

تعریف می شود و آنرا به گونه ای نه چندان دقیق به صورت نسبی از تغییر پذیری در داده ها که با مدل تحلیل واریانس «توجیه» می شود تعبیر می کنیم. پس، در داده های آزمون مقاومت الیاف مصنوعی، عامل «درصد پنبه» حدود ۷۴٫۶۹ درصد تغییر پذیری را در مقاومت کششی توجیه می کند. به وضوح باید داشته باشیم  $0 \leq R^2 \leq 1$ ، که مقادیر بزرگتر مطلوبترند. «STD DEV» ریشه دوم میانگین مربع خطاست،  $\sqrt{87.60} = 9.36$  و «C.V.» ضریب تغییرات است که با  $100 \left( \frac{\sqrt{MSE}}{\bar{y}} \right)$  تعریف می شود. ضریب تغییرات، تغییر پذیری توجیه نشده یا تغییر پذیری مانده ای داده ها را به عنوان درصدی از میانگین متغیر پاسخ اندازه می گیرد.

برنامه کامپیوتری همچنین مانده ها را که در برابری (۱۷.۳) تعریف شده اند محاسبه و ارائه می دهد. در فصل بعد، در چگونگی استفاده از مانده ها برای بازبینی کفایت مدل بحث خواهیم کرد.

### ۷.۳ مسائل

۱.۳ مقاومت کششی سیمان پرتلند تحت مطالعه است. از نظر اقتصادی می توانیم از چهار تکنیک متفاوت برای مخلوط کردن استفاده کنیم. داده های زیر جمع آوری شده اند.

تکنیک مخلوط سازی	مقاومت کششی (پوند بر اینچ مربع)			
۱	۳۱۲۹	۳۰۰۰	۲۸۶۵	۲۸۹۰
۲	۳۲۰۰	۳۳۰۰	۲۹۷۵	۳۱۵۰
۳	۲۸۰۰	۲۹۰۰	۲۹۸۵	۳۰۵۰
۴	۲۶۰۰	۲۷۰۰	۲۶۰۰	۲۷۶۵

(الف) فرض اثر تکنیک مخلوط کردن مواد را بر مقاومت سیمان آزمون کنید. از  $\alpha = 0.05$  استفاده کنید.

(ب) با استفاده از آزمون دامنه چندگانه دانکن جفتهای میانگینها را مقایسه کنید. ۲.۳ یک کارخانه بافندگی تعداد زیادی ماشینهای بافت دارد. فرض بر این است که خروجی منسوج هر ماشین در هر دقیقه یکسان است. برای بررسی این فرض، پنج ماشین را به تصادف انتخاب کرده و خروجی آنها را در زمانهای متفاوت در نظر گرفته ایم. داده های زیر به دست آمده اند.

ماشین	خروجی (پوند در دقیقه)			
۱	۱۴۰	۱۴۱	۱۴۲	۱۴۱
۲	۱۳۹	۱۳۸	۱۳۹	۱۳۹
۳	۱۴۱	۱۴۲	۱۴۱	۱۳۷
۴	۱۳۶	۱۳۸	۱۴۰	۱۴۰
۵	۱۳۸	۱۳۶	۱۳۹	۱۳۸

(الف) توضیح دهید که چرا این آزمایش یک آزمایش با اثرهای تصادفی است. آیا خروجی شینها برابرند؟

(ب) تغییرپذیری بین ماشینها را برآورد کنید.

(ج) واریانس خطای آزمایشی را برآورد کنید.

(د) یک بازه اطمینان ۹۵ درصد برای  $\sigma_T^2 / (\sigma_T^2 + \sigma^2)$  پیدا کنید.

۳.۱ آزمایشی برای تعیین اینکه آیا چهار دمای مشخص کوره در چگالی یک نوع آجر خاص مؤثر است یا نه اجرا شده است و داده‌های زیر به دست آمده‌اند.

دما	چگالی				
۱۰۰	۲۱٫۸	۲۱٫۹	۲۱٫۷	۲۱٫۶	۲۱٫۷
۱۲۵	۲۱٫۷	۲۱٫۴	۲۱٫۵	۲۱٫۴	
۱۵۰	۲۱٫۹	۲۱٫۸	۲۱٫۸	۲۱٫۶	۲۱٫۵
۱۷۵	۲۱٫۹	۲۱٫۷	۲۱٫۸	۲۱٫۴	

(الف) آیا دمای کوره در چگالی آجرها مؤثر بوده است؟

(ب) میانگینها را به وسیلهٔ آزمون دامنهٔ چندگانهٔ دانکن مقایسه کنید.

(ج) با استفاده از روش نموداری که در بخش ۱.۴.۳ بحث شد تعیین کنید کدام یک از میانگینها متفاوت‌اند. آیا نتایج حاصل از این روش با نتایج آزمون دامنهٔ چندگانهٔ دانکن در بند (ب) مطابقت می‌کنند؟

۴.۳ یک تولیدکنندهٔ دستگاههای تلویزیون محققان به مطالعهٔ میزان رسانندگی لامپها در اثر چهار نوع پوشش متفاوت لامپهای تصویر رنگی است. داده‌های رسانندگی به صورت زیر بوده‌اند.

نوع پوشش	رسانندگی			
۱	۱۴۳	۱۴۱	۱۵۰	۱۴۶
۲	۱۵۲	۱۴۹	۱۳۷	۱۴۳
۳	۱۳۴	۱۳۶	۱۳۲	۱۲۷
۴	۱۲۹	۱۲۷	۱۳۲	۱۲۹

(الف) آیا تفاوتی در میزان رسانندگی حاصل از نوع پوشش وجود دارد؟  $\alpha$  را برابر ۰٫۰۵ بگیرد.

(ب) میانگین کل و اثرهای تیماری را برآورد کنید.

(ج) یک برآورد بازه‌ای ۹۵ درصد برای میانگین پوشش نوع ۴ محاسبه کنید. یک برآورد بازه‌ای

۹۹ درصد برای میانگین اختلاف پوششهای نوع ۱ و ۴ محاسبه کنید.

(د) تمام جفتهای میانگینها را با استفاده از آزمون دامنه چندگانه دانکن به ازای  $\alpha = 0.05$  آزمون کنید.  
 (ه) با استفاده از روش نموداری که در بخش ۱.۴.۳ برای مقایسه میانگینها گفته ایم، کدام نوع پوشش بالاترین میزان رسانندگی را به وجود می آورد؟  
 (و) گیریم در حال حاضر از پوشش نوع ۴ استفاده می شود، در مینیمسازی میزان رسانندگی چه توصیه هایی به تولیدکننده می کنید.  
 ۵.۳ برای سه نوع مدارهای مختلف که می توانند در یک مکانیسم کلید قطع خودکار استفاده شوند زمان پاسخ را برحسب هزارم ثانیه تعیین کرده ایم. نتایج به قرار زیر بوده اند.

نوع مدار	زمان پاسخ				
۱	۹	۱۲	۱۰	۸	۱۵
۲	۲۰	۲۱	۲۳	۱۷	۳۰
۳	۶	۵	۸	۱۶	۷

(الف) این فرض را که سه نوع مدار زمان پاسخ برابر دارند آزمون کنید. از  $\alpha = 0.01$  استفاده کنید.

(ب) از آزمون توکی برای مقایسه جفت میانگینهای تیمار استفاده کنید.  
 (ج) با فرض آنکه شما خارج از جریان آزمایش گمان می کنید که زمان پاسخ مدار نوع ۲ از دو مدار دیگر تفاوت می کند یک مجموعه مقابله متعامد ارائه دهید.  
 (د) اگر شما مهندس طرح باشید و بخواهید زمان پاسخ را مینیمم کنید کدام نوع مدار را انتخاب می کنید؟

۶.۳ عمر مؤثر ماده عایق کننده در بار شتابدار ۳۵ کیلوولت تحت مطالعه است. داده های آزمایشی را برای چهار نوع ماده به دست آورده ایم. نتایج به صورت زیرند:

نوع ماده	عمر برحسب ساعت در بار ۳۵ کیلوولت				
۱	۱۷٫۶	۱۸٫۹	۱۶٫۳	۱۷٫۴	۲۰٫۱
۲	۱۶٫۹	۱۵٫۳	۱۸٫۶	۱۷٫۱	۱۹٫۵
۳	۲۱٫۴	۲۳٫۶	۱۹٫۴	۱۸٫۵	۲۰٫۵
۴	۱۹٫۳	۲۱٫۱	۱۶٫۹	۱۷٫۵	۱۸٫۳

(الف) آیا هیچ نشانه ای وجود دارد که مواد متفاوت اند؟  
 (ب) اگر عمر طولانی مورد نظر باشد، کدام ماده را پیشنهاد می کنید؟

۷.۳ چهار طرح مختلف مدار کامپیوتر رقمی برای مقایسه میزان اغتشاش موجود تحت مطالعه قرار گرفته‌اند. داده‌های زیر به دست آمده‌اند:

طرح مدار	اغتشاش مشاهده شده				
	۱	۱۹	۲۰	۱۹	۳۰
۱	۱۹	۲۰	۱۹	۳۰	۸
۲	۸۰	۶۱	۷۳	۵۶	۸۰
۳	۴۷	۲۶	۲۵	۳۵	۵۰
۴	۹۵	۴۶	۸۳	۷۸	۹۷

(الف) آیا میزان اغتشاش موجود برای چهار طرح یکسان است؟  
 (ب) برای این مسأله، مؤلفه‌های مدل مناسب را برآورد کنید. تمام تفاوت‌های ممکن بین جفت تیمارها را برآورد کنید. آیا این تفاوت‌های تیماری به صورتی یکتا برآورد می‌شوند؟ اگر بله، چرا؟  
 (ج) شما کدام طرح مدار را برای استفاد انتخاب می‌کنید؟ اغتشاش کم بهتر است.  
 ۸.۳ تولیدکننده‌ای گمان می‌کند که بسته‌های مواد خام که به وسیله تهیه‌کننده او آماده می‌شوند به صورتی معنی‌دار در محتوی کلسیم متفاوت‌اند. تعداد زیادی بسته در انبار موجود است. پنج بسته را برای مطالعه به تصادف انتخاب کرده‌اند. شیمیدانی روی هر بسته پنج اندازه‌گیری انجام داده است، و داده‌های زیر را به دست آورده است:

بسته ۱	بسته ۲	بسته ۳	بسته ۴	بسته ۵
۲۳٫۴۶	۲۳٫۵۹	۲۳٫۵۱	۲۳٫۲۸	۲۳٫۲۹
۲۳٫۴۸	۲۳٫۴۶	۲۳٫۶۴	۲۳٫۴۰	۲۳٫۴۶
۲۳٫۵۶	۲۳٫۴۲	۲۳٫۴۶	۲۳٫۳۷	۲۳٫۳۷
۲۳٫۳۹	۲۳٫۴۹	۲۳٫۵۲	۲۳٫۴۶	۲۳٫۳۲
۲۳٫۴۰	۲۳٫۵۰	۲۳٫۴۹	۲۳٫۳۹	۲۳٫۳۸

(الف) آیا تغییراتی معنی‌دار از بسته‌ای به بسته دیگر وجود دارد؟  
 (ب) مؤلفه‌های واریانس را برآورد کنید.  
 (ج) یک بازه اطمینان ۹۵ درصد برای  $\sigma_T^2 / (\sigma_T^2 + \sigma^2)$  به دست آورید.  
 ۹.۳ در یک کارگاه فلزکاری از چندین کوره برای حرارت دادن نمونه‌ها استفاده می‌شود. فرض بر این است که تمام کوره‌ها با یک دما عمل می‌کنند، اما در درست بودن این موضوع تردید داریم. سه کوره را به تصادف انتخاب کرده و پیاپی دماهای آنها را یادداشت کرده‌ایم. داده‌های زیر جمع‌آوری شده‌اند:

کوره	دما			
۱	۴۹۱٫۵۰	۴۹۸٫۳۰	۴۹۸٫۱۰	۴۹۳٫۵۰
۲	۴۸۸٫۵۰	۴۸۴٫۶۵	۴۷۹٫۹۰	۴۷۷٫۳۵
۳	۴۹۰٫۱۰	۴۸۴٫۸۰	۴۸۸٫۲۵	۴۷۳٫۰۰
				۴۷۱٫۸۵
				۴۷۸٫۶۵

(الف) آیا تغییراتی معنی دار در دمای بین کوره‌ها وجود دارد؟  
 (ب) برای این مدل مؤلفه‌های واریانس را برآورد کنید.  
 ۱۰.۳ از چهار شیمیدان خواسته شده است که درصد الکل متیلیک یک ترکیب خاص شیمیایی را تعیین کنند. هر یک از این شیمیدانها سه اندازه‌گیری انجام داده و نتایج زیر را گزارش کرده‌اند:

شیمیدان	درصد الکل متیلیک		
	۱	۸۴٫۹۹	۸۴٫۰۴
۲	۸۵٫۱۵	۸۵٫۱۳	۸۴٫۸۸
۳	۸۴٫۷۲	۸۴٫۴۸	۸۵٫۱۶
۴	۸۴٫۲۰	۸۴٫۱۰	۸۴٫۵۵

(الف) آیا گزارش شیمیدانها تفاوت معنی دار دارد؟ از  $\alpha = 0.05$  استفاده کنید.  
 (ب) اگر دومین شیمیدان تازه‌کار باشد در شروع آزمایش یک مجموعه بامعنا از مقابله‌های متعامد بسازید که تصور می‌کنید مفیدند.  
 ۱۱.۳ سه نوع باتری تحت مطالعه‌اند. گمان می‌رود که طول عمر باطریها (برحسب هفته) متفاوت باشند. نتایج آزمون پنج باتری از هر نوع به صورت زیر است.

طول عمر برحسب هفته		
نوع ۱	نوع ۲	نوع ۳
۱۰۰	۷۶	۱۰۸
۹۶	۸۰	۱۰۰
۹۲	۷۵	۹۶
۹۶	۸۴	۹۸
۹۲	۸۲	۱۰۰

(الف) آیا این باطریها طول عمر متفاوت دارند؟  
 (ب) مؤلفه‌های مدل آماری مناسب را برآورد کنید.  
 (ج) یک برآورد بازه‌ای ۹۵ درصد برای میانگین طول عمر باطری نوع ۲ ارائه دهید. یک برآورد بازه‌ای ۹۹ درصد برای تفاوت میانگینهای طول عمر باطریهای نوع ۲ و ۳ ارائه دهید.

(د) شما کدام نوع را برای استفاده انتخاب می‌کنید؟ اگر تولیدکننده ضمانت کند که هر باطری را که کمتر از ۸۵ هفته کارکرد عوض کند، تولیدکننده انتظار تعویض چه درصدی را دارد؟  
 ۱۲.۳ چهار کاتالیزور که می‌توانند بر غلظت یک جزء از سه جزء مواد ترکیب‌کننده یک مایع اثر داشته باشند تحت بررسی قرار گرفته‌اند. غلظت‌های زیر حاصل شده‌اند.

کاتالیزور

۱	۲	۳	۴
۵۸٫۲	۵۶٫۳	۵۰٫۱	۵۲٫۹
۵۷٫۲	۵۴٫۵	۵۴٫۲	۴۹٫۹
۵۸٫۴	۵۷٫۰	۵۵٫۴	۵۰٫۰
۵۵٫۸	۵۵٫۳		۵۱٫۷
۵۴٫۹			

(الف) آیا چهار کاتالیزور اثری یکسان در غلظت دارند؟

(ب) مؤلفه‌های مدل آماری مناسب را برآورد کنید.

(ج) برای کاتالیزور ۱ یک برآورد بازه اطمینان ۹۹ درصد از میانگین پاسخ بسازید.

۱۳.۳ آزمون برابری میانگین‌های دو جامعه نرمال را در نظر بگیرید، که در آنها واریانسها نامعلوم اما به فرض مساوی‌اند. شیوه مناسب آزمون، آزمون  $t$ ی ادغام شده است. نشان دهید که آزمون  $t$ ی ادغام شده هم‌ارز تحلیل واریانس تک‌عاملی است.

۱۴.۳ نشان دهید که واریانس ترکیب خطی  $\sum_{i=1}^a c_i y_i$ ، برابر  $\sum_{i=1}^a n_i c_i^2 \sigma^2$  است.

۱۵.۳ در یک آزمایش با اثرهای تثبیت‌شده فرض کنید برای هر یک از چهار تیمار  $n$  مشاهده داشته باشیم. گیریم  $Q_1^2$ ،  $Q_2^2$  و  $Q_3^2$  مؤلفه‌های مقابله‌های متعامد هر کدام با یک درجه آزادی باشند. ثابت کنید که  $SS_{\text{تیمارها}} = Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2$ .

۱۶.۳ داده‌های مسأله ۵.۳ را در نظر بگیرید.

(الف) معادلات نرمال کمترین مربعات را برای این مسأله نوشته، و آنها را نسبت به  $\hat{\mu}$  و  $\hat{\tau}_i$  با در نظر گرفتن قید معمولی ( $\sum_{i=1}^3 \hat{\tau}_i = 0$ ) حل کنید.  $\tau_1 - \tau_2$  را برآورد کنید.

(ب) معادلات قسمت (الف) را با استفاده از قید  $\hat{\tau}_3 = 0$  حل کنید. آیا برآوردکننده‌های  $\hat{\tau}_i$  و  $\hat{\mu}$  هم‌انتهایی هستند که در قسمت (الف) به‌دست آوردید؟ چرا؟ حال  $\tau_1 - \tau_2$  را برآورد کرده و جواب خود را با جواب قسمت (الف) مقایسه کنید. چه حکمی می‌توانید درباره برآوردکردن مقابله‌ها برحسب متغیرهای  $\tau_i$  ارائه دهید؟

(ج) با استفاده از دو جواب معادلات نرمال،  $\mu + \tau_1$ ،  $\mu + \tau_1 - \tau_2 - \tau_3$ ،  $2\tau_1 - \tau_2 - \tau_3$  و  $\mu + \tau_1 + \tau_2$  را برآورد کنید. نتایج به‌دست آمده در هر مورد را با هم مقایسه کنید.

۱۷.۳ داده‌های مسأله ۴.۳ را در نظر بگیرید. با استفاده از روش کمترین تفاوت معنی‌دار تفاوت بین جفت‌های میانگینها را آزمون کنید. نتایج خود را با آنهایی که از آزمون دامنه چندگانه دانکن به دست می‌آید مقایسه کنید؛ بند (د) مسأله ۴.۳ را ببینید.

۱۸.۳ با استفاده از روش کمترین تفاوت معنی‌دار، تفاوت‌های معنی‌دار انواع مدارها را برای داده‌های مسأله ۵.۳ پیدا کنید.

۱۹.۳ روش اثرهای تصادفی یکطرفه متعادل را در نظر بگیرید. به منظور تعیین بازه اطمینان  $(1 - \alpha)$  ۱۰۰ درصد برای  $\sigma^2 / (\sigma^2 + \sigma^2)$  شیوه‌ای ارائه دهید.

۲۰.۳ داده‌های مسأله ۵.۳ را در نظر بگیرید. اگر مدار نوع ۱، شاهد باشد، تعیین کنید که آیا مدارهای نوع ۲ یا ۳ برحسب میانگین زمان پاسخ با مدار نوع ۱ تفاوت دارند یا نه.