷۷۳

جدول ۶-۱۱ محتوی مواد معدنی در استخوانها (بعد از یك‌سال)

شماره فرد	شعاع نافذ	شعاع	استخوان بازویی نافذ	استخوان بازو	زند زیرین نافذ	زند زیرین
۱۵	۰٫۹۰۵	۰٫۸۲۶	۱٫۸۴۲	۱٫۵۷۹	۰٫۷۴۶	۰٫۷۲۹
۱۶	۰٫۷۵۶	۰٫۷۲۷	۱٫۷۴۷	۱٫۸۶۰	۰٫۶۵۶	۰٫۵۰۶
۱۷	۰٫۷۶۵	۰٫۷۶۴	۱٫۹۲۳	۱٫۹۴۱	۰٫۶۹۳	۰٫۷۴۰
۱۸	۰٫۹۳۲	۰٫۹۱۴	۲٫۱۹۰	۱٫۹۹۷	۰٫۸۸۳	۰٫۷۸۵
۱۹	۰٫۸۴۳	۰٫۷۸۲	۱٫۲۴۲	۱٫۲۲۸	۰٫۵۷۷	۰٫۶۲۷
۲۰	۰٫۸۷۹	۰٫۹۰۶	۲٫۱۶۴	۱٫۹۹۹	۰٫۸۰۲	۰٫۷۶۹
۲۱	۰٫۶۷۳	۰٫۵۳۷	۱٫۵۷۳	۱٫۳۳۰	۰٫۵۴۰	۰٫۴۹۸
۲۲	۰٫۹۴۹	۰٫۹۰۰	۲٫۱۳۰	۲٫۱۵۹	۰٫۸۰۴	۰٫۷۷۹
۲۳	۰٫۴۶۳	۰٫۶۳۷	۱٫۰۴۱	۱٫۲۶۵	۰٫۵۷۰	۰٫۶۳۴
۲۴	۰٫۷۷۶	۰٫۷۴۳	۱٫۴۴۲	۱٫۴۱۱	۰٫۵۸۵	۰٫۶۴۰

منبع : داده های اِورت اسمیت .

جدول ۷-۴ داده‌های مربوط به تمام شدن باطریها

Z_1 نرخ پر کردن (به آمپر)	Z_2 نرخ خالی شدن (به آمپر)	Z_3 عمق خالی شدن (درصد نرخ آمپر ساعت)	Z_4 درجهٔ حرارت (سانتی گراد)	Z_5 پایان پر کردن ولتاژ (به ولت)	Y چرخه های خرابی
۰/۳۷۵	۳/۱۳	۶۰/۰	۴۰	۲/۰۰	۱۰۱
۱/۰۰۰	۳/۱۳	۷۶/۸	۳۰	۱/۹۹	۱۴۱
۱/۰۰۰	۳/۱۳	۶۰/۰	۲۰	۲/۰۰	۹۶
۱/۰۰۰	۳/۱۳	۶۰/۰	۲۰	۱/۹۸	۱۲۵
۱/۶۲۵	۳/۱۳	۴۳/۲	۱۰	۲/۰۱	۴۳
۱/۶۲۵	۳/۱۳	۶۰/۰	۲۰	۲/۰۰	۱۶
۱/۶۲۵	۳/۱۳	۶۰/۰	۲۰	۲/۰۲	۱۸۸
۰/۳۷۵	۵/۰۰	۷۶/۸	۱۰	۲/۰۱	۱۰
۱/۰۰۰	۵/۰۰	۴۳/۲	۱۰	۱/۹۹	۳
۱/۰۰۰	۵/۰۰	۴۳/۲	۳۰	۲/۰۱	۳۸۶
۱/۰۰۰	۵/۰۰	۱۰۰/۰	۲۰	۲/۰۰	۴۵
۱/۶۲۵	۵/۰۰	۷۶/۸	۱۰	۱/۹۹	۲
۰/۳۷۵	۱/۲۵	۷۶/۸	۱۰	۲/۰۱	۷۶
۱/۰۰۰	۱/۲۵	۴۳/۲	۱۰	۱/۹۹	۷۸
۱/۰۰۰	۱/۲۵	۷۶/۸	۳۰	۲/۰۰	۱۶۰
۱/۰۰۰	۱/۲۵	۶۰/۰	۰	۲/۰۰	۳
۱/۶۲۵	۱/۲۵	۴۳/۲	۳۰	۱/۹۹	۲۱۶
۱/۶۲۵	۱/۲۵	۶۰/۰	۲۰	۲/۰۰	۷۳
۰/۳۷۵	۳/۱۳	۷۶/۸	۳۰	۱/۹۹	۳۱۴
۰/۳۷۵	۳/۱۳	۶۰/۰	۲۰	۲/۰۰	۱۷۰

منبع : از اس . سی دیک ، اچ ، لی بکی و جی بوزك انتخاب شده .