فصل پنجم

مبادی احتمال

۵ـ۱ نظریه احتمال

واژه «احتمال» نشان‌دهنده «عدم اطمینان» نسبت به آینده است. ما در بسیاری از موارد از پیش‌بینی دقیق آینده ناتوان هستیم و برای اندازه‌گیری این عدم اطمینان از نظریه احتمال استفاده می‌کنیم؛ مثلاً شما نمی‌دانید که وضع هوای فردا دقیقاً چگونه خواهد بود، نمی‌توانید به طور قطع نتیجه بازی فوتبال بین تیم ملی ایران و یک کشور دیگر را تعیین کنید یا مدیری نمی‌داند امکان آنکه تقاضای محصولاتش بین ۶۰۰ تا ۷۰۰ واحد باشد چقدر است؛ در اینجا از نظریه احتمال بدین صورت استفاده می‌شود که: احتمال اینکه فردا هوا آفتابی باشد ۴۰ درصد است، احتمال اینکه تیم ملی ایران برنده شود ۶۵ درصد است یا احتمال اینکه تقاضای محصولات بین ۶۰۰ تا ۷۰۰ واحد باشد ۲۸ درصد است.

ما در بسیاری از موارد در مورد حوادثی که در اطرافمان می‌گذرد اطلاعاتی، هرچند به صورت پراکنده، داریم یا می‌توانیم اطلاعاتی کسب کنیم. با سازماندهی کردن این اطلاعات به صورت منظم قادر خواهیم بود در تصمیم‌گیریهای خود، به جای اینکه از روشهای سرانگشتی استفاده کنیم و یا تیری در تاریکی بیندازیم، از نظریه احتمال برای رسیدن به نتیجه بهتر استفاده کنیم. مدیران نیز می‌توانند در پیش‌بینی و تصمیم‌گیریهای خود از نظریه احتمال بهره زیادی ببرند.

افرادی که در ایجاد و توسعه نظریه احتمال نقش به‌سزایی داشتند عبارت‌اند از: برنولی، دوموآور، بیز، لاگرانژ و لاپلاس.

تمرین

۱. نظریه احتمال چه کاربردهایی برای مدیران دارد؟

۲. شرکتهای بیمه به دانستن نظریه احتمال نیازمند هستند. ضمن ارائه چند سؤال در این زمینه، توضیح دهید که این شرکتها چگونه از نظریه احتمال استفاده می‌کنند؟

۳. «استفاده از این کالا ممکن است برای سلامتی شما مضر باشد. این کالا حاوی ساکارین است که معلوم شده است موجب سرطان در حیوانات آزمایشگاهی می‌شود.» نظریه احتمال چه نقشی در این عبارت ایفا می‌کند؟

۴. چهار نفر از کسانی را که در توسعه نظریه احتمال نقش عمده‌ای داشته‌اند، نام ببرید.

۵ـ۲ برخی از مفاهیم اساسی احتمال

قبل از هر چیز، مفاهیم اساسی‌ای را که در نظریه احتمال به کار می‌رود، توضیح می‌دهیم و برای درک بهتر، برای هر کدام مثالی می‌آوریم.

۵ـ۲ـ۱ مفهوم احتمال

به طور کلی می‌توان احتمال را شانس وقوع پیشامد خاصی تعریف کرد؛ به تعبیری دیگر، احتمال وقوع یک پیشامد برابر نسبت دفعاتی است که پیشامد خاصی در تکرارهای زیاد رخ خواهد داد (این مفهوم به فراوانی نسبی که در فصل سوم مطرح شد نزدیک است)؛ مثلاً در پرتاب سکه، در تکرارهای زیاد در نیمی از موارد شیر ظاهر می‌شود؛ بنابراین احتمال ظاهر شدن شیر در پرتاب یک سکه ۵۰ درصد است. در پرتاب یک تاس، احتمال اینکه عدد ۴ ظاهر شود $\frac{1}{6}$ است. از این به بعد احتمال را با حرف P نشان می‌دهیم.

۵ـ۲ـ۲ احتمال عینی و ذهنی

برای درک مفهوم احتمال عینی و ذهنی به این دو مثال توجه کنید. در مثال اول فرض کنید می‌خواهید از کیسه‌ای که دارای ۵ مهره و ۳ عدد آنها سفید است،

مهره‌ای را به تصادف بیرون بیاورید و احتمال بیرون آمدن یک مهره سفید برایتان مهم باشد. در مثال دوم فرض کنید یکی از مسافران پروازهای اصفهان ـ تهران را برحسب تصادف انتخاب کرده، می‌پرسید احتمال اینکه هواپیمای اصفهان ـ تهران در زمان مقرر به مقصد برسد چقدر است و او به شما می گوید که احتمال آن ۷۸ درصد است. در مثال اول، شما از قبل احتمال بیرون آمدن یک مهره سفید را می‌دانید (احتمال آن $۰/۶ = \frac{۳}{۵}$ است). این احتمال همواره ثابت است؛ ولی در مثال دوم، پاسخ این فرد صرفاً بیانگر نظر این شخص است. این فرد پاسخ خود را با توجه به روند گذشته و پروازهای قبلی خود بیان می کند. ممکن است اگر همین سؤال را از چند نفر دیگر بپرسید پاسخهای مختلفی بشنوید که هر یک بیانگر نظر شخصی و ذهنیت آنها از پروازهای اصفهان ـ تهران است.

احتمال در مثال اول عینی و در مثال دوم ذهنی (شخصی) است؛ بنابراین احتمال عینی، به نظر اشخاص مختلف وابسته نیست و احتمال وقوع از قبل مشخص است، ولی احتمال ذهنی به عقاید اشخاصی وابسته است که آن را ارزیابی می کنند. در واقع، احتمال ذهنی را می‌توان احتمال تخصیص داده شده به وسیله یک فرد به یک پیشامد تعریف کرد.

۳-۲-۵ آزمایش

در نظریه احتمال فعالیتی که نتیجه آن از قبل مشخص نباشد به «آزمایش» معروف است؛ مثلاً شما می‌خواهید ببینید که با پرتاب سکه‌ای که در دست دارید شیر ظاهر می‌شود یا خط. انجام این کار یک آزمایش است.

۴-۲-۵ فضای نمونه

مجموعه پیامدهای ممکن یک آزمایش را فضای نمونه آن آزمایش گویند. فضای نمونه را با حرف S نشان می‌دهیم.

مثال ۱-۵ می خواهیم فضای نمونهٔ پرتاب یک سکه را مشخص کنیم. اگر

ظاهر شدن شیر را با H و خط را با T نشان دهیم، در این صورت:

$$S=\{H,T\}$$

مثال ۲ـ۵ فضای نمونهٔ پرتاب یک تاس عبارت است از:

$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$

مثال ۳ـ۵ فضای نمونهٔ پرتاب دو سکه عبارت است از:

$$S=\{HH,HT,TH,TT\}$$

مثال ۴ـ۵ فضای نمونهٔ پرتاب دو تاس عبارت است از:

$$S=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۱,۶),(۲,۱),\ldots,(۶,۱),(۶,۲)$$
$$(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$$

این فضای نمونه دارای ۳۶ عضو است.

۵ـ۲ـ۵ فضای نمونه محدود و نامحدود

در مثالهای قبل، فضاهای نمونه تعداد محدودی عضو داشتند، ولی فضای نمونه برخی آزمایشها نامحدود است؛ به عبارت دیگر تعداد اعضای آنها نامتناهی است.

مثال ۵ـ۵ فرض کنید شرکتی پیچ و مهره‌های صنعتی تولید می‌کند. مأمور کنترل کیفیت این شرکت می‌خواهد آن‌قدر پیچ آزمایش کند تا به اولین پیچ معیوب برسد. پیشامد موردنظر تعداد پیچهای انتخاب شده تا اولین پیچ معیوب است. فضای نمونه عبارت است از:

$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,\ldots\}$$

فضای نمونه در این مثال نامتناهی (نامحدود) است.

۵-۲-۶ فضای نمونه گسسته و پیوسته

اگر فضای نمونه شامل تعداد متناهی یا تعداد نامتناهی ولی شمارش‌پذیر باشد، آن را «فضای نمونه گسسته» گویند؛ مثلاً فضای نمونه پرتاب یک سکه، یک تاس، یا تعداد پیچهای آزمایش شده تا اولین پیچ معیوب دارای فضای نمونه گسسته هستند؛ چون تعداد عناصر فضای نمونه پرتاب یک سکه یا یک تاس متناهی است و فضای نمونه تعداد پیچهای انتخاب شده تا اولین پیچ معیوب نامتناهی ولی شمارش‌پذیر است.

فضای نمونه برخی از آزمایشها که گسسته نباشد و در طول یک پاره خط تعریف شود آن را «فضای نمونه پیوسته» گویند؛ مانند مدت زمانی که کارگری برای تراش یک قطعه صرف می‌کند. اگر بپذیریم زمان، متغیری است که می‌توان آن را به دقت اندازه‌گیری کرد، تعداد نامتناهی از زمانهای ممکن وجود دارد که نمی‌توان آنها را یک به یک مشخص کرد.

مثال ۵-۶ فضای نمونه برای نوعی لامپ که حداکثر عمر آن ۱۷۸۰ ساعت است، عبارت است از:

$$S = \{۰ \leq x \leq ۱۷۸۰\}$$

در این عبارت x نشان‌دهنده عمر لامپ است.

مثال ۵-۷ فضای نمونه مثال ۵-۶ را دوباره در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم بدانیم این فضا پیوسته است یا گسسته. چرا.

فضای نمونه پیوسته است؛ زیرا تعداد نامتناهی زمان ممکن برای عمر لامپ وجود دارد که نمی‌توان تک‌تک آنها را مشخص کرد.

۵-۲-۷ پیشامد

در نظریهٔ احتمال، پیشامد، یکی از زیرمجموعه‌های فضای نمونه است. در پرتاب یک سکه، خط آمدن یک پیشامد است و شیر آمدن پیشامد دیگری است. در پرتاب یک تاس، ظاهر شدن عدد ۴ یک پیشامد است و ظاهر شدن عدد ۲ یا ۶ نیز

پیشامدهای دیگری است. پیشامدها را با حروف بزرگ انگلیسی مانند A، B، C، ... نشان می‌دهیم.

مثال ۸ـ۵ پرتاب یک سکه را در نظر بگیرید. اگر A را پیشامد ظاهر شدن شیر (H) تعریف کنیم اعضای پیشامد A عبارت‌اند از:

$$A = \{H\}$$

مثال ۹ـ۵ اگر B را پیشامد ظاهر شدن عدد زوج در پرتاب یک تاس تعریف کنیم، اعضای پیشامد B عبارت‌اند از:

$$B = \{۲,۴,۶\}$$

۸ـ۲ـ۵ پیامدهای مقدماتی هم‌شانس

اگر در آزمایش نوعی تقارن وجود داشته باشد که مطمئن باشیم وقوع یک پیامد همان‌قدر امکان دارد که وقوع هر پیامد مقدماتی دیگر، می‌گوییم فضای نمونه دارای پیشامدهای اولیه یا «پیامدهای مقدماتی» هم‌شانس است؛ مثلاً در پرتاب یک تاس ۶ پیامد مقدماتی مختلف (۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶) وجود دارد که امکان وقوع هر یک با دیگری برابر است؛ یعنی امکان وقوع هر کدام $\frac{1}{6}$ است.

مثال ۱۰ـ۵ فضای نمونه پرتاب دو سکه چنین است $\boxed{S = \{HH, HT, TH, TT\}}$ می‌خواهیم بدانیم آیا هر یک از پیامدهای مقدماتی فوق هم‌شانس هستند یا نه.

چون شانس وقوع هر یک $\frac{1}{4}$ است، پس شانس وقوع هر یک با دیگری برابر است.

تمرین

۱. فضای نمونه پرتاب هم‌زمان سه سکه را مشخص کنید.

۲. فضای نمونه پرتاب هم‌زمان یک سکه و یک تاس را مشخص کنید.

۳. در تمرین ۲:

الف) آیا پیامدهای مقدماتی هم‌شانس هستند.

ب) آیا فضای نمونه نامحدود است؟

۴. در پرتاب یک تاس، این پیشامدها را تعیین کنید:

الف) پیشامد آنکه عدد بزرگ‌تر از ۳ ظاهر شود (A).

ب) پیشامد آنکه عدد ظاهر شده بر ۳ قابل قسمت باشد (B).

ج) پیشامد آنکه عدد ظاهر شده فرد یا عدد اول باشد (C).

د) پیشامد آنکه عدد ظاهر شده مضربی از ۷ باشد (D).

هـ) پیشامد آنکه عدد ظاهر شده هم زوج و هم کوچک‌تر از ۵ باشد (E).

۵. سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم و تعداد شیرهای ظاهر شده را ملاحظه می‌کنیم:

الف) فضای نمونه این آزمایش را بنویسید؛

ب) آیا هر یک از پیامدهای مقدماتی فوق دارای شانس مساوی هستند؟

۶. به طور تصادفی از یکی از چندین متصدی ماشین فرز در یک کارخانه سؤال می‌شود که «احتمال اینکه ماشین فرز امروز خراب شود چقدر است؟» و او براساس تجربیات قبلی خود جواب می‌دهد: «به نظر من ۳۰ درصد». این احتمال عینی است یا ذهنی؟ چرا؟

۵ـ۳ احتمال یک پیشامد

پیش از این احتمال را شانس وقوعِ پیشامد خاصی تعریف کردیم. فرض کنید فضای نمونه‌ای داریم که در آن همه پیامدهای مقدماتی، شانسِ مساوی برای انتخاب شدن، دارند. در این صورت احتمال وقوع پیشامد خاصی مانند A عبارت است از تعداد عضوهای پیشامد A به تعداد عضوهای فضای نمونه. اگر تعداد عضوهای فضای نمونه را با n(S) و تعداد عضوهای پیشامد A را با n(A) نشان دهیم، احتمال A یعنی P(A) به این صورت خواهد بود:

$$\boxed{P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}} \quad \text{احتمال برای حالتهای هم‌شانس} \qquad (۵ـ۱)$$

مثال ۱۱-۵ می‌خواهیم در پرتاب دو سکه این احتمالات را محاسبه کنیم:

الف) دقیقاً دو خط ظاهر شود.

ب) حداقل یک خط ظاهر شود.

ج) هر دو یک چیز را نشان دهند.

ابتدا فضای نمونه پرتاب دو سکه را می‌نویسیم:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

الف) پیشامد ظاهر شدن دقیقاً دو خط (A) به این صورت است:

$$A = \{TT\}$$

پس:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۴}$$

ب) پیشامد ظاهر شدن حداقل یک خط (B) به این صورت است:

$$B = \{HT, TH, TT\}$$

پس:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۳}{۴}$$

ج) پیشامد آنکه هر دو یک چیز را نشان دهند (C) به این صورت است:

$$C = \{HH, TT\}$$

پس:

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{۲}{۴}$$

مثال ۱۲ـ۵ می‌خواهیم احتمال هر یک از این پیشامدها را تعیین کنیم:

الف) در پرتاب تاسی عدد زوج ظاهر شود.

ب) در بیرون آوردن مهره‌ای از ظرفی که محتوی ۵ مهره قرمز، ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است، رنگ مهره سفید باشد.

ج) در انتخاب لامپی از بین ۸ لامپ که یک عدد آن سوخته است، لامپ انتخابی سالم باشد.

الف) در پرتاب تاس شش حالت هم‌شانس وجود دارد که سه حالت آن زوج است. اگر پیشامد مورد نظر را با حرف A نشان دهیم؛ آنگاه:

$$P(A) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

ب) تعداد ۱۲ = ۳ + ۴ + ۵ مهره در ظرف وجود دارد که ۴ عدد آن سفید است. اگر پیشامد مورد نظر را با حرف B نشان دهیم؛ آنگاه:

$$P(B) = \frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳}$$

ج) تعداد کل لامپها ۸ عدد و تعداد لامپهای سالم ۷ عدد است. اگر پیشامد مورد نظر را با حرف C نشان دهیم؛ آنگاه:

$$P(C) = \frac{۷}{۸}$$

۱ـ۳ـ۵ احتمال و فراوانی نسبی

در بسیاری از آزمایشها، پیامدهای مقدماتی دارای شانس مساوی برای انتخاب شدن نیستند. در این صورت تعریف احتمال به صورت تعداد عناصر پیشامد مورد نظر به تعداد عناصر فضای نمونه نامناسب است؛ مثلاً وقتی که تاس ناسالمی را پرتاب می‌کنیم، وجوه مختلف را نمی‌توان هم‌شانس دانست. یا مثلاً تعداد ضایعات تولیدی در شروع و پایان نوبت کاری با هم مساوی نیستند، همچنین تعداد تصادفات در ساعات مختلف روز یکسان نیست. در چنین مواردی اگر بخواهیم احتمال وقوع

Scanned with CamScanner

پیشامدی را تعیین کنیم، باید فراوانی وقوع پیشامد را در صورتی که آزمایش تحت شرایط یکسان به صورت مکرر انجام شده باشد، در نظر بگیریم که در این صورت از فراوانی نسبی کمک گرفته‌ایم؛ بنابراین فراوانی نسبی پیشامد A در N بار تکرار آزمایش چنین تعریف می‌شود:

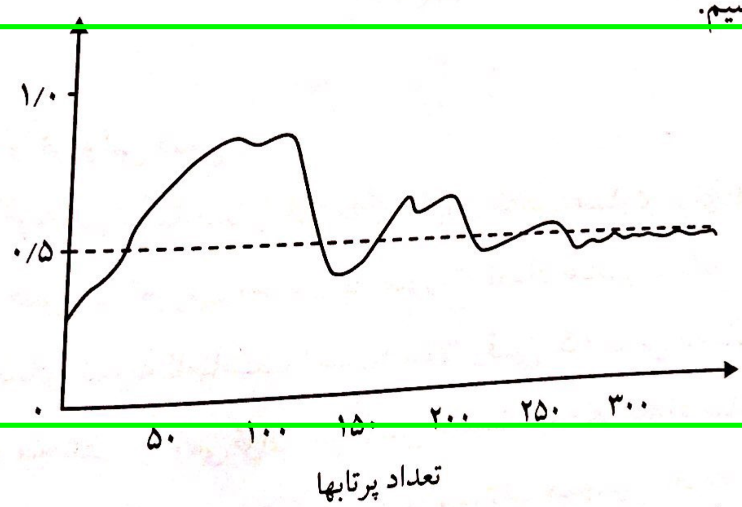
$$\text{فراوانی نسبی پیشامد A} = \frac{\text{تعداد دفعاتی که A در N تکرار آزمایش روی می‌دهد}}{N}$$

در صورتی می‌توان از فراوانی نسبی به عنوان مبنای احتمال استفاده کرد که تعداد تکرارهای آزمایش (N) به سمت بی‌نهایت میل کند که به زبان ریاضی چنین تعریف می‌شود:

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} (\text{فراوانی نسبی پیشامد A در N تکرار}) \qquad (5\text{-}2)$$

احتمال برای حالتهای ناهم‌شانس

مثلاً اگر احتمال شیر آمدن در پرتاب یک سکه سالم مورد نظر باشد نمی‌توان فرضاً با سه بار پرتاب در مورد احتمال شیر آمدن قضاوت کرد؛ زیرا ممکن است در سه بار پرتاب دو بار شیر ظاهر شود و از این رو احتمال $\frac{۲}{۳}$ غیرمعقول است. با توجه به شکل ۵ـ۱، بعد از تقریباً ۳۰۰ پرتاب سکه به حالت پایدار، که درآن نوسانها به صفر می‌رسد، می‌رسیم.



شکل ۵ـ۱ فراوانی نسبی تعداد شیرهای ظاهر شده در N پرتاب

شانس وقوع ضایعات یک کالا را در ساعت خاص نیز باید با نمونه‌های بسیار تعیین کرد.

مثال ۱۳-۵ در نمونه‌ای وسیع که از جمعیت ایران گرفته شده است، تعداد فرزندان هر خانواده همراه با نسبت افرادی که دارای این تعداد فرزند هستند، نشان داده شده است. اطلاعات مربوط به این سرشماری به این شرح است:

تعداد فرزندان	۰	۱	۲	۳	۴	۵ و بیشتر
نسبت خانواده‌هایی که این تعداد فرزند دارند	۰/۰۵	۰/۱۰	۰/۳۵	۰/۲۵	۰/۱۵	۰/۱۰

اگر خانواده‌ای را به طور تصادفی انتخاب کنیم، می‌خواهیم احتمال هر یک از این پیشامدها را تعیین کنیم.

الف) کمتر از دو فرزند داشته باشند.

ب) بین دو تا چهار فرزند داشته باشند.

ج) چهار فرزند یا بیشتر داشته باشند.

الف) احتمال داشتن کمتر از دو فرزند:

$$P(A)=۰/۰۵+۰/۱۰=۰/۱۵$$

ب) احتمال داشتن دو تا چهار فرزند:

$$P(B)=۰/۳۵+۰/۲۵+۰/۱۵=۰/۷۵$$

ج) احتمال داشتن چهار فرزند یا بیشتر:

$$P(C)=۰/۱۵+۰/۱۰=۰/۲۵$$

۵-۳-۲ خواص مقدماتی احتمال

در اینجا خواص مقدماتی احتمال را مطرح می‌کنیم. خواص مقدماتی بدیهی بوده، نیاز به برهان ندارد. این خواص که برای هر پیشامدی، چه عضوهای فضای نمونه

هم‌شانس باشند و چه نباشند، صادق است عبارت‌اند از:

۱. احتمال پیشامدی همچون A متعلق به فضای نمونه S، همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر و کوچک‌تر یا مساوی یک است؛ یعنی $0 \le P(A) \le 1$.

۲. احتمال وقوع فضای نمونه، (S)، برابر یک است؛ یعنی $P(S)=1$.

مثال ۱۴ـ۵ فضای نمونه ۴ عنصری $S=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم بدانیم کدام‌یک از این توابع فضای احتمال S را تعریف نمی‌کند:

الف) $P(e_1)=\frac{1}{2}$، $P(e_2)=\frac{1}{3}$، $P(e_3)=\frac{1}{4}$، $P(e_4)=\frac{1}{5}$.

ب) $P(e_1)=\frac{1}{2}$، $P(e_2)=-\frac{1}{4}$، $P(e_3)=\frac{1}{4}$، $P(e_4)=\frac{1}{2}$.

ج) $P(e_1)=\frac{1}{2}$، $P(e_2)=\frac{1}{4}$، $P(e_3)=\frac{1}{8}$، $P(e_4)=\frac{1}{8}$.

د) $P(e_1)=\frac{1}{2}$، $P(e_2)=\frac{1}{4}$، $P(e_3)=\frac{1}{4}$، $P(e_4)=0$.

الف) چون مجموع احتمالات فضای نمونه $(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{77}{60})$ بزرگ‌تر از یک است، این تابع فضای نمونه S را تعریف نمی‌کند.

ب) چون $P(e_2)=-\frac{1}{4}$ و عددی منفی است؛ بنابراین تابع، احتمال مربوط به S را تعریف نمی‌کند.

ج) از آنجا که تمام مقادیر غیرمنفی و مجموع آنها $(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=1)$ برابر یک است، می‌تواند معرف فضای احتمال S باشد.

د) از آنجا که تمام مقادیر غیرمنفی و مجموع آنها $(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0=1)$ برابر یک است، می‌تواند فضای احتمال S را تعریف کند.

تمرین

۱. فضای نمونه $S=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید P تابع احتمال روی S باشد.

الف) اگر $P(e_2)=\frac{1}{3}$، $P(e_3)=\frac{1}{6}$ و $P(e_4)=\frac{1}{9}$ باشد، $P(e_1)$ را پیدا کنید.

ب) اگر $P(e_1)=2P(e_2)$ و $P(e_3)=P(e_4)=\frac{1}{4}$ باشد $P(e_1)$ و $P(e_2)$ را پیدا کنید.

ج) اگر $P(\{e_2,e_3\}) = \frac{2}{3}$، $P(\{e_2,e_4\}) = \frac{1}{2}$ و $P(e_2) = \frac{1}{3}$ باشد، $P(e_1)$ را پیدا کنید.

۲. تاسی ناسالم بوده به نحوی که احتمال آمدن هر شماره‌ای با عدد آن متناسب است (مثلاً احتمال آمدن عدد ۶ دو برابر عدد ۳ است). فرض کنید که {عدد زوج} = A، {عدد اول} = B، {عدد فرد} = C است.

الف) احتمال آمدن هر عدد را مشخص کنید.

ب) P(A)، P(B) و P(C) را پیدا کنید.

۴ـ۵ قواعد شمارش

گاهی اوقات با وضعیتهایی روبه‌رو می‌شویم که یا باید همه حالتهای ممکنِ آزمایشی را فهرست کنیم یا دست‌کم مشخص کنیم که چند حالت ممکن و مختلف وجود دارد؛ مثلاً سازمانی که برای ماشینها پلاک صادر می‌کند باید بداند اگر از ۲ حرف و ۴ رقم استفاده کند، چند شماره می‌تواند صادر کند تا اگر این تعداد کم بود شماره‌ها را ۵ رقمی کند یا یک دانشگاه بزرگ باید مشخص کند که شماره دانشجویی باید چند رقمی باشد تا در عین حال که تعداد ارقام آن کم است، بتوان به تمام دانشجویان شماره داد.

۱ـ۴ـ۵ اصل اساسی شمارش

اساسی‌ترین اصل در شمارش «قاعده ضرب» است که بدین صورت تعریف می‌شود: اگر عملی مستلزم K مرحله باشد که مرحله اول به n_1 طریق، مرحله دوم به n_2 طریق، ... و مرحله k ام به n_K طریق انجام پذیرد؛ آنگاه عمل مزبور به $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_K$ طریق ممکن انجام می‌شود.

$$\boxed{n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_K} \quad \text{قاعده ضرب} \qquad (۳ـ۵)$$

مثال ۱۵ـ۵ فرض کنید شخصی می‌تواند تعطیلات نوروزی خود را با اتوبوس

یا قطار یا هواپیما به یکی از ۴ شهر اصفهان، تبریز، شیراز یا مشهد برود. می‌خواهیم بدانیم این شخص به چند طریق می‌تواند این مسافرت را انجام دهد.

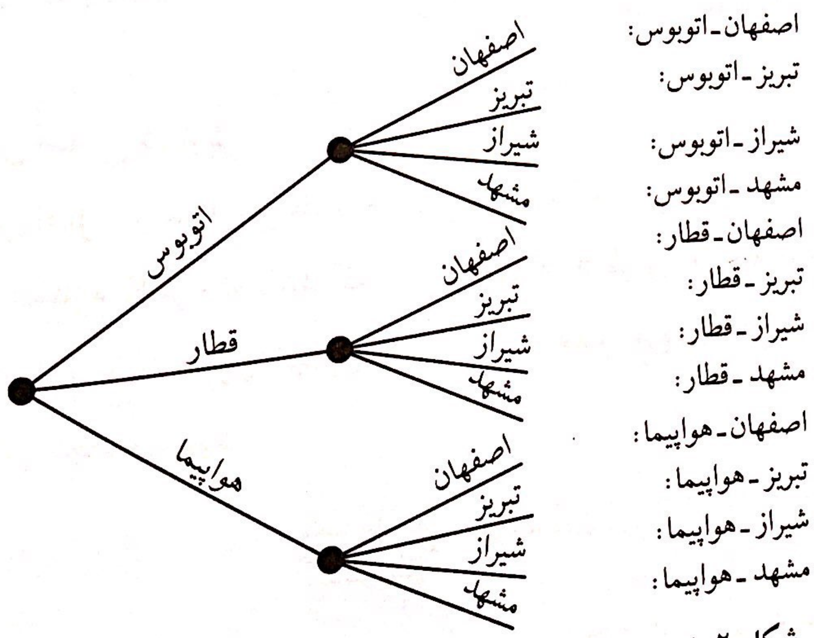
وسیله سفر را به $n_1 = ۳$ طریق و شهر مورد نظر را به $n_2 = ۴$ طریق می‌توان انتخاب کرد؛ بنابراین تعداد طرقی که می‌تواند مسافرت انجام شود از ضرب این دو به دست می‌آید:

$$n_1 \times n_2 = ۳ \times ۴ = ۱۲$$

در همین مثال، اگر بخواهیم تمام حالات ممکن را فهرست کنیم از «نمودار درختی» استفاده می‌کنیم. نمودار درختی روش منظمی برای نشان دادن این حالات است.

شکل ۲ـ۵ نشان می‌دهد که ۳ شاخه برای تعداد وسایل مسافرت و ۴ شاخه برای تعداد شهرها وجود دارد که بدین ترتیب ۱۲ گزینه برای انتخاب وسیله و شهر وجود خواهد داشت.

مثال ۱۶ـ۵ می‌خواهیم بدانیم اگر قرار باشد پلاک اتومبیلها را با استفاده از نام یک شهر، یک حرف فارسی و ۵ رقم مشخص کنیم با این شرط که فقط استفاده از نام ۲۵ شهر مجاز باشد، چند ماشین مختلف را می‌توانیم شماره‌گذاری کنیم (رقم اول شماره ماشین نباید صفر باشد).



شکل ۲ـ۵ نمودار درختی برای مسافرت با ۳ وسیله به ۴ شهر

چون در فارسی ۳۲ حرف وجود دارد و تنها می‌توان از نام ۲۵ شهر استفاده کرد و شماره ماشینها ۵ رقمی است، تعداد ماشینهایی که می‌توان شماره‌گذاری کرد عبارت‌اند از:

$$۲۵\times ۳۲\times ۹\times ۱۰\times ۱۰\times ۱۰\times ۱۰ = ۷۲۰۰۰۰۰۰$$

۵-۴-۲ جایگشت (ترتیب)

گاه وضعیتهایی مورد توجه ماست که برای آنها، پیامدها، ترتیبها یا آرایشهای مختلفی وجود دارد که فقط برای گروهی از اشیاء امکان‌پذیر است؛ مثلاً اگر بخواهیم ببینیم چند آرایش مختلف برای سخنرانی یک رئیس، یک معاون و یک مدیر کل متصور است از جایگشت استفاده می‌کنیم.

مثال ۵-۱۷ می‌خواهیم بدانیم برای سه حرف a، b، c چند جایگشت (بدون تکرار حروف) وجود دارد.

جایگشتهای آن عبارت‌اند از: abc، acb، bac، bca، cab، cba. می‌توان بدون برشمردن یکایک جایگشتها، تعداد آنها را تعیین کرد برای مکان اول سه انتخاب، برای مکان دوم دو انتخاب و برای مکان سوم یک انتخاب ممکن وجود دارد؛ بنابراین تعداد کل جایگشتها (آرایشها) $۶ = ۱\times ۲\times ۳$ است. n شیء متمایز را می‌توان به این طریق مرتب کرد:

$$n(n-۱)\ldots\times ۳\times ۲\times ۱$$

این حاصل‌ضرب را با نماد "!n" نمایش می‌دهیم و آن را n فاکتوریل می‌خوانیم. بنابر آنچه گفتیم: $۱ = !۱$، $۲ = ۱\times ۲ = !۲$، $۶ = ۱\times ۲\times ۳ = !۳$، $۲۴ = ۱\times ۲\times ۳\times ۴ = !۴$ و ... است. بنا به تعریف $۱ = !۰$ است.

مثال ۵-۱۸ می‌خواهیم بدانیم به چند طریق می‌توان ۵ کارمند نمونه را در حضور تمام اعضای شرکت معرفی کرد.

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

جایگشتهای متشکل از ۴ حرف a، b، c و d برابر ۲۴ است.

مثال ۵ـ۱۹ تعداد جایگشتهای متشکل از ۴ حرف a، b، c و d برابر ۲۴ است. می‌خواهیم بدانیم اگر قرار باشد فقط از ۲ حرف در هر آرایش استفاده کنیم، تعداد جایگشتهای آن چند تاست.

برای اولین حرف ۴ انتخاب و برای دومین حرف ۳ انتخاب وجود دارد؛ بنابراین $4 \times 3 = 12$ طرق ممکن وجود خواهد داشت که عبارت‌اند از:

ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc

با تعمیم این استدلال درمی‌یابیم که اگر تعیین تعداد جایگشتهای r شیء از n شیء متمایز مورد نظر باشد، می‌توان تعداد آنها را به کمک این دو فرمول به دست آورد:

$$\boxed{P_r^n = n(n-1)\ldots(n-r+1)} \qquad (5\text{-}4)$$

$$\text{جایگشت} \quad \boxed{P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}} \qquad (5\text{-}5)$$

برای به دست آوردن فرمول دوم می‌توان !n را به این صورت نشان داد:

$$\text{فاکتوریل} \quad \boxed{n(n-1)\ldots(n-r+1)(n-r)!} \qquad (5\text{-}6)$$

مثال ۵ـ۲۰ می‌خواهیم از بین ۱۵ عضو شرکت‌کننده در یک جلسه، یک رئیس، یک معاون و یک سخنگو انتخاب کنیم. ترتیب انتخاب نیز مهم است. این عمل به طرق مختلف امکان‌پذیر است که به این صورت محاسبه می‌شود:

$$P_3^{15} = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{15!}{(15-3)!} = \frac{15!}{12!} = 2730$$

اگر جایگشتهای اشیاء روی دایره‌ای مرتب شده باشند «جایگشتهای دوری» نامیده می‌شوند. در جایگشت دوری اگر تغییر در جهت خلاف عقربه‌های ساعت و به

گونه‌ای باشد که اشیاء قبل و بعد هر شیء یکسان باشد، در واقع دو آرایش مختلف نخواهیم داشت؛ مثلاً اگر ۴ نفر دور میز گردی نشسته باشند و همگی محل خود را یک صندلی در جهت عقربه‌های ساعت تغییر دهند، جایگشت جدیدی به وجود نخواهد آمد.

مثال ۲۱ـ۵ جایگشتهای دوری از ۴ نفر که دور یک میز نشسته‌اند، چنین محاسبه می‌شود:

اگر یک نفر را در مکان ثابتی در نظر بگیریم و ۳ نفر دیگر را به !۳ طریق مرتب کنیم، متوجه می‌شویم که شش آرایش مختلف (جایگشت دوری) از این ۴ نفر به وجود خواهد آمد.

تعداد جایگشتهای n شیء متمایز که دور یک دایره مرتب شده‌اند، برابر است با $(n-۱)!$.

$$\boxed{(n-۱)!} \quad \text{جایگشت دوری} \qquad (۵\text{ـ}۷)$$

تا به حال از بین n شیء متمایز r شیء را انتخاب می‌کردیم تا جایگشتهای آن را مشخص کنیم؛ اما اگر n شیء از هم متمایز نباشند؛ یعنی چند تا از آنها یکسان باشند، تعداد جایگشتها تغییر می‌یابد.

مثال ۲۲ـ۵ جایگشتهایی که با حروف کلمه «حسابدار» می‌توان نوشت چنین محاسبه می‌شود:

موقتاً فرض می‌کنیم که دو حرف «ا» از هم متمایز هستند و آنها را با ا$_۱$ و ا$_۲$ نشان می‌دهیم. برای نمونه دو جایگشت «ح س ا$_۱$ ب د ا$_۲$ ر» و «ح س ا$_۲$ ب د ا$_۱$ ر» را در نظر بگیرید. این دو جایگشت با هم یکسان است؛ بنابراین هر دو جایگشت با اندیس فقط یک جایگشت بدون اندیس حساب می‌شود؛ بنابراین تعداد کل جایگشتهای ممکن از حروف کلمه «حسابدار» $\frac{۷!}{۲!} = ۲۵۲۰$ خواهد بود.

مثال ۲۳ـ۵ جایگشتهایی که با حروف کلمه «حسابداران» می‌توان نوشت چنین

محاسبه می‌شود:

اگر فرض کنیم سه حرف «ا» مختلف هستند و آنها را با $ا_۱$، $ا_۲$، $ا_۳$ نشان دهیم، تعداد !۹ جایگشت مختلف از کلمه «حسابداران» ایجاد می‌شود؛ اما چون تعداد جایگشتهای سه حرف $ا_۱$، $ا_۲$، $ا_۳$ که به یک آرایش از کلمه «حسابداران» منجر می‌شود برابر !۳ است، فقط $\frac{۹!}{۳!} = ۶۰۴۸۰$ آرایش مختلف از حروف این کلمه وجود خواهد داشت.

با تعمیم این استدلال نتیجه می‌گیریم که:

تعداد جایگشتهای n شیء که $n_۱$ تای آنها از نوع اول، $n_۲$ تای آنها از نوع دوم، ... و n_k تای آنها از نوع k ام و $n = n_۱ + n_۲ + ... + n_k$ است، برابر است با $\frac{n!}{n_۱!n_۲!...n_k!}$.

$$\boxed{\frac{n!}{n_۱!n_۲!...n_k!}} \quad \text{جایگشت اشیاء نامتمایز} \qquad (۵\text{ـ}۸)$$

مثال ۵ـ۲۴ برای چراغانی کردن سر در یک شرکت تولیدی یک لامپ قرمز، ۳ لامپ سبز، ۴ لامپ آبی و ۲ لامپ زرد داریم. می‌خواهیم بدانیم به چند طریق مختلف می‌توان آنها را در یک ردیف قرار داد.

تعداد کل لامپها برابر است با ۱۰ = ۲ + ۴ + ۳ + ۱؛ بنابراین:

$$\frac{۱۰!}{۱!۳!۴!۲!} = ۱۲۶۰۰$$

۵ـ۴ـ۳ ترکیب

در ترکیب، تعداد راههای انتخاب r شیء از بین n شیء مهم ولی ترتیب (جایگشت) آنها بی‌اهمیت است؛ مثلاً با ۴ حرف a، b، c و d می‌توان ۲۴ جایگشت ۳ حرفی نوشت، ولی از میان آنها هر یک از گروههای «۶ جایگشتی» که حروف به کار رفته در آنها مشابه است، مانند abc، acb، bac، bca، cab و cba یک ترکیب محسوب می‌شوند.

ترکیبات	جایگشتها
abc	abc, acb, bac, bca, cab, cba
abd	abd, adb, bad, bda, dab, dba
acd	acd, adc, cad, cda, dac, dca
bcd	bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb

بنابراین تعداد ترکیبهای ۳ حرفی از ۴ حرف ۴ خواهد بود.

مثال ۲۵ـ۵ قرار است از بین ۸ نفر که داوطلب استخدام در سازمانی هستند ۳ نفر انتخاب شوند. طرق مختلفی که می‌توان این ۳ نفر را انتخاب کرد، چنین محاسبه می‌شود:

اگر به ترتیب انتخاب افراد توجه کنیم جواب $P_{3}^{8} = 336$ خواهد بود و اگر ترتیب انتخاب افراد را در نظر نگیریم تعداد $3! = 6$ از هر مجموعه حذف خواهد شد که در این صورت به $\frac{336}{6} = 56$ طریق می‌توان ۳ نفر را از بین ۸ نفر انتخاب کرد.

با گسترش این استدلال نتیجه می‌گیریم:

تعداد ترکیبهای r شیء از n شیء متمایز برابر است با:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!} \tag{۵ـ۹}$$

و یا

$$\boxed{\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}} \text{ ترکیب} \tag{۵ـ۱۰}$$

می‌توان نشان داد که همواره روابط زیر برقرار است:

$$1)\ \binom{n}{0} = 1 \qquad 2)\ \binom{n}{n} = 1$$

$$3)\ \binom{n}{n-1} = n \qquad 4)\ \binom{n}{1} = n$$

مثال ۲۶ـ۵ قرار است از بین ۱۰ مشتری عمده یک شرکت، ۳ مشتری را

انتخاب کنیم و نظر آنها را درباره کیفیت محصولات تولیدی جویا شویم. طرق مختلف انتخاب چنین محاسبه می‌شود:

چون ترتیب انتخاب مهم نیست، با استفاده از فرمول ترکیب، خواهیم داشت:

$$\binom{۱۰}{۳} = \frac{۱۰!}{(۱۰-۳)!۳!} = \frac{۱۰!}{۷!۳!} = ۱۲۰$$

مثال ۵ـ۲۷ می‌خواهیم از بین ۷ سرکارگر مونتاژ و ۴ سرکارگر بسته‌بندی کمیته‌ای با ۴ سرکارگر مونتاژ و ۲ سرکارگر بسته‌بندی تشکیل دهیم. طرق مختلف انتخاب اعضا چنین محاسبه می‌شود:

براساس قاعده ضرب، اگر بتوان عمل اول را به n_1 طریق و عمل دوم را به n_2 طریق انجام داد؛ آنگاه کل کار را می‌توان به $n_1 \times n_2$ طریق انجام داد؛ بنابراین به $۳۵ = \binom{۷}{۴}$ طریق می‌توان ۴ سرکارگر مونتاژ را از بین ۷ نفر برگزید و به $۶ = \binom{۴}{۲}$ طریق می‌توان ۲ سرکارگر بسته‌بندی را از بین ۴ نفر انتخاب کرد و تعداد طرق انتخاب به طور کلی برابر است با:

$$\binom{۷}{۴}\binom{۴}{۲} = ۳۵ \times ۶ = ۲۱۰$$

۵ـ۴ـ۴ افرازهای مرتب

گاهی مایلیم ترکیب r شیء از n شیء متمایز را به گونه‌ای خاص افراز (تفکیک) کنیم. در واقع در این‌گونه خاص هر ترکیب در حکم یک مجموعه خواهد بود که هر مفروز آن یک زیرمجموعه است که در آن زیرمجموعه، ترتیب قرار گرفتن اشیاء مهم نیست.

مثال ۵ـ۲۸ می‌خواهیم بدانیم به چند طریق مختلف می‌توان مجموعه‌ای از ۴ شیء را به سه زیرمجموعه که به ترتیب ۲، ۱ و ۱ عضو داشته باشد افراز کرد.

چهار شیء را با a، b، c و d نشان می‌دهیم. با شمارش درمی‌یابیم که ۱۲ حالت ممکن بدین شرح وجود دارد:

ab|c|d	ab|d|c	ac|d|b	ac|d|b
ad|b|c	ad|c|b	bc|a|d	bc|d|a
bd|a|c	bd|c|a	cd|a|b	cd|b|a

تعداد افرازها را برای این مثال با نماد $\binom{۴}{۲,۱,۱}=۱۲$ نشان می‌دهیم که در آن عدد ۴ معرف تعداد کل اشیاء و اعداد ۲، ۱ و ۱ معرف تعداد اشیایی است که به ترتیب در زیرمجموعه‌ها قرار می گیرند.

با تعمیم این استدلال نتیجه می گیریم که:

تعداد طرقی که می‌توان مجموعه n شیئی را به K زیرمجموعه با n_1 شیء در مجموعه اول، n_2 شیء در مجموعه دوم، ... و n_k شیء را در مجموعه k ام افراز کرده برابر است با:

$$\text{افراز}\ \boxed{\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}} \qquad (۵\text{-}۱۱)$$

که در آن $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$ است.

مثال ۵ـ۲۹ می‌خواهیم بدانیم به چند طریق می‌توان ۸ کارمند را در دو اتاق ۳ نفره و یک اتاق ۲ نفره جای داد.

چون $۸=۲+۳+۳$ است داریم:

$$\binom{۸}{۳,۳,۲}=\frac{۸!}{۳!۳!۲!}=۵۶۰$$

تمرین

۱. اگر دایره بازاریابی و فروش شرکتی بخواهد یکی از ۵ متن تهیه شده را با یکی از ۴ وسیله تبلیغاتی (رادیو، تلویزیون، مجله، روزنامه) آگهی کند، این کار به چند طریق میسر است؟

۲. اگر شرکت بیمه‌ای بخواهد برای بیمه‌شدگان کدی انتخاب کند که از ۲ حرف فارسی و یک شماره ۶ رقمی تشکیل شده باشد، به چند بیمه شده می‌تواند

کد بدهد؟

۳. در تمرین ۲، فرض کنید که شماره کد نباید از ۲۵۰ هزار کوچک‌تر باشد؛ با این قید به چند نفر می‌توان کد داد؟

۴. به چند طریق می‌توان ۲ مهره را از ظرفی که حاوی ۶ مهره است، بیرون آورد؟

الف) با جایگذاری

ب) بدون جایگذاری

۵. به چند طریق می‌توان ۶ کتاب مختلف را در قفسه‌ای در کنار هم قرار داد؟

۶. تعداد جایگشتهای ۳ حرفی از ۵ حرف a، b، c، d و e را پیدا کرده، بنویسید.

۷. به چند طریق مختلف می‌توان ۵ شمع به رنگهای مختلف را در اطراف یک سینی گرد قرار داد؟

۸. با حروف کلمه «دینار» چند کلمه ۵ حرفی مختلف می‌توان نوشت؟

۹. با حروف اسم «ابوعلی سینا» چند کلمه ۱۰ حرفی می‌توان نوشت؟

۱۰. به چند طریق می‌توان از بین ۶ مارک تجاری مختلف ۲ عدد آنها را انتخاب کرد؟

۱۱. به چند طریق می‌توان از بین ۶ مارک تجاری مختلف دست‌کم ۲ عدد آنها را انتخاب کرد؟

۱۲. از بین ۹ کالای موجود در یک کارتن ۳ عدد آنها معیوب است؛ به چند طریق می‌توان ۴ کالا انتخاب کرد به طوری که ۲ تای آنها سالم و ۲ تای آنها معیوب باشد؟

۱۳. به چند طریق می‌توان ۹ نفر را در یک اتاق ۴ نفره، دو اتاق ۲ نفره و یک اتاق یک‌نفره جای داد؟

۵ـ۵ عملیات روی پیشامدها و قواعد احتمال

در قسمت ۳ـ۵ دو قانون بدیهی و مهم در مورد احتمالات را مطرح کردیم که عبارت بودند از:

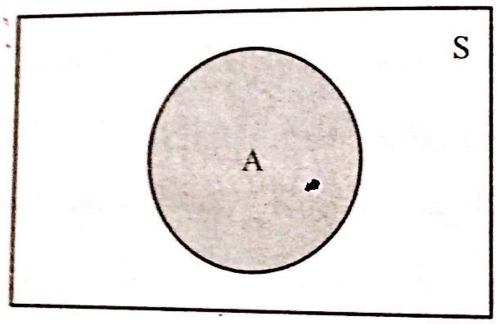
۱. احتمال وقوع پیشامدی همانند A همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر و کوچک‌تر یا مساوی یک است ($0 \le P(A) \le 1$).

۲. احتمال فضای نمونه همواره برابر یک است ($P(S) = 1$).

قبل از بیان قواعد دیگر، به تشریح مفاهیمی چون «نمودار ون»[1] و پیشامدهای ناسازگار و سازگار می‌پردازیم.

۵ـ۵ـ۱ نمودار ون، پیشامدهای ناسازگار و سازگار

برای نشان دادن یک یا چند پیشامد در فضای نمونه می‌توان از نمودار معروفی به نام نمودار ون استفاده کرد. جان ون، ریاضیدان انگلیسی اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم، مبتکر این نمودار است. در این نمودار، کل فضای نمونه با مستطیلی نشان داده می‌شود و هر پیشامد قسمتی از این مستطیل را به خود اختصاص می‌دهد. نمودار شکل ۵ـ۳ را در نظر بگیرید:



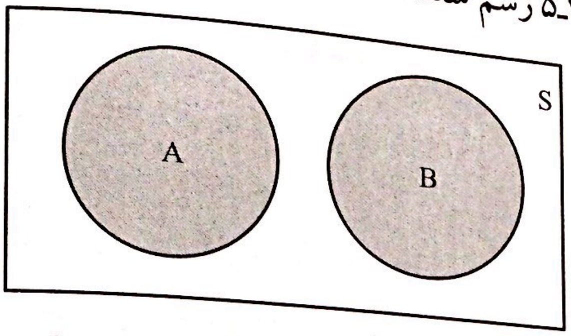
شکل ۵ـ۳ نمونه‌ای از نمودار ون

چنان که گفته شد، احتمال فضای نمونه برابر یک است ($P(S) = 1$)؛ بنابراین احتمال پیشامد A یا برابر با سطحی است که پیشامد A از فضای نمونه اشغال کرده یا برابر با نسبت تعداد اعضای A به S است. حال دو پیشامد ناسازگار را توضیح می‌دهیم.

دو پیشامد را در صورتی «ناسازگار» گویند که در یک لحظه، فقط و فقط یکی از آنها بتواند واقع شود؛ به عبارت دیگر امکان وقوع هم‌زمان دو پیشامد

1. Venn diagram

ناسازگار وجود ندارد. اگر یکی از آنها واقع شود دیگری هرگز واقع نمی‌شود ولی امکان دارد که هیچ کدام از آنها به وقوع نپیوندد. نمودار ون برای دو پیشامد ناسازگار در شکل ۵ـ۴ رسم شده است.



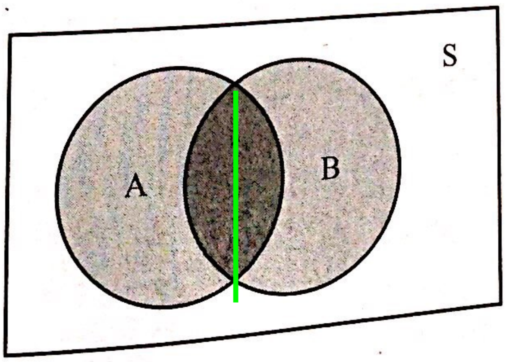
شکل ۵ـ۴ نمودار ون برای دو پیشامد ناسازگار

چنان‌که ملاحظه می‌کنید دو پیشامدِ ناسازگارِ A و B هیچ وجه اشتراکی با هم ندارند.

مثال ۵ـ۳۰ می‌خواهیم بدانیم در پرتاب یک تاس، دو پیشامد ظاهر شدن عدد کمتر از ۳ و ظاهر شدن عدد ۶ ناسازگارند یا نه.

پیشامد ظاهر شدن عدد کمتر از ۳ را با A و پیشامد ظاهر شدن عدد ۶ را با B نشان می‌دهیم؛ بنابراین $A=\{1,2\}$ و $B=\{6\}$ خواهد بود. روشن است که اگر عدد یک یا ۲ ظاهر شود هرگز عدد ۶ ظاهر نمی‌شود و به عکس؛ پس این دو پیشامد ناسازگارند.

دو پیشامد را در صورتی «سازگار» گویند که وقوع یک پیشامد مستلزم عدم وقوع دیگری نباشد؛ به عبارت دیگر دو پیشامد سازگار دارای دست‌کم یک عضو مشترک‌اند. نمودار ون برای دو پیشامد سازگار A و B در شکل ۵ـ۵ نمایش داده شده است.



شکل ۵ـ۵ نمودار ون برای دو پیشامد سازگار

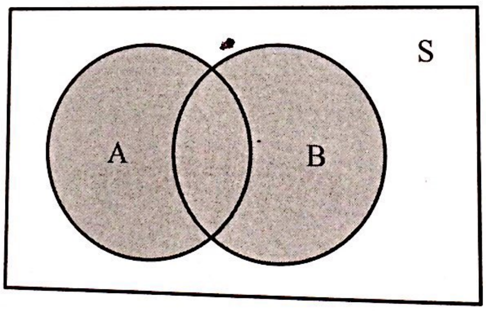
چنان‌که ملاحظه می‌کنید دو پیشامد سازگار A و B دارای وجوه مشترکی هستند.

مثال ۵ـ۳۱ در پرتاب یک تاس A پیشامد ظاهر شدن عدد بزرگ‌تر از ۴ و B پیشامد ظاهر شدن عددی زوج است. می‌خواهیم بدانیم آیا این دو پیشامد سازگارند یا نه.

چون پیشامد $A=\{5,6\}$ و پیشامد $B=\{2,4,6\}$ دارای یک عضو مشترک (۶) هستند، این دو پیشامد سازگارند؛ یعنی اگر عدد ۶ ظاهر شود هر دو پیشامد واقع شده‌اند.

۵ـ۵ـ۲ اجتماع، اشتراک و متمم پیشامدها

دو پیشامد A و B را در نظر بگیرید. «اجتماع» دو پیشامد A و B مجموعه تمام عضوهایی است که در A، یا در B، یا هم در A و هم در B قرار دارند. اجتماع دو پیشامد A و B را با $A \cup B$ نشان می‌دهیم. وقوع $A \cup B$ بدین معنی است که دست‌کم یکی از دو پیشامد A یا B رخ داده است. نمودار ون برای اجتماع دو پیشامد A و B در شکل ۵ـ۶ نشان داده شده است.



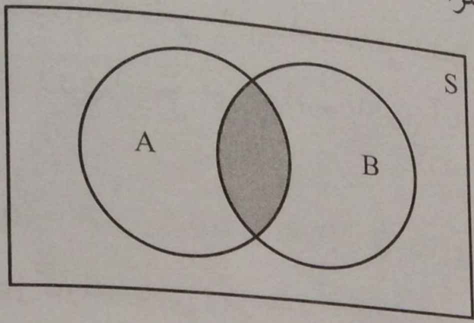
شکل ۵ـ۶ نمودار ون برای اجتماع دو پیشامد

مثال ۵ـ۳۲ در پرتاب یک تاس A پیشامد ظاهر شدن عدد فرد و B پیشامد ظاهر شدن عددی است که بر ۳ بخش‌پذیر باشد؛ اجتماع این دو پیشامد چنین خواهد بود:

$A=\{1,3,5\}$ و $B=\{3,6\}$ است؛ بنابراین $A \cup B=\{1,3,5,6\}$.

دو پیشامد A و B را در نظر بگیرید. «اشتراک» دو پیشامد A و B را با $A \cap B$

نشان می‌دهیم. وقوع $A \cap B$ بدین معنی است که هر دو پیشامد A و B رخ داده است. نمودار ون برای اشتراک دو پیشامد A و B در شکل ۷ـ۵ نشان داده می‌شود.

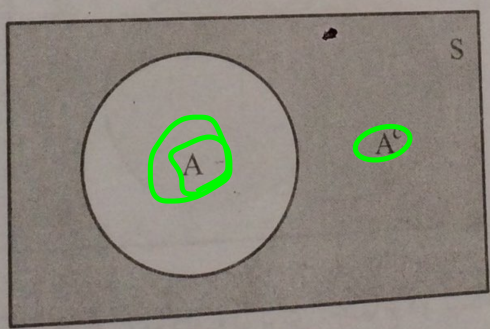


شکل ۷ـ۵ نمودار ون برای اشتراک دو پیشامد

مثال ۳۳ـ۵ با توجه به اطلاعات مثال ۳۲ـ۵، اشتراک دو پیشامد A و B چنین خواهد بود:

$A = \{۱,۳,۵\}$ و $B = \{۳,۶\}$ است؛ بنابراین $A \cap B = \{۳\}$.

پیشامد A را در نظر بگیرید. «متمم» پیشامد A مجموعه تمام عضوهایی است که در A نیستند. متمم پیشامد A را با A^c نشان می‌دهیم. وقوع A^c بدین معنی است که A رخ نداده است. نمودار ون برای متمم A در شکل ۸ـ۵ نشان داده شده است.

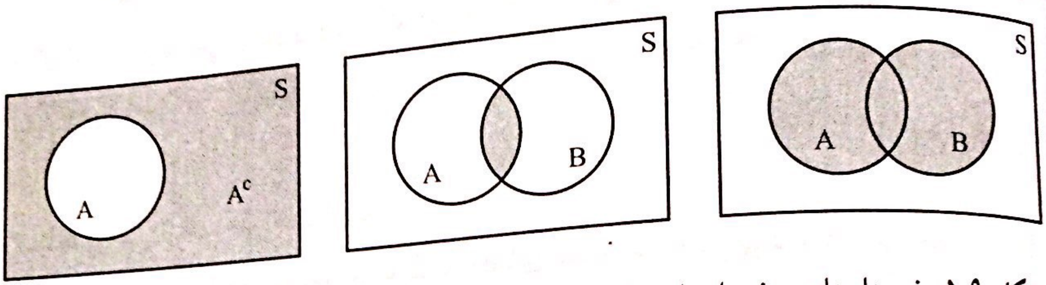


شکل ۸ـ۵ نمودار ون برای متمم پیشامد A

مثال ۳۴ـ۵ در پرتاب یک تاس، A پیشامد ظاهر شدن عدد کوچک‌تر از ۳ است؛ متمم پیشامد A چنین خواهد بود:

متمم پیشامد A شامل عضوهایی از فضای نمونه است که در A نباشد؛ بنابراین $A^c = \{۳,۴,۵,۶\}$.

حال برای مقایسه بهتر، نمودارهای ون برای اجتماع، اشتراک و متمم در شکل ۹ـ۵ نمایش داده می‌شوند.



شکل ۹ـ۵ نمودارهای ون برای اجتماع دو پیشامد (نمودار سمت راست)، اشتراک دو پیشامد (نمودار وسط)، و متمم یک پیشامد (نمودار سمت چپ)

نباید پنداشت که اجتماع و اشتراک تنها برای دو پیشامد مطرح می‌شوند. می‌توانیم آنها را برای بیش از دو پیشامد نیز به کار ببریم؛ برای مثال، $A\cup B\cup C$ مرکب از عضوهایی از فضای نمونه است که دست‌کم در یکی از سه پیشامد A، B و C هستند و یا $A\cap B\cap C$ مرکب از عضوهایی از فضای نمونه است که هم در A، هم در B و هم در C هستند.

مثال ۳۵ـ۵ با داشتن فضای نمونه $S=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ و پیشامدهای $A=\{a,e,f,g\}$، $B=\{d,e,g\}$، $C=\{a,b\}$ و $D=\{f,g,h\}$ می‌خواهیم این موارد را پیدا کنیم:

الف) $A\cup B$ — د) $(A\cap B)^c$

ب) $A\cap C$ — هـ) $(A\cup B)^c\cup C$

ج) A^c — و) $D^c\cap(A\cup B)$

الف) $A\cup B=\{a,d,e,f,g\}$

ب) $A\cap C=\{a\}$

ج) $A^c=\{b,c,d,h\}$

د) چون $A\cap B=\{e,g\}$ است، پس $(A\cap B)^c=\{a,b,c,d,f,h\}$.

هـ) $A\cup B$ را در بند الف به دست آوردیم، پس $(A\cup B)^c=\{b,c,h\}$ است؛ بنابراین: $(A\cup B)^c\cup C=\{a,b,c,h\}$.

و) چون $D^c = \{a,b,c,d,e\}$ است، پس $D^c \cap (A \cup B) = \{a,d,e\}$.

گاهی محاسبه احتمال یک پیشامد مستلزم دانستن احتمال یک یا چند پیشامد دیگر است. روابطی وجود دارد که می‌توان با آنها احتمال پیشامدهای وابسته را پیدا کرد.

۳-۵-۵ برخی از قواعد احتمالات

فرض کنید A و B دو پیشامد مربوط به فضای یک آزمایش بوده، A زیرمجموعه B نیز باشد (A زیر مجموعه B را به صورت $A \subset B$ نشان می‌دهیم)، چون مجموعه A شامل تعداد عضوهای کمتر و یا مساوی مجموعه B است، در این صورت احتمال وقوع پیشامد A همواره کوچک‌تر یا مساوی احتمال پیشامد B خواهد بود؛ به عبارت دیگر خواهیم داشت:

اگر A و B دو پیشامد مربوط به فضای یک آزمایش باشند به طوری که $A \subset B$ باشد، در این صورت:

$$P(A) \le P(B) \qquad (۵\text{-}۱۲)$$

در تعریف متمم A گفتیم که A^c آن قسمت از فضای نمونه است که در A نیست؛ پس $A \cup A^c = S$ و چون $P(S) = ۱$؛ بنابراین $P(A) + P(A^c) = ۱$. این قاعده به قاعده متمم گیری معروف است که می‌توان آن را به این صورت نوشت:

$$P(A^c) = ۱ - P(A) \qquad (۵\text{-}۱۳)$$

دو پیشامد A و B را در نظر بگیرید. اجتماع این دو پیشامد شامل عضوهایی است که یا در A، یا در B و یا در هر دوی آنهاست. اگر بخواهیم عضوهای $A \cup B$ را مشخص کنیم، عضوهای مشترک را تنها یک‌بار محسوب می کنیم. از آنجا که $A \cap B$ عضوهای مشترک بین A و B است، برای محاسبه $P(A \cup B)$ باید $P(A \cap B)$ را از $P(A) + P(B)$ کم کنیم. به عبارت دیگر باید از «قاعده جمع» استفاده کرد؛ یعنی:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \quad (۵\text{-}۱۴)$$

قاعده جمع

در دو پیشامد ناسازگار، $A \cap B$ مجموعه‌ای تهی است و بنابراین $P(A \cap B) = ۰$ است؛ در نتیجه قاعده جمع برای دو پیشامد ناسازگار به این صورت خلاصه می‌شود:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (۵\text{-}۱۵)$$

مثال ۵-۳۶ احتمال اینکه خانواده‌ای اتومبیل، موتور سیکلت و یا هر دوی آنها را داشته باشد به ترتیب ۰/۶۱، ۰/۲۵ و ۰/۰۸ است. اگر خانواده‌ای به صورت تصادفی انتخاب شود می‌خواهیم احتمال این موارد را پیدا کنیم:

الف) اتومبیل نداشته باشد.

ب) دست‌کم یکی از این دو را داشته باشد.

اگر A را پیشامد داشتن اتومبیل و B را پیشامد داشتن موتور سیکلت در نظر بگیریم؛ آنگاه $P(A) = ۰/۶۱$، $P(B) = ۰/۲۵$ و $P(A \cap B) = ۰/۰۸$ است؛ بنابراین خواهیم داشت:

الف) $P(A^c) = ۱ - P(A) = ۱ - ۰/۶۱ = ۰/۳۹$

ب) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ۰/۶۱ + ۰/۲۵ - ۰/۰۸ = ۰/۷۸$

مثال ۵-۳۷ استادی در هر جلسه فقط از یکی از دانشجویان کلاس می‌خواهد که تمرینهای درس قبل را حل کند. احتمال اینکه از سعید بخواهد تمرینها را حل کند ۰/۰۵ و احتمال اینکه از رضا بخواهد ۰/۰۷ است. احتمال اینکه از یکی از این دو خواسته شود که تمرینها را حل کنند، چقدر است.

اگر پیشامد صدا زدن سعید یا رضا را به ترتیب با S و R نشان دهیم، $P(S) = ۰/۰۵$ و $P(R) = ۰/۰۷$ خواهد بود. چون امکان صدا زدن هر دو وجود ندارد؛ این دو پیشامد ناسازگارند؛ پس $P(S \cap R) = ۰$ و بنابراین $P(S \cup R) = ۰/۰۵ + ۰/۰۷ = ۰/۱۲$ است.

تمرین

۱. در هر یک از این عبارات اشتباهی وجود دارد. دلیل این اشتباه را توضیح دهید.

الف) احتمال آنکه کارمندی غیبت کند ۰/۰۴ و احتمال آنکه در محل کار خود حاضر شود ۰/۹۰ است.

ب) احتمال آنکه حساب مشکوک‌الوصولی سوخت شود ۰/۲۰، احتمال آنکه پرداخت شود ۰/۶۵ و احتمال آنکه هم سوخت و هم پرداخت شود ۰/۰۸ است.

ج) احتمال آنکه از بین ۸ تیر شلیک شده ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ تیر یا بیشتر به هدف بخورد به ترتیب برابر است با $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۳}{۱۶}$، $\frac{۵}{۳۲}$، $\frac{۷}{۶۴}$، $\frac{۲۳}{۱۲۸}$.

۲. دو پیشامد A و B را با $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$، $P(A^c) = \frac{2}{3}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ در نظر بگیرید و $P(A)$، $P(B)$ و $P(A \cap B^c)$ را پیدا کنید.

۳. با فرض اینکه $P(A) = ۰/۴۵$، $P(B) = ۰/۳۲$ و $P(A \cap B^c) = ۰/۱۳$ باشد، احتمالات زیر را پیدا کنید:

الف) $P(A \cup B)$ ب) $P[(A \cup B)^c]$

ج) $P(A^c \cap B)$ د) $P(A^c \cup B)$

ه) $P(A^c \cup B^c)$ و) $P(A^c \cap B^c)$

۴. چهار نفر داوطلب پُست معاونت اداری سازمانی هستند. اگر احتمال انتخاب شدن فرد A دو برابر احتمال انتخاب شدن فرد B باشد و B و C شانس برابری برای انتخاب شدن داشته باشند و احتمال انتخاب شدن فرد C دو برابر فرد D باشد، احتمالات زیر را پیدا کنید:

الف) احتمال اینکه فرد C انتخاب شود.

ب) احتمال اینکه فرد A انتخاب نشود.

ج) احتمال اینکه فرد A یا B یا C انتخاب شوند.

۵. دانشگاهی در یکی از استانها واقع شده است. $\frac{۱}{۳}$ دانشجویان آن دانشگاه خارج از خوابگاه دانشجویی زندگی می‌کنند. $\frac{۵}{۹}$ دانشجویان اهل آن استان‌اند و $\frac{۳}{۴}$ دانشجویان یا اهل آن استان نیستند یا در خوابگاه دانشجویی زندگی می‌کنند. احتمال اینکه دانشجویی که به صورت تصادفی از این دانشگاه انتخاب می‌شود اهل آن استان نباشد و در خوابگاه زندگی کند چقدر است؟

۶. بازرسی قصد دارد قابلیت اطمینان دو پمپ بنزین را مقایسه کند. هر پمپ بنزینی

در معرض دو نوع نقص قرار دارد؛ نقص فنی پمپ و نشت بنزین. هنگامی که یکی از این دو نقص (یا هر دو) روی دهد، پمپ بنزین تعطیل می‌شود. داده‌های زیر وضعیت دو پمپ بنزین را به این صورت نشان می‌دهد:

پمپ بنزین	احتمال نقص فنی	احتمال نشت بنزین	احتمال هر دو
۱	۰/۰۷	۰/۱۰	۰
۲	۰/۰۹	۰/۱۲	۰/۰۶

کدام‌یک از این دو پمپ بنزین دارای قابلیت اطمینان کمتری هستند؟

۵ـ۶ احتمال شرطی

اگر بدون توصیف فضای نمونه صحبت از احتمال شود، ممکن است مشکلاتی پیش بیاید؛ مثلاً اگر از مدیری سؤال شود احتمال اینکه کارمندی را به تصادف انتخاب کنیم و حقوقش بالای ۴۰۰ هزار ریال باشد چقدر است، وی ممکن است چندین جواب مختلف بدهد که همه آنها درست باشد. یکی از جوابها ممکن است شامل حال کارمندانی باشد که تحصیلاتشان در حد دیپلم یا زیر دیپلم است. جواب دیگر ممکن است شامل حال کارمندانی باشد که مدرک کاردانی یا کارشناسی دارند. سومین جواب ممکن است شامل حال افرادی باشد که کارشناس ارشد یا بالاتر هستند. برای پرهیز از چنین مشکلاتی و برای گرفتن پاسخ مورد نظر، باید فضای نمونه را مشخص و محدود کنیم.

می‌توان احتمال شرطی را به این صورت تعریف کرد:

اگر پیشامدی همانند A به پیشامد دیگری همانند B مربوط باشد و بدانیم پیشامد B به وقوع پیوسته است، در این صورت احتمال وقوع A، به احتمال وقوعِ A به شرط B($P(A/B)$) تغییر می‌یابد که آن را «احتمال شرطی» گوییم.

نماد «/» در ($P(A/B)$) نشان‌دهنده «کسر» نیست بلکه نشان‌دهنده احتمال شرطی است.

مثال ۵ـ۳۸ یک سازمان پژوهشی حمایت از مصرف‌کننده درباره ۵۰ تعمیرگاه

تلویزیون بررسیهایی انجام داده است. اطلاعات به دست آمده در این جدول خلاصه شده است.

	تعمیرگاه مجاز	تعمیرگاه غیر مجاز
با سابقه ۱۰ سال یا بیشتر	۱۶	۴
با سابقه کمتر از ۱۰ سال	۱۰	۲۰

می‌خواهیم هر یک از این احتمالات را در صورتی که فردی برحسب تصادف یکی از این تعمیرگاهها را انتخاب کند، محاسبه کنیم:

الف) احتمال اینکه این تعمیرگاه مجاز باشد.

ب) احتمال اینکه تعمیرگاهی که ۱۰ سال یا بیشتر سابقه دارد، مجاز باشد.

منظور ما از «انتخاب برحسب تصادف» این است که در هر حالت، تمام انتخابهای ممکن هم‌شانس باشند.

الف) اگر L انتخاب مرکز تعمیر مجاز را نشان دهد، n (L) تعداد عناصر L را و n (S) تعداد عناصر فضای نمونه را نشان می‌دهد؛ در این صورت خواهیم داشت:

$$P(L)=\frac{n(L)}{n(S)}=\frac{۱۶+۱۰}{۵۰}=۰/۵۲$$

ب) برای سؤال دوم، فضای نمونه محدودتر می‌شود (۲۰ = ۴ + ۱۶)؛ زیرا حالا می‌دانیم که تعمیرگاه دارای ۱۰ سال یا بیشتر سابقه شغلی است پس سطر دوم جدول حذف می‌شود. از این ۲۰ تعمیرگاه، ۱۶ تای آن مجازند. اگر T تعمیرگاهی را نشان دهد که ۱۰ سال یا بیشتر سابقه دارد؛ در این صورت خواهیم داشت:

$$P(L/T)=\frac{۱۶}{۲۰}=۰/۸$$

همان‌طور که انتظار می‌رفت، $P(L/T)$ به طور قابل ملاحظه‌ای از $P(L)$ بزرگ‌تر است.

در مثال اخیر به نحوه محاسبه $P(L/T)$ توجه کنید. می‌توانستیم این احتمال را با تقسیم $P(L\cap T)$ بر $P(T)$ تعریف کنیم؛ یعنی:

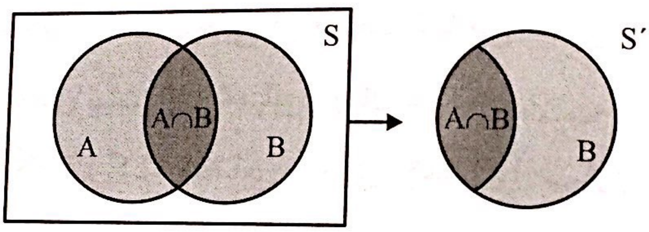
$$P(L/T)=\frac{P(L\cap T)}{P(T)}$$

با تعمیم این مثال، احتمال شرطی به این صورت تعریف می‌شود:

اگر A و B دو پیشامدِ دلخواه از فضای نمونه S باشد و $P(B)\neq 0$، احتمال وقوع A به شرط B برابر است با:

$$\text{احتمال شرطی} \quad \boxed{P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}} \qquad (۵\text{-}۱۶)$$

در شکل ۱۰-۵ نمودار ون مربوط به احتمال وقوع A به شرط B، نشان داده شده است.



شکل ۱۰-۵ احتمال وقوع A به شرط B

چنان که مشاهده می‌شود در احتمال شرطی فضای نمونه محدودتر شده است.

مثال ۳۹-۵ اطلاعات مربوط به سود خالص یک سالِ ۱۵۰ شرکت که در ۴ صنعت مختلف فعالیت می کنند، به این شرح به دست آمده است:

میزان سود / صنعت	کمتر یا مساوی ۵۰ میلیون ریال E	بیشتر از ۵۰ میلیون ریال F	جمع
صنعت نساجی (A)	۱۷	۱۵	۳۲
صنعت آلومینیم (B)	۳۵	۳۰	۶۵
صنعت مواد غذایی (C)	۲۸	۵	۳۳
صنعت چوب و کاغذ (D)	۱۰	۱۰	۲۰
جمع	۹۰	۶۰	۱۵۰

می‌خواهیم این احتمالات را در صورتی که یکی از این شرکتها برحسب تصادف انتخاب شده باشد، محاسبه کنیم:

الف) احتمال اینکه شرکت انتخابی سودی کمتر یا مساوی ۵۰ میلیون ریال داشته باشد.

ب) احتمال اینکه شرکت انتخابی در صنعت آلومینیم مشغول فعالیت باشد.

ج) احتمال اینکه شرکت انتخابی هم از صنایع نساجی باشد و هم سودی بیشتر از ۵۰ میلیون ریال داشته باشد.

د) احتمال اینکه شرکت انتخابی یا در صنعت نساجی باشد یا سودی بیشتر از ۵۰ میلیون ریال داشته باشد.

ه) احتمال اینکه شرکت انتخابی در صنعت نساجی مشغول فعالیت باشد، در صورتی که بدانیم سودی بیشتر از ۵۰ میلیون ریال دارد.

و) احتمال اینکه شرکت انتخابی سودی کمتر یا مساوی ۵۰ میلیون ریال داشته باشد، در صورتی که بدانیم در صنعت نساجی فعالیت ندارد.

الف) $P(E)=\frac{۹۰}{۱۵۰}=۰/۶$

ب) $P(B)=\frac{۶۵}{۱۵۰}=۰/۴۳$

ج) $P(A\cap F)=\frac{۱۵}{۱۵۰}=۰/۱$

د) $P(A\cup F)=P(A)+P(F)-P(A\cap F)=\frac{۳۲}{۱۵۰}+\frac{۶۰}{۱۵۰}-\frac{۱۵}{۱۵۰}=۰/۵۱$

ه) $P(A/F)=\frac{P(A\cap F)}{P(F)}=\frac{۱۵/۱۵۰}{۶۰/۱۵۰}=\frac{۱۵}{۶۰}=۰/۲۵$

و) $P(E/A^c)=\frac{P(E\cap A^c)}{P(A^c)}=\frac{(۳۵+۲۸+۱۰)/۱۵۰}{(۶۵+۳۳+۲۰)/۱۵۰}=۰/۶۲$

مثال ۴۰-۵ در خانواده‌ای که دو فرزند دارند ـ فرض کنید برای داشتن یک فرزند احتمال پسر و دختر شدن برابر است ـ می‌خواهیم این احتمالات را محاسبه کنیم:

الف) احتمال اینکه هر دو فرزند پسر باشند.

ب) احتمال اینکه هر دو پسر باشند، در صورتی که بدانیم حداقل یکی از فرزندها پسر است.

اگر پسر را با B و دختر را با G نشان دهیم، فضای نمونه ما عبارت خواهد بود از: $S = \{GG, GB, BG, BB\}$.

الف) پیشامد داشتن دو پسر را با A نشان می‌دهیم. چون عضوهای فضای نمونه هم‌شانس‌اند $A = \{BB\}$ است و $P(A) = \frac{۱}{۴}$.

ب) پیشامد داشتن حداقل یک پسر را با C نشان می‌دهیم؛ در این صورت $C = \{GB, BG, BB\}$ و $P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{۱/۴}{۳/۴} = \frac{۱}{۳}$ است.

۵-۶-۱ قانون ضرب احتمالات

گفته شد که احتمال A به شرط B برابر است با:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

حال اگر دو طرف این رابطه را در $P(B)$ ضرب کنیم، خواهیم داشت: $P(A \cap B) = P(B)P(A/B)$ که به «قانون ضرب احتمالات» معروف است.

اگر همین عمل را برای $P(B/A)$ انجام دهیم، خواهیم داشت $P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$.

قانون ضرب احتمالات ما را در تعیین احتمال اشتراک دو پیشامد که محاسبه آنها به راحتی امکان‌پذیر نباشد، کمک می‌کند.

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B)P(A/B) = P(A)P(B/A)} \quad \text{قانون ضرب احتمالات} \qquad (۵\text{-}۱۷)$$

مثال ۵-۴۱ فرض کنید ظرفی حاوی ۱۲ مهره است که ۵ مهره آن قرمز و بقیه سبز هستند. می‌خواهیم بدانیم اگر دو مهره را بدون جایگزینی بیرون بیاوریم، احتمال آنکه هر دو قرمز باشند چقدر است.

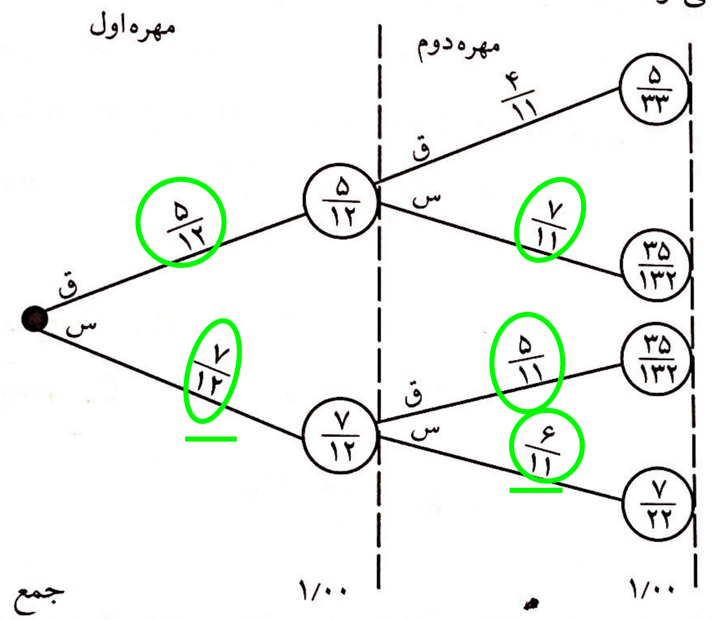
P(قرمز بودن هر دو مهره) = P (قرمز بودن مهره اول)

P (قرمز بودن مهره اول/قرمز بودن مهره دوم)

$$= \frac{۵}{۱۲} \times \frac{۴}{۱۱}$$

$$= \frac{۵}{۳۳}$$

برای این مثال، می‌توان از نمودار درختی احتمالات، به این صورت استفاده کرد:



قانون ضرب احتمالات را می‌توان به راحتی برای بیش از دو پیشامد نیز به کار برد. فرمول آن برای سه پیشامد این گونه خواهد بود:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B/A)P(C/A \cap B) \qquad (۵\text{-}۱۸)$$

مثال ۴۲-۵ با توجه به داده‌های مثال ۴۱-۵، اگر ۳ مهره از ظرف بیرون آورده شود می‌خواهیم این احتمالات را محاسبه کنیم:

الف) احتمال اینکه هر ۳ مهره قرمز باشد.

ب) احتمال اینکه اولی و سومی قرمز، و دومی سفید باشد.

الف) P(هر سه قرمز باشد) $= \frac{۵}{۱۲} \times \frac{۴}{۱۱} \times \frac{۳}{۱۰} = \frac{۱}{۲۲}$

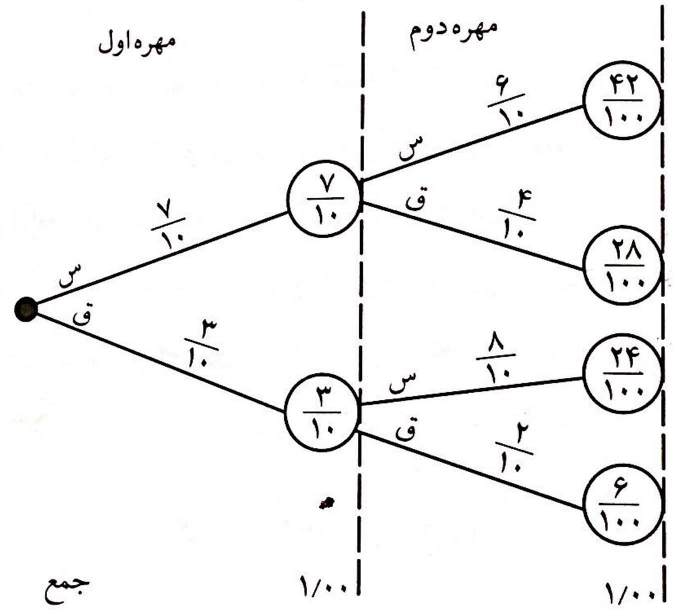
ب) P(مهره اول و سوم قرمز باشد) $= \frac{۵}{۱۲} \times \frac{۷}{۱۱} \times \frac{۴}{۱۰} = \frac{۷}{۶۶}$

مثال ۴۳ـ۵ ظرفی حاوی ۳ مهره قرمز و ۷ مهره سبز است. به طور تصادفی مهره‌ای از ظرف بیرون می‌آوریم و به جای آن مهره‌ای به رنگ دیگر داخل ظرف می‌اندازیم و سپس مهره دوم را از ظرف بیرون می‌آوریم، می‌خواهیم بدانیم هر یک از این احتمالات چقدر است.

الف) احتمال آنکه هر دو مهره سبز باشد.

ب) احتمال آنکه مهره دوم سبز باشد.

بهتر است نمودار درختی احتمالات را برای این مثال رسم کنیم.



الف) $P(\text{هر دو سبز باشند}) = \frac{۷}{۱۰} \times \frac{۶}{۱۰} = \frac{۴۲}{۱۰۰} = ۰/۴۲$

ب) $P(\text{مهره دوم سبز باشند}) = P(\text{اولی سبز و دومی سبز باشد})$

$+ P(\text{اولی قرمز و دومی سبز باشد})$

$= \frac{۷}{۱۰} \times \frac{۶}{۱۰} + \frac{۳}{۱۰} \times \frac{۸}{۱۰} = \frac{۴۲}{۱۰۰} + \frac{۲۴}{۱۰۰} = ۰/۶۶$

۲ـ۶ـ۵ دو پیشامد مستقل

دو پیشامد را «مستقل» گوییم، در صورتی که وقوع یا عدم وقوع یکی در وقوع و یا عدم وقوع دیگری هیچ تأثیری نداشته باشد؛ مثلاً احتمال اینکه در ساعت هشت و نیم

در خیابان زند شیراز تصادفی روی دهد در وقوع و یا عدم وقوع غرق شدن یک قایق در بندر انزلی در همین ساعت هیچ تأثیری نخواهد داشت.

در قانون ضرب احتمالات داشتیم $P(A\cap B)=P(B)P(A/B)$. اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، وقوع پیشامد B در احتمال وقوع پیشامد A هیچ تأثیری ندارد؛ یعنی $P(A/B)=P(A)$. قانون ضرب احتمالات برای دو پیشامد مستقلِ A و B به این صورت ساده می‌شود:

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)P(B)} \quad \text{شرط دو پیامد مستقل} \tag{۵_۱۹}$$

بنابراین می‌توان وجود این رابطه را «شرط استقلال» دو پیشامد نیز دانست.

مثال ۴۴_۵ سکه‌ای را دو بار پرتاب می‌کنیم. می‌دانیم در بار اول شیر آمده است، می‌خواهیم احتمال اینکه در بار دوم نیز شیر بیاید را محاسبه کنیم.

خط و شیر آمدن سکه در بار دوم هیچ ارتباطی به شیر آمدن در دفعه اول ندارد؛ چرا که این دو از هم مستقل‌اند، بنابراین احتمال شیر آمدن در دفعه دوم ۰/۵ است؛ به عبارت دیگر:

$$P(H/H)=P(H)=۰/۵$$

گاهی دو پیشامد مستقل و ناسازگار از هم تمیز داده نمی‌شوند. دو پیشامد ناسازگار را دو پیشامدی تعریف کردیم که اگر یکی رخ دهد دیگری قطعاً رخ نخواهد داد. مجموعه اشتراک دو پیشامد ناسازگار تهی است. دو پیشامد مستقل را دو پیشامدی تعریف کردیم که هیچ تأثیری روی هم ندارند؛ به عبارت دیگر اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه یک آزمایش باشند، خواهیم داشت:

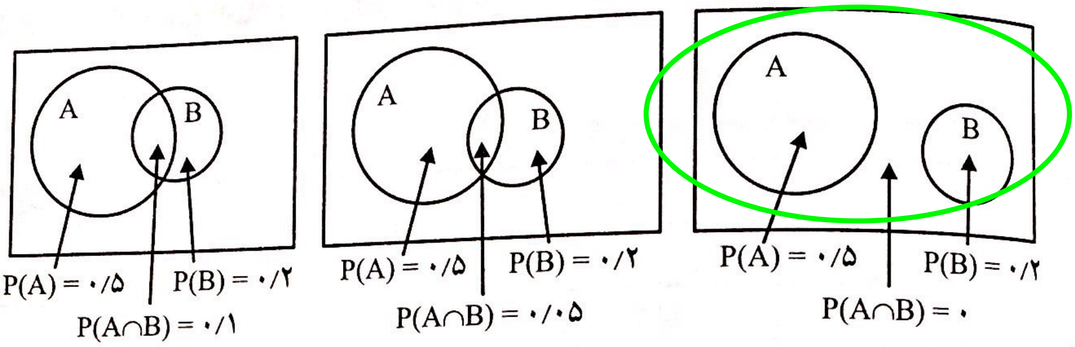
$$\text{در دو پیشامد ناسازگار:}\ P(A\cap B)=۰ \tag{۵_۲۰}$$

$$\text{در دو پیشامد مستقل:}\ P(A\cap B)=P(A)P(B) \tag{۵_۲۱}$$

همچنین دقت نمایید که مستقل بودن و ناسازگار بودن پشت و روی یک سکه

نیستند؛ به عبارت دیگر اگر دو پیشامد مستقل نبودند نمی‌توان گفت که به طور قطع ناسازگارند. افزون بر آن، ممکن است دو پیشامد غیرمستقل سازگار باشند.

مثال ۴۵ـ۵ این سه نمودار را در نظر بگیرید. می‌خواهیم بدانیم کدام‌یک ناسازگار، کدام‌یک مستقل و کدام‌یک نه ناسازگار و نه مستقل‌اند.



نمودار ون سمت راست نشان‌دهنده دو پیشامد ناسازگار است؛ زیرا $P(A\cap B)=۰$ و نمودار ون سمت چپ نشان‌دهنده دو پیشامد مستقل است؛ زیرا $۰/۱=P(A\cap B)=P(A)P(B)=۰/۵\times۰/۲=۰/۱$ و نمودار ون میانی نشان‌دهنده دو پیشامدی است که نه مستقل‌اند و نه ناسازگار؛ زیرا $۰/۰۵=P(A\cap B)\neq ۰$ و $۰/۰۵=P(A\cap B)\neq P(A)P(B)=۰/۵\times۰/۲=۰/۱$.

تمرین

۱. فرض کنید اگر خانواده‌ای بیش از ۵۰ میلیون ریال در سال درآمد داشته باشند، احتمال اینکه دو اتومبیل داشته باشند ۷/۵ درصد است. ۶ درصد خانواده‌ها درآمد سالیانه‌شان بیش از ۵۰ میلیون ریال است و ۵/۲ درصد دو اتومبیل دارند؛ احتمال اینکه خانواده‌ای دو اتومبیل داشته و درآمدش نیز در سال بیش از ۵۰ میلیون ریال باشد، چقدر است؟

۲. اگر $P(A)=\frac{۳}{۱۴}$، $P(B)=\frac{۱}{۶}$، $P(C)=\frac{۱}{۳}$، $P(A\cap C)=\frac{۱}{۷}$ و $P(B/C)=\frac{۵}{۲۱}$ باشد؛ احتمالات $P(A/C)$، $P(C/A)$، $P(B\cap C)$، $P(C/B)$ را حساب کنید.

۳. دو پیشامد A و B و $P(A)=۰/۶۵$، $P(B)=۰/۸۰$، $P(A/B)=P(A)$ و

$P(B/A) = ۰/۸۵$ را در نظر بگیرید؛ آیا این احتمالات با هم همخوانی دارند؟ چرا؟

۴. فرض کنید A و B پیشامدهای مستقلی باشند به طوری که $P(A) = ۰/۶$ و $P(B) = ۰/۲$. مطلوب است محاسبه $P(A \cup B^c)$.

۵. فرض کنید این اطلاعات را از آموزشِ دانشکده زبانهای خارجی دانشگاه تهران گرفته‌ایم:

رشته / دانشجوی سال	زبان انگلیسی	زبان روسی	زبان آلمانی
اول	۲۰۰	۱۸۵	۴۰
دوم	۱۸۰	۱۲۰	۳۰
سوم	۱۲۰	۸۵	۳۵
چهارم	۱۰۵	۹۰	۲۰

می‌دانیم تعداد دانشجویان این دانشکده ۱۲۱۰ نفر است، اگر برحسب تصادف دانشجویی را انتخاب کنیم، هر یک از این احتمالات چقدر است؟

الف) احتمال اینکه دانشجوی زبان روسی نباشد.

ب) احتمال اینکه دانشجوی زبان آلمانی نباشد، در صورتی که بدانیم این فرد دانشجوی سال چهارم است.

ج) احتمال اینکه هم دانشجوی سال دوم و هم زبان روسی باشد.

د) آیا دانشجوی رشته زبان انگلیسی بودن مستقل از دانشجوی سال اول بودن است؟

۶. جعبه‌ای محتوی ۳ سکه است. یکی از آنها سالم، یکی دیگر دو شیره و دیگری نیز ناسالم است؛ به طوری که احتمال شیرآمدن سکه ناسالم $\frac{۱}{۳}$ است. سکه‌ای را به طور تصادفی انتخاب و پرتاب می‌کنیم. نمودار درختی آن را رسم کرده، مشخص نمایید احتمال آنکه شیر ظاهر شود، چقدر است؟

۷. در کلاسی ۱۰ پسر و ۵ دختر شرکت دارند. ۳ دانشجو به طور تصادفی یکی پس از دیگری انتخاب می‌شوند؛ هر یک از این احتمالات را محاسبه کنید.
الف) احتمال اینکه دو دانشجوی اول پسر و سومی دختر باشد.
ب) احتمال اینکه اولی و سومی دختر باشد.
ج) احتمال اینکه اولی و سومی هم‌جنس و دومی از جنس مخالف باشد.

۵ـ۷ قضیه بیز (احتمالات پیشین و پسین)

ممکن است شما احتمال وقوع پیشامدی را در شرایط معمولی بدانید، ولی اگر اطلاعات جدیدی به دست آورید در احتمال وقوع پیشامد اولیه تجدید نظر کنید. به احتمال وقوع پیشامدی قبل از کسب اطلاعات جدید «احتمال پیشین»[1] و به احتمال وقوع آن پیشامد بعد از کسب اطلاعات جدید «احتمال پسین»[2] می‌گوییم. این دو گونه احتمال در نظریه تصمیم‌گیری کاربرد فراوان دارد و قضیه بیز ما را در تجدید نظر احتمالات، در صورت دسترسی به اطلاعات جدید، کمک می‌کند؛ مثلاً مدیر شرکتی که تولیدکننده پوشاک گرم است فکر می‌کند به احتمال ۷۰ درصد دمای زمستان امسال بین ۲- تا ۱۵- درجه سانتیگراد است و به فکر می‌افتد تعداد مشخصی پوشاک گرم تولید کند. حال اگر از رادیو بشنود که به دلایلی دمای زمستان امسال خیلی پایین‌تر از سالهای قبل خواهد بود، ممکن است احتمالش به ۸۵ درصد افزایش یافته و بر تعداد تولیدش بیفزاید. احتمال اول (۷۰ درصد) را احتمال پیشین و احتمال دوم (۸۵ درصد) را احتمال پسین می‌گوییم.

در مبحث احتمال شرطی داشتیم:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}, P(A\cap B)=P(A)P(B/A) \qquad (۵\text{ـ}۲۲)$$

حال با جایگزین کردن $P(A)P(B/A)$ به جای $P(A\cap B)$ خواهیم داشت:

1. prior probability
2. posterior probability

$$\boxed{P(A/B)=\frac{P(A)P(B/A)}{P(B)}}$$ شکل ساده قضیه بیز (۵-۲۳)

این فرمول شکل ساده‌ای از قضیه بیز است.

مثال ۵-۴۶ در شهری ماشینها را از نظر دودزایی آزمایش و در صورت تشخیص دودزایی بیش از حد، ماشین را متوقف می کنند. ۲۵ درصد از ماشینهای این شهر بیش از حد دودزا هستند. در آزمایش، ۹۸ درصد از ماشینهایی که بیش از حد دودزا باشند، دودزای بیش از حد تشخیص داده می‌شوند، اما تنها ۷ درصد از ماشینهایی که بیش از حد دودزا نیستند، دودزای بیش از حد تشخیص داده می‌شوند. می‌خواهیم بدانیم احتمال اینکه ماشینی که دودزای بیش از حد تشخیص داده شده واقعاً بیش از حد دودزا باشد چقدر است.

اگر A را پیشامد تشخیص دودزایی بیش از حد و B را پیشامد دودزایی بیش از حد ماشین تعریف کنیم، طبق اطلاعات مثال داریم: $P(B)=۰/۲۵$، $P(A/B)=۰/۹۸$ و $P(A/B^c)=۰/۰۷$.

قبل از اینکه $P(B/A)$ را حساب کنیم، ناچاریم احتمال $P(A)$ را حساب کنیم. $P(A)$ یا احتمال تشخیص دودزایی بیش از حد برابر است با احتمال اینکه ماشین دودزای بیش از حد باشد و تشخیص هم این گونه باشد به اضافه احتمال اینکه ماشین دودزای بیش از حد نباشد، ولی تشخیص داده شود که دودزای بیش از حد است؛ یعنی:

$$P(A)=(۰/۲۵)(۰/۹۸)+(۰/۷۵)(۰/۰۷)=۰/۲۹۷۵$$

بنابراین احتمال اینکه ماشینی که دودزای بیش از حد تشخیص داده شده واقعاً هم بیش از حد دودزا باشد برابر است با:

$$P(B/A)=\frac{P(B)P(A/B)}{P(A)}=\frac{(۰/۲۵)(۰/۹۸)}{۰/۲۹۷۵}=۰/۸۲$$

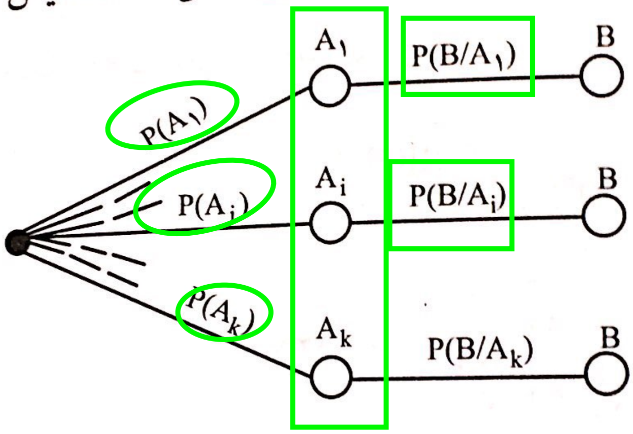
در بسیاری از موارد، معمولاً عواملی که نقش تعیین کننده‌ای در وقوع پیشامدی دارند

بیش از دو عامل هستند. اگر A_1، A_2، ... و A_K نشان‌دهنده K حادثه ناسازگار باشند که می‌توانند حادثه B را باعث شوند؛ آنگاه احتمال اینکه A_i عامل وقوع باشد، برابر است با:

(۵ـ۲۴) شکل گسترده قضیه بیز

$$\boxed{P(A_i/B)=\frac{P(A_i\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(A_1)P(B/A_1)+\ldots+P(A_i)P(B/A_i)+\ldots+P(A_K)P(B/A_K)}}$$

می‌توان این فرمول را به صورت نمودار درختی شکل ۵ـ۱۱ نمایش داد.



شکل ۵ـ۱۱ نمودار درختی احتمال برای فرمول بیز

مثال ۵ـ۴۷ سه ماشین A، B و C به ترتیب ۶۰ درصد، ۳۰ درصد و ۱۰ درصد کل محصولات کارخانه‌ای را تولید می‌کنند. درصد محصولات معیوب این ماشینها به ترتیب برابر ۲ درصد، ۳ درصد و ۴ درصد است. از میان محصولات این کارخانه محصولی به صورت تصادفی انتخاب می‌شود، می‌خواهیم هر یک از این احتمالات را محاسبه کنیم:

الف) احتمال اینکه معیوب باشد.

ب) احتمال اینکه با ماشین C تولید شده باشد، در صورتی که بدانیم کالا معیوب است. اگر پیشامد معیوب بودن را با X نشان دهیم:

الف)
$$P(X)=P(A)P(X/A)+\boxed{P(B)P(X/B)}+\boxed{P(C)P(X/C)}$$
$$=۰/۶۰\times۰/۰۲+۰/۳۰\times۰/۰۳+۰/۱۰\times۰/۰۴=۰/۰۲۵$$

ب)

$$\boxed{P(C/X)}=\frac{P(C)P(X/C)}{P(A)P(X/A)+P(B)P(X/B)+P(C)P(X/C)}$$

$$=\frac{۰/۱۰\times ۰/۰۴}{۰/۶۰\times ۰/۰۲+۰/۳۰\times ۰/۰۳+۰/۱۰\times ۰/۰۴}=\boxed{۰/۱۶}$$

مثال ۴۸ـ۵ ظرفی حاوی ۳ مهره قرمز و ۷ مهره سبز است. مهره‌ای از ظرف بیرون می‌آوریم و سپس مهره‌ای به رنگ دیگر به داخل ظرف می‌اندازیم و سپس مهره دومی را از ظرف بیرون می‌آوریم. اگر دو مهره انتخابی همرنگ باشند، می‌خواهیم بدانیم احتمال قرمز بودن آنها چقدر است.

اگر پیشامد قرمز بودن دو مهره را با RR، همرنگ بودن آنها را با S و سبز بودن آنها را با GG نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$P(RR/S)=\frac{\boxed{P(RR)}P(S/RR)}{P(RR)P(S/RR)+P(GG)P(S/GG)}$$

$$=\frac{\boxed{\frac{۶}{۱۰۰}\times ۱}}{\frac{۶}{۱۰۰}\times ۱+\boxed{\frac{۴۲}{۱۰۰}}\times ۱}=\boxed{۰/۱۲۵}$$

نمودار درختی این احتمال در مثال ۴۳ـ۵ آورده شده است.

تمرین

۱. احتمال وقوع ۳ پیشامد A، B و C به ترتیب برابر است با ۰/۳۵، ۰/۴۵ و ۰/۲.

احتمال وقوع پیشامد X به شرط وقوع هر یک عبارت است از: $P(X/A)=۰/۸$، $P(X/B)=۰/۳$ و $P(X/C)=۰/۶۵$. موارد ذیل را پیدا کنید.

الف) $\boxed{P(A/X)}$،

ب) $P(B/X)$،

ج) $P(C/X)$،

۲. پزشک یک تیم فوتبال می‌داند که در زمستان، ۴۰ درصد از بازیهای تیم روی

چمن مصنوعی انجام می‌شود. او همچنین می‌داند که خطر مصدوم شدن یک بازیکن در چمن مصنوعی ۵۰ درصد بیشتر از چمن طبیعی است. اگر احتمال مصدوم شدن یک بازیکن در چمن مصنوعی ۰/۴۲ باشد، هر یک از احتمالات زیر را محاسبه کنید:

الف) احتمال اینکه بازیکنی مصدوم شود.

ب) اگر بازیکنی مصدوم شده باشد، احتمال آنکه روی چمن مصنوعی مصدوم شده باشد.

۳. تمرین ۲ را در نظر بگیرید. پزشک تیم علاقه‌مند به بررسی رابطه بین مصدوم شدن و نوع بازیکن نیز هست. اطلاعاتش را در طول ۳ سال جمع‌آوری و در این جدول خلاصه کرده است:

شرح / نوع بازیکن	خط حمله	خط دفاعی	خط میانی	دروازه‌بان
تعداد بازکنان	۴۵	۵۶	۲۴	۸
تعداد مصدومین	۳۲	۳۸	۱۱	۳

اگر بازیکن مصدومی را برحسب تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه وی به ترتیب بازیکن خط حمله، خط دفاع، خط میانی، یا دروازه‌بان باشد، چقدر است؟

۴. ظرفی حاوی ۵ مهره قرمز و ۷ مهره سفید است. مهره‌ای را به صورت تصادفی از ظرف خارج می‌کنیم و به جای آن ۲ مهره به رنگ دیگر در داخل ظرف می‌اندازیم و سپس مهره دومی را از ظرف به صورت تصادفی بیرون می‌آوریم، هر یک از این احتمالات را محاسبه کنید:

الف) احتمال اینکه هر دو مهره همرنگ باشند.

ب) احتمال اینکه هر دو مهره سفید باشند، در صورتی که بدانیم هر دو همرنگ هستند.

۵ـ۸ خلاصه

در اغلب موارد به دلیل فقدان اطلاعات کافی و کامل در مورد پدیده‌ها، برای اظهارنظر در مورد آنها، از «احتمال» استفاده می‌شود؛ به همین دلیل، مدیران می‌توانند با استفاده از نظریه احتمال، مبادرت به پیش‌بینی و تصمیم‌گیری کنند.

در این فصل، ضمن مطرح کردن مفاهیم اولیه احتمال (مفهوم احتمال، احتمال عینی و ذهنی، آزمایش، فضای نمونه و انواع آن، پیشامد و پیامدهای مقدماتی هم‌شانس)، نحوهٔ محاسبه احتمال یک پیشامد مشخص شد. همچنین گفته شد که در بعضی از شرایط نیازی به فهرست کردن همهٔ عناصر فضای نمونه نیست؛ بدین جهت با بیان کردن قواعد احتمال و بررسی پیشامدها، مفهوم احتمال شرطی و نحوه تبدیل احتمالات پیشین به احتمالات پسین (با استفاده از قضیه بیز) توضیح داده شد.

۵ـ۹ سؤالات و مسائل

سؤالات دوگزینه‌ای

۱. در نظریه احتمال، به مجموعه پیامدهای ممکن یک آزمایش، فعالیت می‌گویند.

ص□ غ□

۲. با کسب اطلاعات جدید و با استفاده از قضیه بیز می‌توان احتمالات پیشین را به احتمالات پسین تبدیل کرد.

ص□ غ□

۳. احتمال ذهنی چیزی بیش از حدسی زیرکانه نیست. ص□ غ□

۴. در هنگام استفاده از فراوانی نسبی به عنوان احتمال، هر چه تعداد آزمایشها بیشتر شود احتمال کم‌اهمیت‌تر می‌گردد.

ص□ غ□

۵. دو پیشامد لزوماً یا مستقل‌اند یا ناسازگار. ص□ غ□

۶. قضیه بیز، فرمولی برای تجدید نظر در احتمالات پیشین است.

ص□ غ□

۷. استفاده از فراوانی نسبی به عنوان احتمال نیازمند به حداکثر ۱۰۰ آزمایش است.

ص□ غ□

۸. دو پیشامد لزوماً یا سازگارند یا ناسازگار. ص□ غ□

۹. اگر وقوع یک پیشامد بر احتمال وقوع پیشامد دیگر هیچ تأثیری نداشته باشد، این دو پیشامد را از نظر آماری مستقل می گوییم. ص□ غ□

۱۰. $P(A \cup B)$ یعنی احتمال وقوع هم پیشامد A و هم پیشامد B. ص□ غ□

۱۱. دو پیشامد A و B مستقل‌اند، اگر $P(A/B) = P(A)$. ص□ غ□

۱۲. اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، آنگاه احتمال وقوع هم A و هم B برابراست با $P(A) \times P(B)$. ص□ غ□

۱۳. تعداد عضوهای فضای نمونه نامحدود، لزوماً نامتناهی نیست. ص□ غ□

۱۴. احتمال وقوع یک پیشامد همواره کوچک‌تر از یک است. ص□ غ□

۱۵. در ترکیب، نحوه آرایش اشیاء مهم است. ص□ غ□

۱۶. تعداد جایگشتهای دوری n شیء برابر است با $(n-1)!$. ص□ غ□

۱۷. تعداد ترکیبهای r شیء از n شیء را با P_r^n نشان می‌دهیم. ص□ غ□

۱۸. همواره رابطه $P(A \cap B) \geq P(A \cup B)$ برقرار است. ص□ غ□

۱۹. همواره رابطه $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ برقرار است. ص□ غ□

۲۰. همواره رابطه $P(A) + P(A^c) = 1$ برقرار است. ص□ غ□

۲۱. به پیشامدهایی که نمی‌توانند هم‌زمان رخ دهند، پیشامدهای مستقل می گویند. ص□ غ□

۲۲. شما معتقدید فردا احتمال باریدن برف ۰/۰۴ است، این احتمال عینی است. ص□ غ□

۲۳. احتمال A را با علم به وقوع پیشامد B، احتمال شرطی B به شرط A می گوییم. ص□ غ□

۲۴. سکه‌ای را پیش از این پرتاب کرده‌ایم، خط آمده است. حال در پرتاب مجدد آن انتظار داریم احتمال شیر آمدن بالاتر رود. ص□ غ□

۲۵. در احتمال شرطی، فضای نمونه کل آزمایش به فضای نمونه کوچک‌تری تقلیل می‌یابد. ص□ غ□

سؤالات چهارگزینه‌ای

۲۶. در صورتی که توزیع داده‌ها متقارن باشد، احتمال آنکه مقداری که به صورت تصادفی از جامعه‌ای انتخاب می‌شود بیشتر از میانگین آن جامعه باشد چقدر است؟

الف) ۰/۲۵ ج) ۱

ب) ۰/۵ د) ۰/۶۷

۲۷. فرض کنید دو تاس به همراه سکه‌ای پرتاب می‌شود و از شما خواسته می‌شود درخت احتمال آنها را رسم کنید؛ این درخت چند شاخه خواهد داشت؟

الف) ۳۸ ج) ۱۴

ب) ۷۲ د) ۷۴

۲۸. اگر A و B دو پیشامد مستقل و $P(A)=0/4$ و $P(A\cap B)=0/2$ باشد، احتمال اجتماع این دو پیشامد چقدر است؟

الف) ۰/۶ ج) ۰/۸

ب) ۰/۷ د) ۰/۹

۲۹. اگر A و B دو پیشامد ناسازگار و $P(A)=0/4$ و $P(B^c)=0/5$ باشد، کدام‌یک از موارد صحیح نیست؟

الف) $P(A\cup B)=0/9$ ج) $P(A^c\cup B)=0/6$

ب) $P(A^c)=0/6$ د) $P(A^c\cap B^c)=0$

۳۰. ۶۰ درصد محصولات کارخانه‌ای به وسیله ماشین شماره یک و ۴۰ درصد به وسیله ماشین شماره دو تولید می‌شوند. ۰/۰۲ محصولات ماشین شماره یک و ۰/۰۱ محصولات ماشین شماره دو معیوب‌اند. اگر یک کالا از محصولات کارخانه انتخاب شود، احتمال سالم بودن آن چقدر است؟

الف) ۰/۰۱۶ ج) ۰/۹۹۶

ب) ۰/۰۱۲ د) ۰/۹۸۴

۳۱. در سؤال ۳۰، اگر بدانیم کالای انتخابی معیوب است، احتمال اینکه به وسیله ماشین شماره دو تولید شده باشد چقدر است؟

الف) ۰/۲۰
ج) ۰/۷۰
ب) ۰/۲۵
د) ۰/۷۵

۳۲. مأمور کنترل کیفی کارخانه‌ای از بین دو انبار به طور تصادفی یک انبار و سپس کالایی را انتخاب و بازرسی می کند. انبار شماره یک دارای ۳۰ واحد کالاست که ۳ واحد آنها معیوب است و انبار شماره دو دارای ۱۰۰ واحد کالاست که ۱۰ واحد آنها معیوب است. احتمال معیوب بودن کالای انتخابی چقدر است؟

الف) ۰/۰۱
ج) ۰/۲۰
ب) ۰/۱۰
د) ۰/۰۰۲۵

۳۳. سیستمی دارای دو جزء است که احتمال کار نکردن هر کدام از آنها ۰/۲۰ است، اگر اجزاء به صورت سری قرار گرفته باشند و مستقل از هم کار کنند، احتمال کار کردن سیستم چقدر است؟

الف) ۰/۹۶
ج) ۰/۴۰
ب) ۰/۰۴
د) ۰/۶۴

۳۴. سؤال ۳۳ را در نظر بگیرید. اگر اجزاء به صورت موازی قرار گرفته باشند، احتمال کار کردن سیستم چقدر است؟

الف) ۰/۹۶
ج) ۰/۴۰
ب) ۰/۰۴
د) ۰/۶۴

۳۵. به چند طریق می‌توان با اعداد صفر تا ۹، شماره تلفن ۶ رقمی ساخت؟

الف) 10^6
ج) 9×10^5
ب) 9^6
د) 6×10^5

۳۶. اگر $P(A)=\frac{1}{3}$، $P(B)=\frac{1}{5}$ و $P(A/B)=\frac{1}{3}$ باشد، $P(A \cup B)$ چقدر است؟

الف) $\frac{8}{15}$
ج) $\frac{6}{15}$
ب) $\frac{7}{15}$
د) $\frac{9}{15}$

۳۷. فرض کنید احتمال داشتن فرزند پسر و دختر مساوی باشد. احتمال اینکه خانواده‌ای که ۳ فرزند دارد، دو پسر داشته باشد، چقدر است؟

الف) $\frac{۲}{۸}$ ج) $\frac{۱}{۸}$

ب) $\frac{۳}{۸}$ د) $\frac{۴}{۸}$

۳۸. در سؤال پیش، احتمال اینکه حداقل یک فرزند پسر داشته باشد، چقدر است؟

الف) $\frac{۵}{۸}$ ج) $\frac{۷}{۸}$

ب) $\frac{۶}{۸}$ د) ۱

۳۹. به چند طریق می‌توان ۳ کتاب مختلف آمار و ۲ کتاب مختلف ریاضی را در یک قفسه قرار داد؟

الف) ۱۲۰ ج) ۲۴

ب) ۱۲ د) ۹۶

۴۰. در سؤال پیش، اگر قرار باشد کتابهای آمار پهلوی هم قرار گیرند، به چند طریق می‌توان این ۵ کتاب را کنار هم قرار داد؟

الف) ۱۲ ج) ۳۶

ب) ۲۴ د) ۴۸

۴۱. در سؤال ۳۹، اگر قرار باشد کتابهای آمار پهلوی هم و کتابهای ریاضی نیز پهلوی هم قرار گیرند، به چند طریق می‌توان آنها را کنار هم قرار داد؟

الف) ۱۲ ج) ۳۶

ب) ۲۴ د) ۴۸

۴۲. به چند طریق می‌توان از ۱۲ کتاب، ۳ کتاب را به عنوان کتاب سال برگزید؟

الف) ۳۶ ج) ۱۳۲۰

ب) ۷۲ د) ۲۲۰

۴۳. به چند طریق می‌توان از ۱۲ کتاب که ۵ تای آن آمار و بقیه ریاضی هستند، یک کتاب آمار و ۲ کتاب ریاضی را به عنوان کتاب سال برگزید؟

الف) ۲۲۰ ج) ۱۱۰

ب) ۲۰۵ د) ۱۰۵

۴۴. در کلاسی ۵ دانشجوی دختر و ۱۰ دانشجوی پسر وجود دارد. اگر ۳ دانشجو به طور تصادفی انتخاب شود، احتمال اینکه هر سه پسر باشند، چقدر است؟

الف) $\frac{۸}{۲۷}$ ج) $\frac{۳}{۸}$

ب) $\frac{۲۴}{۹۱}$ د) $\frac{۵}{۱۶}$

۴۵. به چند طریق می‌توان دور یک میدان، ۱۰ پرچم مختلف را برافراشت؟

الف) !۱۰ ج) ۱-!۱۰

ب) !۹ د) ۱-!۹

۴۶. دانشجویی موظف است از ۵ سؤال اول به ۳ سؤال، و از ۱۵ سؤال بعد به ۱۲ سؤال جواب دهد، به چند طریق می‌تواند به سؤالات جواب دهد؟

الف) ۵۰۵۴ ج) ۴۵۵۰

ب) ۵۵۴۰ د) ۵۴۵۰

۴۷. ظرفی حاوی ۵ مهره قرمز و ۷ مهره سفید است. مهره‌ای را به طور تصادفی از ظرف خارج می‌کنیم، اگر قرمز بود به همراه آن یک مهره قرمز دیگر، و اگر سفید بود به همراه آن ۲ مهره سفید دیگر به داخل ظرف می‌اندازیم و سپس مهره دوم را برحسب تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آنکه مهره دوم قرمز باشد چقدر است؟

الف) $\frac{۱۲۵}{۳۱۲}$ ج) $\frac{۳۷}{۱۶۱}$

ب) $\frac{۵}{۲۴}$ د) $\frac{۷}{۳۲}$

۴۸. در سؤال پیش، اگر بدانیم مهره خارج شده در بار اول سفید بوده است، احتمال آنکه مهره دوم قرمز باشد چقدر است؟

الف) $\frac{۹}{۱۴}$ ج) $\frac{۹}{۱۲}$

ب) $\frac{۵}{۱۲}$ د) $\frac{۵}{۱۴}$

۴۹. در سؤال ۴۷، احتمال همرنگ نبودن ۲ مهره چقدر است؟

الف) $\frac{۴۵}{۱۰۴}$ ج) $\frac{۱۲۵}{۳۱۲}$

ب) $\frac{۵۹}{۱۰۴}$ د) $\frac{۱۸۷}{۳۱۲}$

۵۰. به چند طریق می‌توان ۹ اسباب‌بازی را بین ۴ بچه تقسیم کرد به شرط آنکه به کوچک‌ترین بچه ۳ اسباب‌بازی و به هر کدام از بچه‌های دیگر ۲ اسباب بازی برسد؟

الف) ۷۵۶۰
ب) ۵۷۶۰
ج) ۵۶۷۰
د) ۷۶۵۰

مسائل

۵۱. ۴ داوطلب برای پُست مدیریت مالی، ۵ داوطلب برای پست مدیریت اداری، و ۲ داوطلب برای ریاست سازمانی وجود دارند.

الف) یک رأی‌دهنده به چند طریق می‌تواند رأی خود را به این سه نفر (برای هر پست یک نفر) بدهد؟

ب) یک رأی‌دهنده به چند طریق می‌تواند رأی دهد، هرگاه از حق رأی ندادن خود به هر یک از این داوطلبها استفاده کند؟

۵۲. چند جایگشت مختلف می‌توان با کلمه «برنامه‌ریزی» ساخت؟

۵۳. اگر ۸ نفر شام را با هم صرف کنند، به چند طریق می‌توانند ۳ غذای مرغ، ۴ غذای ماهی و یک غذای میگو سفارش دهند؟

۵۴. دو قفل بر در وجود دارد و کلیدهای آنها در بین ۶ کلیدی است که معمولاً در جیب خود دارید. به دلیل شتابزدگی یکی از آنها را گم کرده‌اید، احتمال اینکه هنوز هم بتوانید در را باز کنید چقدر است؟

۵۵. تاسی را ۳ بار پرتاب می کنیم. احتمال اینکه:

الف) هر بار عدد بزرگ‌تری نسبت به بار پیش بیاید چقدر است؟

ب) هر بار یک واحد به شماره تاس اضافه شود چقدر است؟

۵۶. به چند طریق ۵ نفر می‌توانند برای سوار شدن به اتوبوس صف ببندند؟ اگر ۲ نفر از ۵ نفر از کنار هم ایستادن ابا کنند، به چند طریق صف‌بندی میسر است؟

۵۷. فرض کنید علاقه‌مند به تکمیل پروژه‌ای هستیم که ممکن است به علت اعتصاب به تأخیر افتد. افزون بر این فرض کنید احتمال اینکه اعتصابی رخ دهد ۰/۶۰، احتمال اینکه اگر اعتصابی نباشد کار به موقع انجام شود ۰/۸۵ و احتمال اینکه اگر اعتصابی باشد کار به موقع انجام شود ۰/۳۵ باشد. احتمال اینکه کار به موقع

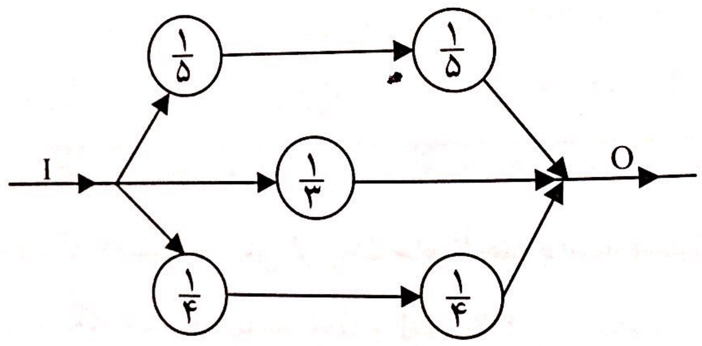
انجام شود چقدر است؟

۵۸. در طول یک ماه ۸۰ درصد سهام صنعتی خاص، که در آن ۱۰ شرکت سهام خود را عرضه کرده‌اند، افزایش یافته است. اگر سهامداری سهام دو شرکت را خریده باشد، احتمال اینکه هر دو افزایش یافته باشد، چقدر است؟

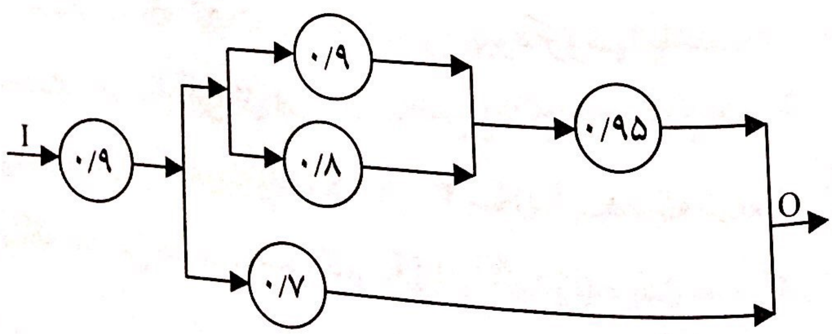
۵۹. احتمال اینکه شیوه جدید بازاریابی موفقیت‌آمیز باشد ۶۰ درصد و احتمال اینکه هزینه‌های این شیوه از میزان بودجه‌بندی شده، تجاوز نکند ۵۰ درصد است. احتمال تحقق هر دو هدف ۳۰ درصد است. احتمال اینکه دست‌کم به یکی از این اهداف برسیم، چقدر است؟

۶۰. اگر $P(A^c) = \%۷۰$، $P(B) = \%۵۰$ و $P(A/B) = \%۶۰$ باشد، $P(A \cup B)$ چقدر است؟

۶۱. این مدار الکتریکی را در نظر بگیرید. در آن اعداد، احتمالهای از کار افتادن اتصالهای مختلفی را که از هم مستقل‌اند، نشان می‌دهد. احتمال اینکه جریان برق برقرار باشد، چقدر است؟



۶۲. در مدار ذیل، اگر اعداد نشان‌دهنده احتمال کار کردن هر جزء باشد و کارکرد هر جزء مستقل از دیگری باشد، احتمال برقراری جریان در مدار چقدر است؟



۶۳. شخصی در آزمونی شرکت می‌کند و یکی از نمرات الف، ب، ج، د و هـ را دریافت می‌کند. چنانچه نمره الف بگیرد، برنده اعلام می‌شود و دیگر در آزمون شرکت نمی‌کند. چنانچه نمره او هـ باشد حق شرکت مجدد در آزمون را ندارد؛ در غیر این دو حال آنقدر در آزمون شرکت می‌کند که یکی از دو نمره فوق را دریافت کند. فرض کنید که نتیجه آزمونها مستقل از یکدیگر و احتمال گرفتن نمره‌های الف، ب، ج، د و هـ به ترتیب P_1، P_2، P_3، P_4 و P_5 باشد. احتمال توقف شرکت در آزمون به علت گرفتن نمره الف چقدر است؟

۶۴. دفتر انتشارات دانشگاهی دارای ۳ دستگاه چاپ است. دفتر انتشارات بابت تأخیر در انجام دادن کارها باید جریمه‌ای را پرداخت کند. داده‌های این جدول نشان‌دهنده سوابق کاری این دستگاههاست.

دستگاه چاپ شمارهٔ i	نسبت قراردادهای مربوط به دستگاه شمارهٔ i	نسبت زمانهای تأخیر در تحویل بیش از یک‌ماه
۱	۰/۲۰	۰/۲
۲	۰/۳۰	۰/۵
۳	۰/۵۰	۰/۳

تکثیر جزوه یک دانشکده بیش از یک ماه تأخیر داشته است. احتمال اینکه تأخیر ناشی از دستگاه شماره ۲ باشد چقدر است؟

۶۵. در کمیته کارشناسی تشکیلات و روشها، ۱۲ کارشناس بهبود روشها و ۴ کارشناس تشکیلات حضور دارند. اگر ۳ کارشناس به طور تصادفی انتخاب شوند، هر یک از احتمالات زیر را محاسبه کنید:

الف) احتمال اینکه کلیه آنها کارشناس بهبود روشها باشند.

ب) احتمال اینکه یکی از آنها کارشناس تشکیلات باشد.

۶۶. احتمال زنده بودن یک زن و شوهر در ۲۰ سال آینده به ترتیب $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۱}{۲}$ است. احتمال اینکه در این مدت دست‌کم یکی از آنها زنده بماند، چقدر است؟

۶۷. فرض کنید ۶ کارت وجود دارد که شماره‌های ۱ تا ۶ روی آنها نوشته شده است. با قرار دادن این کارتها به ترتیبهای مختلف، شماره‌های ۶ رقمی ساخته می‌شود. شماره‌ای به کمک آنها ساخته شده است، هر یک از این احتمالات را محاسبه کنید:

الف) احتمال اینکه زوج باشد.

ب) احتمال اینکه بزرگ‌تر از ۳۰۰ هزار باشد.

ج) احتمال اینکه بزرگ‌تر از ۳۰۰ هزار یا کوچک‌تر از ۲۰۰ هزار باشد.

د) احتمال اینکه بر ۳ قابل قسمت باشد.

۶۸. یک فروشنده الماس در ظرفی ۲ الماس و یک شیشه، و در ظرف دیگر یک الماس و ۲ شیشه گذاشته است و برای اینکه به فرزند خود پاداش دهد به او می‌گوید یکی از دو ظرف را برگزیند. روشن است اگر فرزند برحسب تصادف ظرفی را برگزیند، احتمال به دست آوردن ۲ الماس $\frac{۱}{۲}$ است. اما پدر به فرزند خود می‌گوید قبل از برگزیدن ظرف می‌تواند از یکی از ۲ ظرف، قطعه‌ای را بردارد و ببیند آیا آن قطعه الماس است یا نه و سپس ظرف را برگزیند. فرزند چنین فکر می‌کند که یک قطعه را از ظرفی برمی‌دارم، اگر الماس بود همان ظرف و اگر شیشه بود ظرف دیگر را برمی‌دارم. احتمال اینکه فرزند هر ۲ الماس را به دست آورده باشد چقدر است؟

۶۹. شخصی پشت سر هم در ۴ امتحان شرکت می‌کند. احتمال قبول شدن او در امتحان اول P است و احتمال قبول شدن او در هر یک از امتحانات بعدی، بسته به اینکه وی در امتحان قبلی قبول یا رد شود، به ترتیب P یا $\frac{P}{۲}$ است. در صورتی که وی حداقل در ۳ امتحان قبول شود، واجد شرایط شناخته می‌شود. شانس وی برای اینکه واجد شرایط شناخته شود، چقدر است؟

۷۰. انفجار در یک کارگاه ساختمانی ممکن است در نتیجه الکتریسیته ساکن، نقص در تجهیزات، بی‌احتیاطی یا خراب‌کاری رخ دهد. مهندسان ساختمان که مخاطرات موجود در هر مورد را تحلیل کرده‌اند، پی برده‌اند که چنین انفجاری

ممکن است با احتمال ۲۵ درصد در نتیجه الکتریسیته ساکن، ۲۰ درصد در نتیجه نقص در تجهیزات، ۴۰ درصد در نتیجه بی‌احتیاطی و ۱۵ درصد در نتیجه خراب‌کاری رخ دهد. احتمالهای پیشین این چهار علت به ترتیب ۲۰٪، ۴۰٪، ۲۵٪ و ۱۵٪ بوده‌اند. اگر انفجاری صورت گرفته باشد، هر یک از این احتمالات را محاسبه کنید:

الف) محتمل‌ترین علت انفجار.

ب) احتمال اینکه علت، بی‌احتیاطی باشد.

پاسخ‌نامه سؤالات

۱) غ	۲) ص	۳) ص	۴) غ	۵) غ	۶) ص	۷) غ	۸) ص
۹) ص	۱۰) غ	۱۱) ص	۱۲) ص	۱۳) غ	۱۴) غ	۱۵) غ	۱۶) ص
۱۷) غ	۱۸) غ	۱۹) ص	۲۰) ص	۲۱) غ	۲۲) غ	۲۳) غ	۲۴) غ
۲۵) ص	۲۶) ب	۲۷) ب	۲۸) ب	۲۹) د	۳۰) د	۳۱) ب	۳۲) ب
۳۳) د	۳۴) الف	۳۵) ج	۳۶) ب	۳۷) ب	۳۸) ج	۳۹) الف	۴۰) ج
۴۱) ب	۴۲) د	۴۳) د	۴۴) ب	۴۵) ب	۴۶) ج	۴۷) الف	۴۸) د
۴۹) الف	۵۰) الف						

مثال عملی: کارایی یک سیستم و با طول عمر ...

متغیر تصادفی آمیخته:

$$Y = \begin{cases} X & 0 \le X \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & X > \frac{1}{2} \end{cases} \quad , \quad f_X(x) = 2x \quad 0 \le x \le 1$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ y^2 & 0 \le y < \frac{1}{2} \\ 1 & y \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

فصل ششم

توابع احتمال گسسته

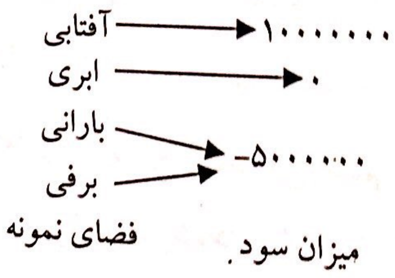
۱ـ۶ متغیر تصادفی گسسته، تابع احتمال و تابع توزیع

۱ـ۱ـ۶ متغیر تصادفی گسسته

برای توصیف متغیر تصادفی ابتدا چند مثال می‌آوریم و سپس آن را تعریف می‌کنیم:

مثال ۱ـ۶ فرض می‌کنیم قرار است یک گروه بازیگر برای اجرای برنامه خاصی به شهری برود. اگر هوای شهر آفتابی باشد، ۱۰ میلیون ریال سود می‌کند؛ اگر ابری باشد، سودش صفر است و اگر بارانی یا برفی باشد، ۵ میلیون ریال زیان می‌کند. ابتدا فضای نمونه را نشان می‌دهیم و سپس ارتباط آن را با سود این گروه مشخص خواهیم کرد.

فضای نمونه: $S = \{$برفی، بارانی، ابری، آفتابی$\}$



مثال ۲ـ۶ فرض کنید سکه سالمی را دو بار پرتاب می‌کنیم. ابتدا فضای نمونه را می‌نویسیم و سپس ارتباط آن را با تعداد شیرهای ظاهر شده مشخص می‌کنیم.

فضای نمونه: $S = \{TT, TH, HT, HH\}$