فصل ششم

توابع احتمال گسسته

۱ـ۶ متغیر تصادفی گسسته، تابع احتمال و تابع توزیع

۱ـ۱ـ۶ متغیر تصادفی گسسته

برای توصیف متغیر تصادفی ابتدا چند مثال می‌آوریم و سپس آن را تعریف می‌کنیم:

مثال ۱ـ۶ فرض می‌کنیم قرار است یک گروه بازیگر برای اجرای برنامه خاصی به شهری برود. اگر هوای شهر آفتابی باشد، ۱۰ میلیون ریال سود می‌کند؛ اگر ابری باشد، سودش صفر است و اگر بارانی یا برفی باشد، ۵ میلیون ریال زیان می‌کند. ابتدا فضای نمونه را نشان می‌دهیم و سپس ارتباط آن را با سود این گروه مشخص خواهیم کرد.

فضای نمونه: {برفی، بارانی، ابری، آفتابی} = S

آفتابی ← ۱۰۰۰۰۰۰۰

ابری ← ۰

بارانی ← ۵۰۰۰۰۰۰-

برفی ← ۵۰۰۰۰۰۰-

فضای نمونه　　　میزان سود

مثال ۲ـ۶ فرض کنید سکه سالمی را دو بار پرتاب می‌کنیم. ابتدا فضای نمونه را می‌نویسیم و سپس ارتباط آن را با تعداد شیرهای ظاهر شده مشخص می‌کنیم.

فضای نمونه: $S = \{TT, TH, HT, HH\}$

TT → ۰
TH → ۱
HT → ۱
HH → ۲

فضای نمونه — تعداد شیرها

مثال ۳ـ۶ فروش روزانه دو بنگاه اتومبیل را در نظر می گیریم. تعداد اتومبیلهای فروخته شده در بنگاه اول را به x (حداکثر دو اتومبیل) و تعداد اتومبیلهای فروخته شده در بنگاه دوم را به y (حداکثر یک اتومبیل) نشان می‌دهیم. ابتدا فضای نمونه را می‌نویسیم و سپس ارتباط آن را با تعداد اتومبیلهای فروخته شده نشان می‌دهیم.

هر عضوی از فضای نمونه را با (x,y) نشان داده‌ایم؛ بنابراین خواهیم داشت:

فضای نمونه: $S = \{(۰,۰)(۰,۱)(۱,۰)(۱,۱)(۲,۰)(۲,۱)\}$

(۰,۰) → ۰
(۰,۱) → ۱
(۱,۰) → ۱
(۱,۱) → ۲
(۲,۰) → ۲
(۲,۱) → ۳

فضای نمونه — تعداد اتومبیلهای فروخته شده در دو بنگاه

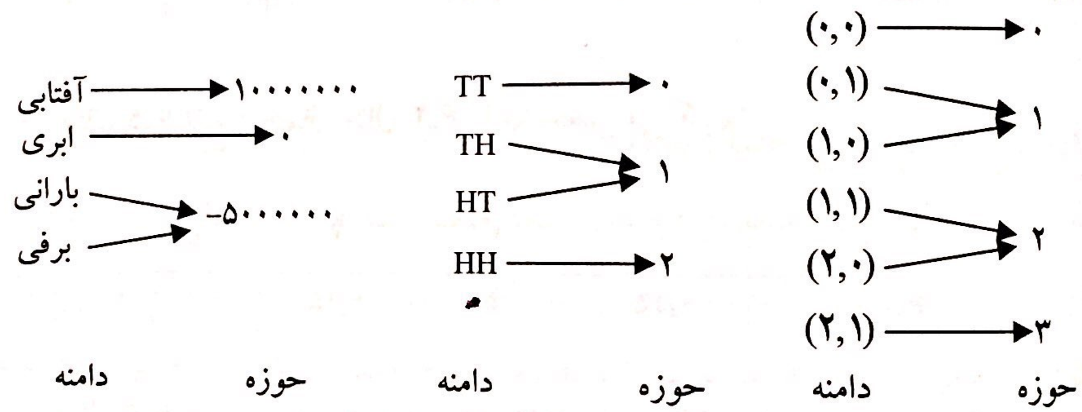
با توجه به مثالهای ذکر شده به این نتیجه می‌رسیم که ارتباط بین فضای نمونه و اعداد به وسیله متغیر تصادفی برقرار می‌شود.

متغیر تصادفی مقدار خود را به طور تصادفی می گیرد و این مقدار تحت کنترل مشاهده کننده نیست؛ برای مثال، میزان سود گروه بازیگر به وضع آب و هوا بستگی دارد و یا تعداد شیرهای ظاهر شده در پرتاب دو تاس امری تصادفی است و همین طور تعداد اتومبیلهای فروخته شده به میزان تقاضا بستگی دارد.

مثالهای بسیار دیگری می‌توان برای متغیر تصادفی ذکر کرد؛ مثلاً تعداد

ضایعات روزانه یک کارگاه تولید کفش، تعداد مشتریانی که بین ساعت ۸ تا ۱۰ شب به رستورانی مراجعه می‌کنند، تعداد شماره‌های اشتباهی که یک تلفنچی در یک نوبت کاری می‌گیرد، تعداد نسخه‌هایی که از یک کتاب به فروش می‌رسد. بنابراین متغیر تصادفی در واقع، برخلاف اسمش، متغیر نیست بلکه تابعی است که روی فضای نمونه تعریف می‌شود و هر یک از مقادیر آن، متناظر با یک یا چند عضو از اعضای فضای نمونه است. می‌دانیم که هر تابع دارای دامنه و حوزه است. بنابراین می‌توان متغیر تصادفی را این‌گونه تعریف کرد: «متغیر تصادفی، تابعی است که دامنه آن فضای نمونه و حوزه آن مجموعه‌ای از اعداد حقیقی است».

دامنه و حوزه مثالهای ۱ـ۶، ۲ـ۶ و ۳ـ۶ به این صورت است:



متغیر تصادفی را معمولاً برحسب تعداد مقادیری که می‌تواند اختیار کند به دو دسته «متغیر تصادفی گسسته» و «متغیر تصادفی پیوسته» تقسیم می‌کنند. متغیر تصادفی گسسته متغیری است که تعداد مقادیری که می‌تواند اختیار کند، متناهی یا شمارش‌پذیر است؛ ولی تعداد مقادیر ممکنِ متغیر تصادفی پیوسته، نامتناهی است. در این فصل تنها متغیرهای تصادفی گسسته مطرح می‌شوند و در فصل بعد متغیرهای تصادفی پیوسته مطرح خواهند شد.

متغیرهای تصادفی با حروف بزرگ مانند X و هر یک از مقادیری که این متغیرها می‌توانند بگیرند با حروف کوچک مانند x، نشان داده می‌شوند.

۲ـ۱ـ۶ تابع اِحتمال به تابعی که بتوان با استفاده از آن احتمال هر یک از مقادیر ممکنِ متغیر تصادفی را مشخص کرد «تابع احتمال» یا «توزیع احتمال» گفته می‌شود. تابع احتمال را می‌توان چنین تعریف کرد: «تابع احتمال تابعی است که دامنه آن مقادیر ممکن متغیر تصادفی و حوزه آن احتمالات مربوط به هر مقدار متغیر تصادفی است». توجه داشته باشید که تابع احتمال غیرمنفی است و مجموع احتمالات باید برابر یک باشد.

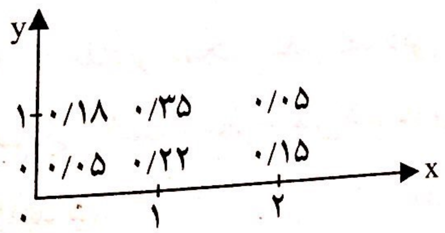
مثال ۴ـ۶ با توجه به داده‌های مثال ۱ـ۶ می‌خواهیم بدانیم اگر احتمال آفتابی، ابری، بارانی و برفی بودن به ترتیب ۰/۴۰، ۰/۳۰، ۰/۲۰ و ۰/۱۰ باشد، تابع احتمال میزان سود این گروه چقدر خواهد بود.

x(میزان سود به ریال)	۱۰۰۰۰۰۰۰۰	۰	-۵۰۰۰۰۰۰۰	جمع
P(X = x) (احتمال)	۰/۴۰	۰/۳۰	۰/۳۰	۱

مثال ۵ـ۶ تابع احتمال مثال ۲ـ۶ را مشخص می‌کنیم:

x	۰	۱	۲	جمع
P(X = x)	۰/۲۵	۰/۵۰	۰/۲۵	۱

مثال ۶ـ۶ با توجه به داده‌های مثال ۳ـ۶ و احتمالات فضای نمونه که در این نمودار آمده است، می‌خواهیم تابع احتمال مربوط به تعداد اتومبیلهای فروخته شده در یک روز در دو بنگاه را مشخص کنیم.



اگر z را تعداد اتومبیلهای فروخته شده در دو بنگاه فرض کنیم، z متغیری تصادفی با این تابع احتمال خواهد بود:

z	۰	۱	۲	۳	جمع
$P(Z=z)$	۰/۰۵	۰/۴۰	۰/۵۰	۰/۰۵	۱

مثال ۷ـ۶ می‌خواهیم بدانیم آیا این تابع می‌تواند تابع احتمال باشد. چرا.

$$P(X=x)=\frac{\binom{4}{x}}{16} \quad , \quad x=0,1,2,3,4$$

بله. چون اولاً به ازای مقادیر ممکن x، $P(X=x)$ غیر منفی است و ثانیاً جمع احتمالات برابر یک است.

$$\sum_{x=0}^{4} P(X=x)=\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{6}{16}+\frac{4}{16}+\frac{1}{16}=1$$

۳ـ۱ـ۶ تابع توزیع (تابع احتمال تجمعی)

در مسائلی ممکن است دانستن احتمال اینکه متغیر تصادفی X مقداری کوچک‌تر یا مساوی x را انتخاب می‌کند، مورد توجه باشد، در این صورت تابع توزیع (تابع احتمال تجمعی) را به کار می‌بریم. تعریف این تابع چنین است: «تابع توزیع، تابعی است که به ازای جمیع مقادیر ممکن متغیر تصادفی X، احتمال وقوع مقداری کوچک‌تر یا مساوی با x را نشان می‌دهد». تابع توزیع را با $P(X \le x)$ یا $F(x)$ نشان می‌دهند. بدیهی است که تابع توزیع برای بیشترین مقداری که متغیر تصادفی می‌تواند اختیار کند برابر یک است.

$$\boxed{F(x)=P(X \le x)} \quad \text{تابع توزیع (تجمعی)} \qquad (6\text{-}1)$$

مثال ۸ـ۶ این جدول تابع احتمال را در نظر بگیرید. می‌خواهیم تابع توزیع مربوط به آن را پیدا کنیم و مقدار $F(1)$ و $F(3)$ را به دست آوریم.

x	−۲	۰	۳	۵	۱۰
$P(X = x)$	۰/۱۰	۰/۱۵	۰/۲۵	۰/۳۰	۰/۲۰

x	−۲	۰	۳	۵	۱۰
$F(x) = P(X \le x)$	۰/۱۰	۰/۲۵	۰/۵۰	۰/۸۰	۱

بنابراین $F(۱) = P(X \le ۱) = ۰/۲۵$ و $F(۳) = P(X \le ۳) = ۰/۵۰$ است.

مثال ۹ـ۶ تعداد تلویزیونهای فروخته شده فروشگاهی در ۱۲۰ روز به این شرح است:

تعداد روزها	تعداد تلویزیونهای فروخته شده
۱۸	۲
۲۷	۳
۳۰	۴
۱۵	۵
۱۸	۶
۱۲	۷
۱۲۰	جمع

الف) تابع احتمال را تعیین کنید.

ب) تابع توزیع را تعیین کنید.

ج) احتمال اینکه در یک روز کمتر و یا مساوی پنج تلویزیون فروخته شود، چقدر است؟

الف)

x(تعداد فروش)	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$P(X = x)$	۰/۱۵۰	۰/۲۲۵	۰/۲۵۰	۰/۱۲۵	۰/۱۵۰	۰/۱۰۰

ب)

x	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$F(x)=P(X\le x)$	۰/۱۵۰	۰/۳۷۵	۰/۶۲۵	۰/۷۵۰	۰/۹۰۰	۱

ج) $F(۵)=P(X\le ۵)=$ ۰/۷۵۰

تمرین

۱. فرض کنید متغیر تصادفی X بتواند مقادیر ۲، ۳، ۴ و ۵ را بگیرد. آیا این احتمالات می‌توانند تابع احتمال این متغیر تصادفی باشند؟ چرا؟

x	۲	۳	۴	۵
$P(X=x)$	۰/۲۵	۰	۰/۱۰−	۰/۸۵

۲. آیا این تابع می‌تواند به عنوان تابع احتمال یک متغیر تصادفی به کار رود؟ چرا؟

$$\boxed{f(x)=\frac{x+۱}{۲۰} \text{ و } x=۱,۲,۳,۴,۵}$$

۳. در این تابع K را چنان تعیین کنید که بتوان آن را به عنوان تابع احتمال به کار برد.

$$f(x)=Kx^{۲} \text{ و } x=۰,۱,۲,۳,۴,۵$$

۴. از جعبه‌ای که محتوی ۱۲ کالاست و ۴ عدد آنها معیوب است ۳ تا را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم. اگر X تعداد کالای معیوب خارج شده باشد، تابع احتمال X را پیدا کنید.

۵. شرکت بیمه این اطلاعات را که مربوط به تعداد تصادفات ۶۰ روز یکی از مناطق شهری است، گردآوری کرده است:

تعداد تصادفات	تعداد روزها
۰	۱۵
۱	۲۵
۲	۱۰
۳	۶
۴	۴
جمع	۶۰

الف) تابع احتمال و تابع توزیع تعداد تصادفات را پیدا کنید.

ب) اگر روزی از این ۶۰ روز را برحسب تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه در این روز کمتر از ۴ تصادف رخ داده باشد، چقدر است؟

۲ـ۶ امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی

۱ـ۲ـ۶ امید ریاضی

امید ریاضی مفهومی اساسی در مطالعه توابع احتمال است. امید ریاضی همان میانگین موزون است که احتمالات در آن، نقش وزنها (ضرایب) را بازی می‌کنند. امید ریاضیِ متغیر تصادفی X را با $E(X)$ نشان می‌دهیم. در میانگین موزون، داده‌ها را در ضرایب مربوط به آنها ضرب و سپس حاصل را بر مجموع ضرایب تقسیم می‌کنیم، ولی در امید ریاضی، چون مجموع احتمالات برابر یک است، پس از ضرب احتمالات (ضرایب) در متغیر تصادفی، دیگر نیازی به تقسیم آنها بر جمع احتمالات نیست. امید ریاضی متغیر تصادفی گسسته X به این صورت محاسبه می‌شود ($f(x)$ همان $P(X = x)$ است):

(۶ـ۲)

$$\boxed{E(X) = \sum_x x.f(x)} \quad \text{امید ریاضی}$$

مثال ۱۰ـ۶ شرکتی تولیدکننده آبگرمکن گازی است. تقاضاهای ماهانه همراه با احتمالات مربوط در این جدول آورده شده است. می‌خواهیم امید ریاضی تعداد

تقاضا را پیدا کرده، آن را تعبیر کنیم.

x(تقاضا)	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰
f(x) (احتمال)	۰/۱۵	۰/۲۵	۰/۳۰	۰/۲۰	۰/۱۰

x	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	جمع
f(x)	۰/۱۵	۰/۲۵	۰/۳۰	۰/۲۰	۰/۱۰	۱
x.f(x)	۱۵	۵۰	۹۰	۸۰	۵۰	۲۸۵

بنابراین $E(X) = ۲۸۵$ است؛ یعنی این شرکت انتظار دارد تقاضا برای کالایش ۲۸۵ واحد در ماه باشد.

با توجه به تعریف امید ریاضی متغیر تصادفی، اگر a و b مقادیر ثابتی فرض شوند، دارای این خواص خواهند بود:

$$\boxed{E(b) = b} \qquad (۶ـ۳)$$

$$\boxed{E(aX) = aE(X)} \qquad (۶ـ۴)$$

$$\boxed{E(aX + b) = aE(X) + b} \qquad (۶ـ۵)$$

مثال ۱۱ـ۶ تابع احتمال ذیل مفروض است:

x	−۲	۱	۳	۵
f(x)	۰/۲	۰/۴	۰/۳	۰/۱

می‌خواهیم این مقادیر را محاسبه کنیم:

الف) $\boxed{E(X)}$، ب) $E(۲X)$، ج) $E(-۳X + ۲)$، د) $\boxed{E(X^۲)}$، هـ) $E[(X - ۵)^۲]$

x	−۲	۱	۳	۵	جمع
f(x)	۰/۲	۰/۴	۰/۳	۰/۱	۱
xf(x)	−۰/۴	۰/۴	۰/۹	۰/۵	۱/۴
$x^۲f(x)$	۰/۸	۰/۴	۲/۷	۲/۵	۶/۴

بنابراین خواهیم داشت:

$$E(X)=\sum_x x.f(x)=۱/۴$$

الف) $E(۲X)=۲E(X)=۲\times۱/۴=۲/۸$

ب) $E(-۳X+۲)=-۳E(X)+۲=-۳\times۱/۴+۲=-۲/۲$

ج) $E(X^۲)=\sum_x x^۲.f(x)=۶/۴$

د)

ه) $E[(X-۵)^۲]=E(X^۲-۱۰X+۲۵)=E(X^۲)-۱۰E(X)+۲۵$

$$=۶/۴-۱۰\times۱/۴+۲۵=۱۷/۴$$

۲-۲-۶ واریانس

واریانسِ متغیر تصادفی گسسته X که میزان پراکندگی را حول میانگین (امید ریاضی) نشان می‌دهد و آن را با V(X) نشان می‌دهیم، به این صورت محاسبه می‌شود:

(۶-۶) $\boxed{V(X)=\sum_x (x-\mu)^۲ f(x)}$ واریانس متغیر تصادفی

در این رابطه، $\mu=E(X)$ است. می‌توان واریانس را به این صورت نیز محاسبه کرد:

(۶-۷) $\boxed{V(X)=E(X^۲)-\mu^۲}$ واریانس متغیر تصادفی

در هر صورت، انحراف معیار به این صورت محاسبه می‌شود:

$$SD(X)=\sqrt{V(X)}$$

اگر a و b مقادیر ثابتی فرض شوند، این خواص برای واریانس متغیر تصادفی قابل اثبات است:

(۶-۸)

$$V(b)=۰$$

$$\boxed{V(aX)=a^{۲}V(x)} \qquad (۶\text{-}۹)$$

$$V(aX+b)=a^{۲}V(x) \qquad (۶\text{-}۱۰)$$

مثال ۱۲ـ۶ اگر $E(X)=۲/۵$ و $E(X^{۲})=۸$ باشد، می‌خواهیم این مقادیر را محاسبه کنیم:

الف) $V(۳)$؛ ب) $V(X)$؛ ج) $V(-۲X+۳)$.

الف) $V(۳)=۰$

ب) $V(X)=E(X^{۲})-\mu^{۲}=۸-(۲/۵)^{۲}=۱/۷۵$

ج) $V(-۲X+۳)=(-۲)^{۲}V(X)=۴\times ۱/۷۵=۷$

تمرین

۱. این توزیع احتمال مفروض است:

x	۲	۴	۶	۸	۱۰
f(x)	۰/۱۰	۰/۲۵	۰/۳۰	۰/۲۵	۰/۱۰

این مقادیر را محاسبه کنید:

الف) $E(X)$

ب) $E(-۳X+۷)$

ج) $E[(-۳X+۷)^{۲}]$

د) $V(X)$

هـ) $V(-۴X-۳)$

۲. این جدول احتمال تعداد غیبتهای روزانه کارگاهی را نشان می‌دهد که دارای ۵۰ کارگر است:

تعداد غیبتها	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
احتمال	۰/۱۵	۰/۲۰	۰/۳۰	۰/۱۸	۰/۱۰	۰/۰۵	۰/۰۲

ماهانه یک شرکت را نشان می‌دهد. میانگین و واریانس تعداد غیبتهای روزانه را پیدا کنید.

الف) میانگین و واریانس تعداد غیبتهای روزانه را پیدا کنید.

ب) احتمال اینکه در روزی بیشتر از ۲ نفر غیبت کنند چقدر است؟

۳. تولیدکننده تقویمی مایل است برای تعداد تیراژ خود در سال آینده تصمیم بگیرد. تولید هر تقویم ۹۰۰ ریال هزینه دربردارد و به بهای ۱۲۵۰ ریال فروخته می‌شود. هر تقویمی که در طول سال به فروش نرسد از آن به عنوان کاغذ باطله استفاده می‌شود که ارزش چندانی ندارد. این تولیدکننده، با استفاده از داده‌های سالهای قبل، تابع احتمال ذیل را برای فروش خود تهیه کرده است:

تعداد فروش	۲۵۰۰۰	۴۰۰۰۰	۵۵۰۰۰	۷۰۰۰۰
احتمال	۰/۱۰	۰/۳۰	۰/۴۵	۰/۱۵

این تولیدکننده تصمیم دارد یکی از سطوح ۲۵، ۴۰، ۵۵ یا ۷۰ هزار واحدی را تولید کند. چه سطحی از تولید کل سود مورد انتظار را به حداکثر می‌رساند؟

۴. شرکت بیمه‌ای ۲ هزار کارخانه را در قبال آتش‌سوزی بیمه می‌کند. چنانچه این شرکت بابت هر کارخانه‌ای که دچار آتش‌سوزی شود مبلغ ۵۰ میلیون ریال بپردازد، به نقطه سر به سر می‌رسد. اگر احتمال آتش‌سوزی کارخانه‌ای در مدت بیمه‌نامه، برابر ۰/۰۶ باشد، با این فرض که هر کارخانه فقط یک بار ممکن است دچار آتش‌سوزی شود، این موارد را محاسبه کنید:

الف) مبلغ بیمه باید چقدر باشد؟

ب) اگر احتمال آتش‌سوزی در این مسئله برابر ۰/۰۴ باشد، امید ریاضی سود شرکت با همان مبلغ تعیین شده در بند الف چقدر خواهد بود؟

۵. تولیدکننده‌ای کالای تولیدی خود را در بسته‌های ۱۰ تایی به بازار عرضه می‌کند. تابع احتمال تعداد کالاهای معیوب یک بسته به این صورت است (در یک بسته حداکثر ۳ کالای معیوب وجود دارد):

تعداد کالاهای معیوب	۰	۱	۲	۳
احتمال	۰/۷۵	۰/۱۵	۰/۰۷	۰/۰۳

این تولیدکننده ۲ قیمت مختلف ۲۵ هزار ریالی و ۲۶ هزار ریالی را برای هر بسته پیشنهاد می‌کند؛ به این ترتیب که اگر مشتری از نرخ ۲۵ هزار ریالی استفاده کند چیزی در قبال ارائه کالای معیوب دریافت نمی‌کند، ولی اگر از نرخ ۲۶ هزار ریالی استفاده کند، در ازای ارائه هر کالای معیوب، ۲ هزار ریال دریافت می‌کند. شما به عنوان خریدار کدام پیشنهاد را قبول می‌کنید.

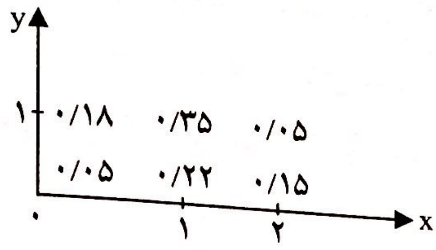
۶ـ۳ تابع احتمال توأم

در موارد زیادی لازم است علاوه بر رفتار هر متغیر رفتار آنها در ارتباط با یکدیگر نیز مشخص شود، در این صورت رفتار دو یا چند متغیر تصادفی هم‌زمان بررسی می‌شود و آن را تابع احتمال توأم می‌گویند. دو متغیر تصادفی X و Y را در نظر بگیرید؛ به طوری که X بتواند مقادیر x_i به ازای i مساوی ۱، ۲، ...، N، و Y مقادیر y_j به ازای j مساوی ۱، ۲، ...، K را اختیار کند؛ در این صورت برای زوجهای (x_i, y_j) تابع احتمال توأم X و Y وجود دارد که با $f(x_i, y_j)$ نشان داده می‌شود؛ بنابراین، می‌توان گفت تابع احتمال توأم عبارت است از فهرستی از زوجهای (x_i, y_j) و احتمالهای متناظر با آنها، یعنی $f(x_i, y_j)$. تابع احتمال دو متغیر تصادفی X و Y را در جدولی مشابه این جدول نشان می‌دهیم:

x \ y	y_1	y_2	...	y_K
x_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_1, y_2)$	...	$f(x_1, y_K)$
x_2	$f(x_2, y_1)$	$f(x_2, y_2)$	...	$f(x_2, y_K)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
x_N	$f(x_N, y_1)$	$f(x_N, y_2)$	...	$f(x_N, y_K)$

مثال ۱۳ـ۶ دو بنگاه اتومبیل را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم متغیر تصادفی X نشان‌دهنده تعداد اتومبیلهای فروخته شده در بنگاه اول و Y نشان‌دهنده تعداد

اتومبیلهای فروخته شده در بنگاه دوم است. این نمودار که با توجه به اطلاعات گذشته تهیه شده است، احتمالات توأم را نشان می‌دهد:



می‌خواهیم ابتدا جدول تابع احتمال توأم فروشهای روزانه دو بنگاه اتومبیل را تنظیم و سپس هر یک از این موارد را محاسبه کنیم:

الف) $P(X=۱)$

ب) $P(X>Y)$

ج) $P(Y \geq ۰ \text{ و } X=۱)$

د) توزیع احتمال $Z=X+Y$

x \ y	۰	۱
۰	۰/۰۵	۰/۱۸
۱	۰/۲۲	۰/۳۵
۲	۰/۱۵	۰/۰۵

الف)
$$P(X=۱)=P(X=۱,Y=۰)+(X=۱,Y=۱)=۰/۲۲+۰/۳۵=۰/۵۷$$

ب)
$$P(X>Y)=P(X=۱,Y=۰)+P(X=۲,Y=۰)+P(X=۲,Y=۱)$$
$$=۰/۲۲+۰/۱۵+۰/۰۵=۰/۴۲$$

ج)
$$P(Y\geq ۰ \text{ و } X=۱)=P(Y=۰,X=۱)+P(Y=۱,X=۱)$$
$$=۰/۲۲+۰/۳۵=۰/۵۷$$

د)

z	۰	۱	۲	۳
f(z)	۰/۰۵	۰/۴۰	۰/۵۰	۰/۰۵

با در دست داشتن تابع احتمال توأم، می‌توان تابع احتمال جداگانه هر یک از متغیرهای تصادفی را پیدا کرد؛ مثلاً در مثال ۱۳ـ۶ برای پیدا کردن تابع احتمال متغیر تصادفی X، می‌توان احتمالات هر سطر را جمع کرد. و آن را در حاشیه سمت راست جدول نوشت و یا برای پیدا کردن تابع احتمال متغیر تصادفی Y، می‌توان احتمالات هر ستون را جمع کرد و آن را در حاشیه پایین جدول نوشت. به این احتمالات، «احتمالات حاشیه‌ای»، به احتمالات حاشیه راست جدول، احتمالات حاشیه‌ای X و به احتمالات حاشیه پایین جدول، احتمالات حاشیه‌ای Y می‌گوییم. حتی می‌توان از ذکر کلمه حاشیه‌ای نیز پرهیز کرد و آنها را تابع احتمال متغیر تصادفی X و تابع احتمال متغیر تصادفی Y نامید.

مثال ۱۴ـ۶ می‌خواهیم احتمالات حاشیه‌ای مثال ۱۳ـ۶ را پیدا کنیم و تابع احتمال X و تابع احتمال Y را در دو جدول مجزا بنویسیم.

x \ y	۰	۱	احتمالات حاشیه‌ای x
۰	۰/۰۵	۰/۱۸	۰/۲۳
۱	۰/۲۲	۰/۳۵	۰/۵۷
۲	۰/۱۵	۰/۰۵	۰/۲۰
احتمالات حاشیه‌ای y	۰/۴۲	۰/۵۸	۱

بنابراین خواهیم داشت:

x	۰	۱	۲
f(x)	۰/۲۳	۰/۵۷	۰/۲۰

و

y	۰	۱
f(y)	۰/۴۲	۰/۵۸

مثال ۱۵ـ۶ در جعبه‌ای ۸ بلبرینگ وجود دارد که ۲ تای آنها معیوب است. به طور

تصادفی ۳ تا از این بلبرینگها را بیرون آورده‌ایم (X را تعداد بلبرینگهای سالم و Y را تعداد بلبرینگهای معیوب فرض می‌کنیم) می‌خواهیم تابع احتمال توأم آنها را پیدا کنیم. X می‌تواند مقادیر ۱، ۲، ۳ و Y مقادیر ۰، ۱، ۲ را بگیرد. چون X و Y هر یک می‌توانند ۳ مقدار انتخاب کنند؛ بنابراین ۹ زوج مختلف ($9 = 3 \times 3$) به وجود خواهد آمد که باید احتمال هر کدام را پیدا کنیم؛ برای نمونه $f(1,0) = P(X = 1, Y = 0) = 0$ است؛ چون ما ۳ کالا انتخاب کرده‌ایم در صورتی که $1 = 1 + 0$ است؛ بنابراین مواردی را محاسبه می‌کنیم که مجموع مقادیر متغیرها در آنها برابر ۳ شود؛ برای مثال:

$$f(2,1) = P(X = 2, Y = 1) = \binom{6}{2}\binom{2}{1}/\binom{8}{3} = \frac{30}{56}$$

x \ y	۰	۱	۲
۱	۰	۰	۶/۵۶
۲	۰	۳۰/۵۶	۰
۳	۲۰/۵۶	۰	۰

تمرین

۱. این توزیع احتمال توأم را در نظر بگیرید:

x \ y	۱-	۰	۳
۲	۰/۱۰	۰/۴۰	۰
۴	۰/۱۵	۰/۲۰	۰/۱۵

این موارد را محاسبه کنید:

الف) $P(X = 2)$

ب) $P(X = 6)$

ج) $P(X > Y) + P(Y > X)$

د) $P(Z = X + Y)$

۲. فرض کنید از ۱۰ شرکت بزرگ مربوط به صنعتی خاص، تنها ۳ شرکت دارای سود خالصی بیش از یک میلیارد و پانصد میلیون ریال بوده‌اند. از این ۱۰ شرکت ۲ شرکت برحسب تصادف انتخاب شده است. اگر متغیر تصادفی X نشان‌دهنده تعداد شرکتهایی که سودی بیش از یک میلیارد و ۵۰۰ میلیون ریال و Y نشان‌دهنده تعداد شرکتهایی باشد که سودی کمتر یا مساوی این مبلغ داشته‌اند، هر یک از این موارد را محاسبه کنید:

الف) تابع احتمال توأم X و Y

ب) احتمال اینکه دو شرکت انتخاب شده، سودی بیشتر از یک میلیارد و ۵۰۰ میلیون ریال داشته باشند.

ج) اگر بدانیم کمتر از ۲ شرکت با سود بیش از یک میلیارد و ۵۰۰ میلیون ریال انتخاب شده‌اند، احتمال اینکه درست یک شرکت با سود کمتر یا مساوی این مبلغ انتخاب شده باشد.

د) احتمال اینکه تعداد شرکتهای با سود بیش از یک میلیارد و ۵۰۰ میلیون ریال بیشتر از تعداد شرکتهای با سود کمتر یا مساوی این مبلغ باشد.

ه) تابع احتمال متغیر تصادفی X.

۶-۴ کوواریانس و استقلال دو متغیر تصادفی

۶-۴-۱ کوواریانس

کوواریانس را امید ریاضی تغییرات دو متغیر برحسب میانگینشان تعریف می‌کنیم. در اینجا، کوواریانس معیاری عددی است که نوع و شدت رابطه خطی بین دو متغیر تصادفی را نشان می‌دهد. رابطه دو متغیر می‌تواند به یکی از این سه حالت باشد: ۱) با افزایش یک متغیر، دیگری افزایش یابد و با کاهش آن دیگری کاهش یابد (رابطه مستقیم)، ۲) با افزایش یک متغیر، دیگری کاهش یابد و با کاهش آن افزایش یابد (رابطه معکوس)، ۳) افزایش و یا کاهش یک متغیر هیچ تأثیری در دیگری نداشته باشد (دو متغیر مستقل باشند). مقدار کوواریانس در حالت اول مثبت، در حالت دوم

منفی و در حالت سوم صفر است.

کوواریانس بین دو متغیر تصادفی X و Y را با $Cov(X,Y)$ نشان می‌دهیم و به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{Cov(X,Y) = E(X-\mu_x)(Y-\mu_y)} \quad \text{کوواریانس} \qquad (۶\_۱۱)$$

و یا

$$\boxed{Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)} \quad \text{کوواریانس} \qquad (۶\_۱۲)$$

که در این رابطه، $\mu_x = E(X)$، $\mu_y = E(Y)$ و اگر X و Y گسسته باشند، $E(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j f(x_i, y_j)$ است.

مثال ۱۶ـ۶ تابع احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y به این صورت است. کوواریانس را حساب کرده، درباره ارتباط این دو متغیر توضیح می‌دهیم:

x \ y	۰	۱	۲
−۵	۰/۳۰	۰/۰۲	۰/۰۸
۱۰	۰/۱۰	۰	۰/۵۰

برای محاسبه $Cov(X,Y)$ ابتدا باید $E(X)$، $E(Y)$ و $E(XY)$ را حساب کنیم.

y	۰	۱	۲	جمع
f(y)	۰/۴۰	۰/۰۲	۰/۵۸	۱
yf(y)	۰	۰/۰۲	۱/۱۶	۱/۱۸

x	−۵	۱۰	جمع
f(x)	۰/۴۰	۰/۶۰	۱
xf(x)	−۲	۶	۴

پس $E(X) = ۴$ و $E(Y) = ۱/۱۸$ است.

$$E(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j f(x_i, y_j) = (-۵)(۰)(۰/۳۰) + (-۵)(۱)(۰/۰۲)$$
$$+(-۵)(۲)(۰/۰۸) + (۱۰)(۰)(۰/۱۰) + (۱۰)(۱)(۰) + (۱۰)(۲)(۰/۵۰) = ۹/۱$$

بنابراین:

$$\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = ۹/۱ - ۴ \times ۱/۱۸ = ۴/۳۸$$

چون مقدار کوواریانس مثبت است، از این رو با افزایش X، Y نیز افزایش می‌یابد.

۲ـ۴ـ۶ استقلال دو متغیر تصادفی

در فصل پنجم گفتیم که دو پیشامد A و B در صورتی مستقل‌اند که رابطهٔ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ بین آنها برقرار باشد. به طریق همانند می‌توان گفت که دو متغیر تصادفی X و Y در صورتی مستقل‌اند که به ازای تمام زوجهای (x_i, y_j) این رابطه: $f(x_i, y_j) = f(x_i).f(y_j)$، بین آنها برقرار باشد.

مثال ۱۷ـ۶ این تابع احتمال توأم را ببینید. می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا دو متغیر تصادفی X و Y مستقل‌اند یا نه.

x \ y	۲	۴	۶
۰	۰/۲۰	۰/۰۸	۰/۱۲
۱	۰/۳۰	۰/۱۲	۰/۱۸

شرط استقلال $f(x_i, y_j) = f(x_i).f(y_j)$ را برای تمام i و زها بررسی می‌کنیم:

x \ y	۲	۴	۶	f(x)
۰	۰/۲۰ = ۰/۵ × ۰/۴	۰/۰۸ = ۰/۲ × ۰/۴	۰/۱۲ = ۰/۳ × ۰/۴	۰/۴
۱	۰/۳۰ = ۰/۵ × ۰/۶	۰/۱۲ = ۰/۲ × ۰/۶	۰/۱۸ = ۰/۳ × ۰/۶	۰/۶
f(y)	۰/۵	۰/۲	۰/۳	

چون تمام تساویهای مندرج در جدول برقرار است، پس دو متغیر تصادفی X و Y مستقل‌اند.

پیش از این گفتیم که $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. اگر دو متغیر تصادفی X و Y مستقل باشند، آنگاه $E(XY) = E(X)E(Y)$ است؛ زیرا:

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_i \sum_j x_i y_j f(x_i, y_j) \\ &= \sum_i \sum_j x_i y_j f(x_i) f(y_j) \\ &= \sum_i x_i f(x_i) \sum_j y_j f(y_j) \\ &= E(X)E(Y) \end{aligned}$$

و بنابراین کوواریانس صفر می‌شود:

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= E(X)E(Y) - E(X)E(Y) \\ &= ۰ \end{aligned}$$

در مورد دو متغیر مستقل، کوواریانس همواره صفر است، ولی عکس این مطلب همیشه درست نیست؛ یعنی دو متغیر تصادفی ممکن است مستقل نباشند، ولی کووواریانس آنها صفر باشد. به عبارت دیگر:

X و Y مستقل‌اند $\underset{\not\longrightarrow}{\longleftarrow}$ $Cov(X,Y) = ۰$

مثال ۱۸ـ۶ می‌خواهیم کوواریانس را برای تابع احتمال توأم مثال ۱۷ـ۶ حساب کنیم.

x	۰	۱	جمع
f(x)	۰/۴	۰/۶	۱
xf(x)	۰	۰/۶	۰/۶

y	۲	۴	۶	جمع
f(y)	۰/۵	۰/۲	۰/۳	۱
yf(y)	۱	۰/۸	۱/۸	۳/۶

پس $E(X) = ۰/۶$ و $E(Y) = ۳/۶$ است. حال $E(XY)$ را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} E(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j f(x_i, y_j) &= (۰)(۲)(۰/۲۰) + (۰)(۴)(۰/۰۸) + (۰)(۶)(۰/۱۲) \\ &+ (۱)(۲)(۰/۳۰) + (۱)(۴)(۰/۱۲) + (۱)(۶)(۰/۱۸) \end{aligned}$$

$$=۲/۱۶$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=۲/۱۶-(۰/۶)(۳/۶)=۲/۱۶-۲/۱۶=۰$$

پیش از این در مثال ۱۷ـ۶ مشخص کردیم که X و Y مستقل هستند، حتی بدون محاسبه کوواریانس می‌توانستیم ادعا کنیم که مقدار کوواریانس صفر است، چون اگر دو متغیر تصادفی، مستقل و دارای حوزه محدود باشند، همواره کوواریانس آنها صفر خواهد بود.

مثال ۱۹ـ۶ دو متغیر تصادفی X و Y را با توزیع توأم ذیل در نظر بگیرید. می‌خواهیم نشان دهیم با اینکه دو متغیر مستقل نیستند، کوواریانس آنها صفر است.

x \ y	۱-	۰	۱
۱-	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۶}$
۱	$\frac{۱}{۶}$	۰	$\frac{۱}{۶}$

چون $(\frac{۱}{۳})(\frac{۲}{۳})\neq\frac{۱}{۶}$ است پس X و Y مستقل نیستند، ولی طبق این محاسبات، کوواریانس آنها صفر است:

y	۱-	۰	۱	جمع
f(y)	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	۱
yf(y)	$-\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۳}$	۰

x	۱-	۱	جمع
f(x)	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	۱
xf(x)	$-\frac{۲}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$

بنابراین $E(X)=-\frac{۱}{۳}$ و $E(Y)=۰$ خواهد بود. حال $E(XY)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$E(XY)=(-۱)(-۱)(\tfrac{۱}{۶})+(-۱)(۰)(\tfrac{۱}{۳})+(-۱)(۱)(\tfrac{۱}{۶})+(۱)(-۱)(\tfrac{۱}{۶})$$
$$+(۱)(۰)(۰)+(۱)(۱)(\tfrac{۱}{۶})=۰$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=۰-(-\tfrac{۱}{۳})(۰)=۰$$

در اینجا چند قاعده مهم درباره امید ریاضی و واریانس مجموع دو متغیر تصادفی در حالت کلی و در حالتی که دو متغیر مستقل باشند، آورده می‌شود:

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y) \qquad (۶\text{ـ}۱۳)$$

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y) \qquad (۶\text{ـ}۱۴)$$

$$V(X-Y)=V(X)+V(Y)-2Cov(X,Y) \qquad (۶\text{ـ}۱۵)$$

اگر X و Y مستقل باشند، خواهیم داشت:

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$

$$V(X-Y)=V(X)+V(Y)$$

این قواعد را می‌توان به راحتی اثبات کرد.

تمرین

۱. توزیع توأم ذیل را در نظر بگیرید:

x \ y	۴−	۲	۷
۱	۰	۰/۱	۰/۴
۵	۰/۴	۰/۱	۰

الف) کوواریانس را حساب کنید.

ب) رابطه X و Y را تحلیل کنید.

۲. در تمرین ۱ آیا X و Y مستقل‌اند؟

۳. توزیع توأم ذیل را در نظر بگیرید:

x \ y	۳	۴	۵
۲−	۰/۲۰	۰/۰۸	۰/۱۲
۶	۰/۱۵	۰/۰۶	۰/۰۹
۸	۰/۱۵	۰/۰۶	۰/۰۹

الف) آیا دو متغیر X و Y مستقل‌اند؟

ب) کوواریانس X و Y را حساب کنید.

۴. توزیع توام X و Y ذیل را در نظر بگیرید:

x \ y	۲-	۱۰
۰	۰/۳۳	۰/۱۷
۴	۰/۲۷	۰/۲۳

کوواریانس X و Y را حساب کرده و راجع به استقلال دو متغیر توضیح دهید.

۵ـ۶ توزیع برنولی

آزمایشهایی را در نظر بگیرید که دارای دو پیامد ممکن باشند و احتمال «موفقیت» و «شکست» هر پیامدی (در اینجا احتمال موفقیت یعنی احتمال وقوع پیشامد مورد نظر و احتمال شکست یعنی احتمال عدم وقوع پیشامد مورد نظر) از آزمایشی به آزمایش دیگر «ثابت» باشد و ضمناً آزمایشها «مستقل» از یکدیگر انجام شوند. در این صورت به هر یک از آزمایشهای مزبور یک «آزمایش برنولی» و توزیع تعداد موفقیتها (۰ یا ۱) را توزیع برنولی گویند. احتمال موفقیت در یک آزمایش را با p و احتمال عدم موفقیت را با p − ۱ یا q نشان می‌دهیم. روشن است که چون این دو احتمال مکمل هم هستند، ۱ = p + q خواهد بود.

مثال ۲۰ـ۶ در جعبه‌ای ۲۰ کالا وجود دارد که ۵ تای آنها نامرغوب است. اگر بخواهیم با جایگذاری، چند کالا را انتخاب کنیم، می‌خواهیم بدانیم احتمال خارج کردن یک کالای مرغوب (احتمال موفقیت) در هر بار چقدر است.

چون آزمایشها مستقل از هم صورت می‌گیرد و در هر بار، تعداد کالاهای مرغوب و نامرغوب ثابت است (۵ به ۲۰)؛ از این رو احتمال موفقیت در هر بار $\frac{۱۵}{۲۰}$ یا ۰/۷۵ است؛ یعنی:

	در هر آزمایش
احتمال موفقیت (p)	۰/۷۵
احتمال عدم موفقیت (q = ۱ - p)	۰/۲۵

مثال ۲۱ـ۶ براساس آمار متولدین، مشخص شده است که از هر ۱۰۰ نوزاد به طور متوسط ۴۸ نفر دختر و بقیه پسرند. می‌خواهیم بدانیم آیا این آزمایش، آزمایش برنولی محسوب می‌شود.

بله، اگر احتمال دختر بودن نوزاد را احتمال موفقیت بنامیم، آنگاه برای هر نوزاد احتمال موفقیت ۰/۴۸ و احتمال شکست ۰/۵۲ است.

مثال ۲۲ـ۶ مثال ۲۰ـ۶ را در نظر می‌گیریم. اگر بخواهیم کالایی را بدون جایگزینی انتخاب کنیم، می‌خواهیم بدانیم آیا این آزمایش، آزمایش برنولی محسوب می‌شود.

خیر، چون در بار اول احتمال موفقیت (انتخاب کالای مرغوب) $\frac{۱۵}{۲۰}$ است، ولی در دفعه دوم بسته به اینکه بار اول کالای مرغوب انتخاب شده یا نشده باشد، احتمال موفقیت به ترتیب برابر $\frac{۱۴}{۱۹}$ و $\frac{۱۵}{۱۹}$ است و به همین دلیل که احتمال موفقیت از آزمایشی به آزمایش دیگر ثابت نیست، این آزمایش، آزمایش برنولی محسوب نمی‌شود.

۱ـ۵ـ۶ نمونه‌گیری بدون جایگزینی از جامعه بزرگ

در جامعه‌ای که تعداد اعضای آن و نیز تعداد افرادی که واجد شرایط خاصی هستند نیز بسیار زیاد است، احتمال موفقیت (احتمال انتخاب فردی که واجد شرایط باشد) در نمونه‌گیریهای بدون جایگزینی نسبتاً ثابت است ـ گرچه دقیقاً ثابت نیست ـ و می‌توان فرض کرد که این آزمایشها، آزمایش برنولی هستند.

مثال ۲۳ـ۶ از بین ۵ هزار مشتری بانکی ۲ هزار نفر در حسابهای کوتاه‌مدت سرمایه‌گذاری کرده‌اند. اگر برحسب تصادف چند نفر از مشتریان این بانک را انتخاب کنیم، می‌خواهیم بدانیم احتمال اینکه هر یک در حسابهای کوتاه‌مدت

سرمایه‌گذاری کرده باشند، چقدر است و اینکه آیا این آزمایش، آزمایش برنولی محسوب می‌شود یا نه.

احتمال موفقیت در آزمایش اول $\frac{۲۰۰۰}{۵۰۰۰}$ و در آزمایش دوم مشروط به اینکه اولی در حسابهای کوتاه‌مدت سرمایه‌گذاری کرده باشد $\frac{۱۹۹۹}{۴۹۹۹}$ و مشروط به اینکه اولی در حسابهای کوتاه‌مدت سرمایه‌گذاری نکرده باشد $\frac{۲۰۰۰}{۴۹۹۹}$ است و ... . در هر صورت اختلاف $\frac{۲۰۰۰}{۵۰۰۰}$ (احتمال موفقیت در آزمایش اول) با $\frac{۱۹۹۹}{۴۹۹۹}$ یا $\frac{۲۰۰۰}{۴۹۹۹}$ (احتمال موفقیت در آزمایش دوم) و ... آن‌قدر ناچیز است که می‌توان احتمال موفقیت را از آزمایشی به آزمایش دیگر ثابت فرض کرد؛ بنابراین می‌توان گفت که این آزمایش، یک آزمایش برنولی است.

تمرین

۱. اگر از آزمایشهای زیر ۲ نمونه گرفته شود، کدام‌یک آزمایش برنولی است؟

الف) در جعبه‌ای ۳ کالای ناسالم و ۲۷ کالای سالم وجود دارد. کالاها را بدون جایگزینی انتخاب می کنیم. موفقیت را خارج شدن کالای سالم در نظر می گیریم.

ب) از بین ۱۳۲۴ پیچ تولید شده در یک هفته، ۴۵۳ عدد آنها استاندارد نیستند. موفقیت را خارج شدن پیچ غیراستاندارد در نظر می گیریم.

ج) در یک کارگاه جوراب‌بافی که دارای ۲۰ دستگاه است، احتمال خراب شدن هر دستگاه ۰/۱۵ است. موفقیت را خراب شدن دستگاه در نظر می گیریم.

د) یک میلیون نفر می‌خواهند فردی را از بین ۵ نماینده انتخاب کنند. برآورد شده است که ۲۸۰ هزار نفر به نماینده سوم رأی می‌دهند. موفقیت را انتخاب فردی در نظر می گیریم که به این نماینده رأی دهد.

۶ـ۶ توزیع دوجمله‌ای

در n آزمایش برنولی که در آن احتمال موفقیت p است، متغیر تصادفی X را تعداد موفقیتها در نظر می گیریم. توزیع احتمال X را «توزیع دو جمله‌ای» با احتمال

موفقیت p می‌نامیم که در آن متغیر تصادفی X می‌تواند مقادیر ۰، ۱، ... و n را انتخاب کند.

فرض کنید آزمایشی ۳ بار تکرار شود و احتمال موفقیت در هر بار ثابت و برابر p باشد. حالتهای ممکن این آزمایش (موفقیتها را با S و شکست را با F نشان می‌دهیم) همراه با احتمال ۰، ۱، ۲ و ۳ بار موفقیت در این آزمایش به این صورت است:

تعداد موفقیتها	۰	۱	۲	۳
حالتهای ممکن	FFF	SFF FSF FFS	SSF SFS FSS	SSS
احتمال	$q \times q \times q$ $= q^3$	$p \times q \times q +$ $q \times p \times q +$ $q \times q \times p$ $= 3pq^2$	$p \times p \times q +$ $p \times q \times p +$ $q \times p \times p$ $= 3p^2q$	$p \times p \times p$ $= p^3$

بنابراین احتمال ۰، ۱، ۲ و ۳ موفقیت به ترتیب برابر است با:

$$P(X=0) = q \times q \times q = q^3$$

$$P(X=1) = p \times q \times q + q \times p \times q + q \times q \times p = 3pq^2$$

$$P(X=2) = p \times p \times q + p \times q \times p + q \times p \times p = 3p^2q$$

$$P(X=3) = p \times p \times p = p^3$$

حالتهای با ۲ موفقیت را در نظر بگیرید (FSS ،SFS ،SSF). تعداد این حالتها برابر است با تعداد جایگشتهای سه حرفی $\binom{3}{2,1} = 3$ و چون در این آزمایش تنها دو پیامد F و S وجود دارد، پس می‌توان به صورت ساده‌تر نوشت $\binom{3}{2} = 3$. از آنجا که احتمال کلیه جایگشتهای مختلف یکسان است، می‌توانیم برای محاسبه $P(X=2)$، حاصل $\binom{3}{2}$ را در احتمال مربوط به یکی از جایگشتها (p^2q) ضرب کنیم؛ یعنی:

$$P(X=۲)=\binom{۳}{۲}p^{۲}q$$

با گسترش مثال مذکور فرمول توزیع احتمال دوجمله‌ای را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\text{دوجمله‌ای}\quad \boxed{P(X=x)=\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x}\quad ,\quad x=۰,۱,۲,\dots,n} \qquad (۶\text{ـ}۱۶)$$

در این فرمول، x تعداد موفقیتهای مورد نظر، n تعداد آزمایشها، p احتمال موفقیت در هر آزمایش و q یا (p − ۱) احتمال عدم موفقیت در هر آزمایش است.

مثال ۲۴ـ۶ دانشجویی می‌خواهد به ۵ سؤال دوگزینه‌ای (صحیح ـ غلط) پاسخ دهد. احتمال دادن پاسخ درست به هر سؤال ۰/۷ است. می‌خواهیم بدانیم احتمال اینکه دقیقاً به ۲ سؤال پاسخ درست بدهد، چقدر است.

چون سؤالات مستقل از یکدیگر و احتمال دادن پاسخ درست به هر سؤال با سؤال دیگر برابر است (۰/۷)، پس توزیع تعداد پاسخهای درست دارای توزیع دوجمله‌ای است که در آن n = ۵، p = ۰/۷ و x = ۰,۱,۲,۳,۴,۵ است؛ بنابراین:

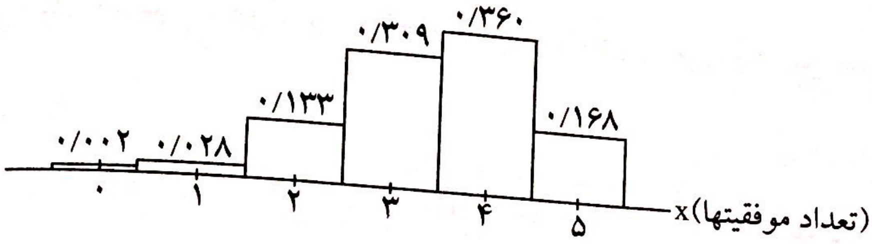
$$P(X=۲)=\binom{۵}{۲}(۰/۷)^{۲}(۰/۳)^{۵-۲}=۰/۱۳۲۳$$

مثال ۲۵ـ۶ می‌خواهیم تابع احتمال مثال ۲۴ـ۶ را پیدا کرده، نمودار احتمال آن را رسم کنیم.

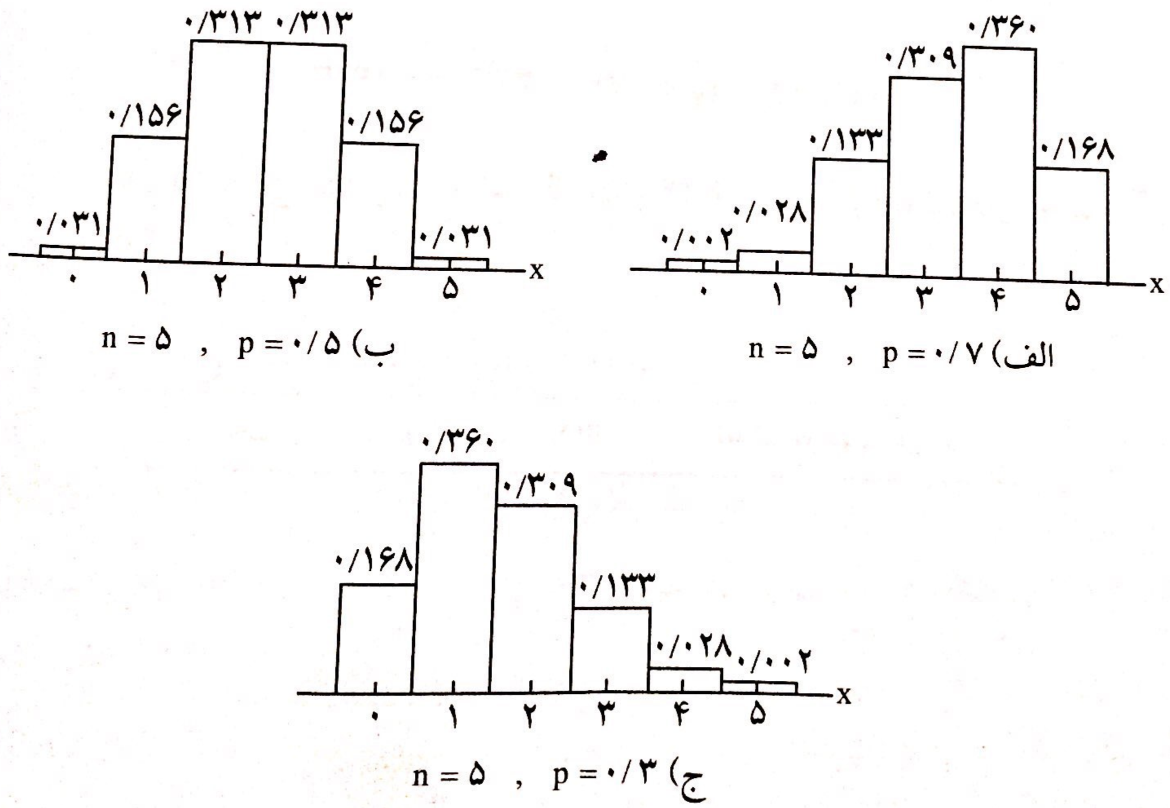
تابع احتمال مربوط به n = ۵ و p = ۰/۷

تعداد جوابهای درست x	احتمال $P(X=x)=\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x}$
۰	۰/۰۰۲
۱	۰/۰۲۸
۲	۰/۱۳۳
۳	۰/۳۰۹
۴	۰/۳۶۰
۵	۰/۱۶۸

نمودار احتمال به این صورت خواهد بود:



حال تأثیر احتمال موفقیت توزیع دو جمله‌ای (p) را بر نمودار احتمال آن بررسی می‌کنیم. برای $n=5$ و ۳ مقدار متفاوت $p=0/3$، $p=0/5$، $p=0/7$، ۳ نمودار احتمال در شکل ۱ـ۶ رسم شده است. با توجه به شکل ۱ـ۶ ملاحظه می‌شود که اگر احتمال موفقیت، بیشتر از ۰/۵ باشد (نمودار الف)، نمودار احتمال مربوطه چوله به چپ است. اگر احتمال موفقیت کوچک‌تر از ۰/۵ باشد (نمودار ج) نمودار احتمال مربوطه چوله به راست است و اگر احتمال موفقیت مساوی ۰/۵ باشد (نمودار ب) نمودار احتمال، متقارن است.



شکل ۱ـ۶ تأثیر pهای مختلف روی نمودار احتمال

مثال ۶ـ۲۶ از بین شرکتهایی که سال گذشته حسابرسی شده‌اند، ۰/۲۵ آنها حسابهایشان رد شده است. اگر ۴ شرکت برحسب تصادف انتخاب شده باشند، می‌خواهیم بدانیم احتمال هر یک از این موارد چقدر است.

الف) حسابهای یک شرکت رد شده باشد.

ب) حداکثر حسابهای دو شرکت رد شده باشد.

در این مثال $n = ۴$ است و اگر احتمال موفقیت را رد شدن حسابهای شرکتی در نظر بگیریم، $p = ۰/۲۵$ خواهد بود، پس خواهیم داشت:

الف)
$$P(X=۱)=\binom{۴}{۱}(۰/۲۵)^{۱}(۰/۷۵)^{۴-۱}=۰/۴۲$$

ب)
$$P(X\le ۲)=P(X=۰)+P(X=۱)+P(X=۲)$$
$$=\binom{۴}{۰}(۰/۲۵)^{۰}(۰/۷۵)^{۴-۰}+\binom{۴}{۱}(۰/۲۵)^{۱}(۰/۷۵)^{۴-۱}$$
$$+\binom{۴}{۲}(۰/۲۵)^{۲}(۰/۷۵)^{۴-۲}=۰/۳۲+۰/۴۲+۰/۲۱=۰/۹۵$$

۶ـ۶ـ۱ استفاده از جدولهای توزیع دوجمله‌ای

وقتی n نسبتاً بزرگ است، محاسبه احتمالهای دوجمله‌ای کار خسته‌کننده‌ای است؛ زیرا در این محاسبات باید p و q به توانهای بزرگی برسند. برای حل این مشکل، جدولهایی تهیه شده و در پایان کتاب (جدول ۱ پیوست) آورده شده است. در این جدولها احتمال تجمعی $P(X\le c)=\sum_{x=۰}^{c}\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x}$ برای مقادیر مختلف n، p و c آورده شده است.

مثال ۶ـ۲۷ فرض کنید ۰/۲۰ از مصرف‌کنندگان پودرهای شوینده، مصرف‌کننده مارک تجاری ما هستند. اگر ۱۷ مصرف‌کننده انتخاب شوند، می‌خواهیم بدانیم هر یک از این احتمالات چقدر است.

الف) ۳ مصرف‌کننده مشتری ما باشند.

ب) حداقل ۴ مصرف‌کننده مشتری ما باشند.

ج) حداقل ۲ و حداکثر ۵ مصرف‌کننده مشتری ما باشند.

$$P(X=۳)=P(X\le ۳)-P(X\le ۲)=۰/۵۴۹-۰/۳۱۰=۰/۲۳۹$$

الف) $P(X\ge ۴)=۱-P(X<۴)=۱-P(X\le ۳)=۱-۰/۵۴۹=۰/۴۵۱$

ب) $P(۲\le X\le ۵)=P(X\le ۵)-P(X<۲)=P(X\le ۵)-P(X\le ۱)$

ج) $=۰/۸۹۴-۰/۱۱۸=۰/۷۷۶$

۲ـ۶ـ۶ میانگین و واریانس توزیع دوجمله‌ای

می‌دانیم که توزیع دوجمله‌ای شامل n آزمایش مستقل برنولی است. اگر فرض کنیم که $n=۱$ است، توزیع دوجمله‌ای به توزیع برنولی‌ای تبدیل می‌شود که میانگین و واریانس آن به این صورت است:

y	۰	۱
$P(Y=y)$	q	p

$$E(Y)=۰\times q+۱\times p=p \qquad (۶\text{ـ}۱۷)$$

$$E(Y^۲)=(۰)^۲q+(۱)^۲p=p \qquad (۶\text{ـ}۱۸)$$

$$V(Y)=E(Y^۲)-[E(Y)]^۲=p-p^۲=p(۱-p)=pq \qquad (۶\text{ـ}۱۹)$$

اگر X را تعداد موفقیتها در توزیع دوجمله‌ای بدانیم، خواهیم داشت:

$$X=Y_۱+Y_۲+...+Y_n$$

در این رابطه، $Y_۱$ تعداد موفقیتها در آزمایش اول (۰ یا ۱)، $Y_۲$ تعداد موفقیتها در آزمایش دوم (۰ یا ۱) و ... است و چون آزمایشها مستقل هستند، خواهیم داشت:

$$E(X)=E(Y_۱)+...+E(Y_n)=p+...+p=np$$

$$V(X)=V(Y_۱)+...+V(Y_n)=pq+...+pq=npq$$

تمرین

۱. توزیعی دوجمله‌ای با $n=۷$ و $p=۰/۲$ را در نظر گرفته، این موارد را پیدا کنید.

الف) $P(X=5)$ د) $P(X \geq 4)$

ب) $P(X>2)$ هـ) $P(2<X \leq 5)$

ج) $P(X<8)$ و) $P(2 \leq X \leq 5)$

۲. احتمال اینکه مشتری‌ای که وارد فروشگاهی می‌شود چیزی بخرد ۰/۷ است. اگر ۷ مشتری وارد فروشگاهی شده باشند، این احتمالات را محاسبه کنید:

الف) همه مشتریان خرید کنند.

ب) حداقل ۴ مشتری خرید کند.

۳. در تمرین ۲، فرض کنید ۲۰ مشتری وارد فروشگاه شده باشند، این موارد را محاسبه کنید:

الف) ۱۰ مشتری خرید کنند.

ب) حداکثر ۱۵ مشتری خرید کند.

ج) حداقل ۵ مشتری و حداکثر ۱۵ مشتری خرید کند.

د) انتظار دارید از این ۲۰ مشتری چند نفر خرید کنند؟

۴. در تمرین ۲، امید ریاضی و واریانس تعداد مشتریان خرید کرده، چقدر است؟

۷-۶ توزیعهای دوجمله‌ای منفی و هندسی

۷-۶-۱ توزیع دوجمله‌ای منفی

در آزمایشهای برنولی، گاهی می‌خواهیم احتمال x موفقیت از n آزمایش را بدانیم که به توزیع دوجمله‌ای مربوط می‌شود. گاهی نیز به دانستن تعداد آزمایشهایی که در آنها K موفقیت رخ می‌دهد، علاقه‌مند هستیم که به توزیع دوجمله‌ای منفی مربوط می‌شود؛ مثلاً احتمال اینکه پنجمین فردی که شایعه‌ای را شنیده، دومین فردی باشد که آن را باور می‌کند یا احتمال اینکه ششمین کالای معیوب در یک کارتن، پنجمین کالای معیوبی باشد که مأمورین کنترل کیفیت متوجه آن شده‌اند یا احتمال اینکه دزدی که در دفعه هشتم دست به دزدی زده، برای سومین بار دستگیر شود.

فرمول توزیع دوجمله‌ای منفی به این صورت است:

دوجمله‌ای منفی $\boxed{P(X=x)=\binom{x-1}{K-1}p^k q^{x-k}\ ,\ x=K, K+1, K+2,\ldots}$ (۶-۲۰)

در این فرمول، K تعداد موفقیتها در x آزمایش برنولی و p احتمال موفقیت در هر آزمایش برنولی است. امید ریاضی و واریانس توزیع دوجمله‌ای منفی به ترتیب برابر است با $E(X)=\frac{K}{p}$ و $V(X)=\frac{Kq}{p^2}$. به توزیع دوجمله‌ای منفی، «توزیع پاسکال» یا «توزیع زمان انتظار» نیز می گویند.

مثال ۲۸ـ۶ احتمال اینکه دزدی در حین دزدی دستگیر شود ۰/۶ است. می‌خواهیم بدانیم احتمال اینکه در هشتمین دزدی خود برای چهارمین بار دستگیر شود، چقدر است.

در این مثال $x=8$، $K=4$ و $p=0/6$ است، پس خواهیم داشت:

$$P(X=8)=\binom{8-1}{4-1}(0/6)^4(0/4)^{8-4}=0/12$$

مثال ۲۹ـ۶ اگر کالایی معیوب باشد مأمور کنترل کیفیت با احتمال ۰/۸۰ متوجه آن می‌شود. احتمال اینکه ششمین کالای معیوب، پنجمین کالای معیوبی باشد که وی متوجه آن شده است، چقدر است؟

در این مثال $x=6$، $K=5$ و $p=0/8$ است، پس خواهیم داشت:

$$P(X=6)=\binom{6-1}{5-1}(0/8)^5(0/2)^{6-5}=0/39$$

۶-۷-۲ توزیع هندسی

اگر در توزیع دوجمله‌ای منفی $K=1$ باشد، یعنی بخواهیم اولین موفقیت را در x آزمایش بدانیم، باز هم می‌توان از این توزیع استفاده کرد، ولی این حالت، حالت خاصی از توزیع دوجمله‌ای منفی است که آن را توزیع هندسی می‌نامند؛ مثلاً احتمال اینکه پنجمین فردی که شایعه‌ای را شنیده، اولین فردی باشد که آن را باور می کند یا احتمال اینکه ششمین کالای معیوب در یک کارتن اولین کالای معیوبی

باشد که مأموران کنترل کیفیت متوجه آن می‌شوند یا احتمال اینکه دزدی که در دفعه هشتم دست به دزدی زده برای اولین بار دستگیر شود.

فرمول توزیع هندسی به این صورت است:

$$\boxed{P(X=x)=pq^{x-1}\ ,\ x=۱,۲,...}$$ هندسی (۶_۲۱)

در این فرمول، p احتمال موفقیت در یک آزمایش و x شماره آزمایشی است که اولین موفقیت در آن رخ داده است.

امید ریاضی و واریانس توزیع هندسی به ترتیب برابر است با $E(X)=\frac{۱}{p}$ و $V(X)=\frac{q}{p^۲}$.

مثال ۶_۳۰ تیراندازی ۰/۷۷ از تیرهای خود را به هدف می‌زند. می‌خواهیم بدانیم احتمال اینکه سومین تیر وی اولین تیری باشد که به هدف می‌خورد، چقدر است؟

در این مثال $x=۳$ و $p=۰/۷۷$ است، پس خواهیم داشت:

$$P(X=۳)=۰/۷۷\times ۰/۲۳^{۳-۱}=۰/۰۴$$

مثال ۶_۳۱ فردی متقاضی گواهینامه رانندگی است و با احتمال ۰/۶۵ در آزمون رد می‌شود. می‌خواهیم بدانیم احتمال اینکه در دومین آزمون قبول شود، چقدر است؟

در این مثال $x=۲$ و $p=۰/۳۵$ است، پس خواهیم داشت:

$$P(X=۲)=۰/۳۵\times ۰/۶۵^{۲-۱}=۰/۲۳$$

تمرین

۱. اگر احتمالهای داشتن فرزند پسر و دختر مساوی باشد، این احتمالات را حساب کنید:

الف) چهارمین فرزند خانواده‌ای اولین پسر آنها باشد.

ب) هفتمین فرزند خانواده‌ای دومین دختر آنها باشد.

ج) دهمین فرزند خانواده‌ای چهارمین یا پنجمین پسر آنها باشد.

۲. احتمال اینکه فردی از چراغ قرمز عبور کند و پلیس متوجه نشود ۰/۳۵ است. احتمال اینکه در حین عبور از چهارمین چراغ قرمز جریمه شود، چقدر است؟

۳. ۵ تا از حسابهای دریافتی شرکتی دارای اشتباه است. احتمال اینکه حسابرسی داخلی متوجه هر حساب اشتباه شود ۰/۵۵ است. این احتمالات را محاسبه کنید.

الف) احتمال اینکه چهارمین حساب اشتباه، دومین حسابی باشد که حسابرس داخلی متوجه آن شده است.

ب) احتمال اینکه چهارمین حساب اشتباه، اولین حسابی باشد که حسابرس داخلی متوجه آن شده است.

۴. احتمال مطلع شدن هر بار مشتری از آگهی مربوط به یک شرکت که از تلویزیون پخش می‌شود ۰/۶۷ است. احتمال اینکه در سومین آگهی شرکت، مشتری آگاه شود، چقدر است؟

۶ـ۸ توزیع چندجمله‌ای

اگر آزمایشی شامل بیش از دو پیامد ممکن باشد و احتمال هر پیامد در آزمایشهای مختلف ثابت و آزمایشها مستقل از یکدیگر باشند، توزیع مربوط به آن، توزیع چندجمله‌ای است. تنها تفاوت این توزیع با توزیع دوجمله‌ای این است که در توزیع دوجمله‌ای دو پیامدِ ممکن وجود دارد (موفقیت و شکست)، ولی در این توزیع بیش از دو پیامد ممکن وجود دارد؛ مثلاً نتیجه مسابقه‌ای ممکن است برد، مساوی یا باخت باشد یا تولیدات کارخانه‌ای ممکن است به عالی، خوب، متوسط و ضعیف طبقه‌بندی شود یا ممکن است نظر افراد راجع به موضوعی موافق، ممتنع یا مخالف باشد.

با گسترش مثالهای پیش گفته می‌توان نوشت:

اگر آزمایشی n بار به صورت مستقل انجام گیرد و هر آزمایش شامل K پیامد مجزا با احتمالهای ثابت p_1، p_2، ...، p_K باشد به طوری که $p_1 + p_2 + ... + p_K = 1$ باشد، آنگاه احتمال وقوع x_1 بار از پیامد ۱، x_2 بار از پیامد ۲، ... و x_K بار از پیامد K دارای چنین توزیعی است:

$$\boxed{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_K = x_K) = \binom{n}{x_1, x_2, ..., x_K} p_1^{x_1} p_2^{x_2} ... p_k^{x_k}} \quad (۶\text{-}۲۲)$$

این توزیع چندجمله‌ای است و در آن $x_1 + x_2 + ... + x_K = n$ است.

مثال ۶-۳۲ ۰/۲۵ از افراد شهری به نامزد اول، ۰/۳۵ به نامزد دوم و ۰/۴۰ به نامزد سوم رأی می‌دهند. فرض می‌کنیم ۱۰ نفر هم‌اکنون پای صندوق منتظر رأی دادن هستند، می‌خواهیم بدانیم احتمال اینکه ۲ نفر به نامزد اول، ۳ نفر به نامزد دوم و ۵ نفر به نامزد سوم رأی دهند، چقدر است؟

در این مثال $p_1 = ۰/۲۵$، $p_2 = ۰/۳۵$، $p_3 = ۰/۴۰$، و $x_1 = ۲$، $x_2 = ۳$، $x_3 = ۵$ و $n = ۱۰$ است، پس خواهیم داشت:

$$P(X_1 = ۲, X_2 = ۳, X_3 = ۵) = \binom{۱۰}{۲,۳,۵}(۰/۲۵)^۲(۰/۳۵)^۳(۰/۴۰)^۵ = ۰/۰۷$$

تمرین

۱. فرض کنید تیمی ۵ مسابقه در پیش دارد و احتمال برد، باخت، و مساوی در هر بازی به ترتیب ۰/۵، ۰/۴ و ۰/۱ است. احتمال اینکه در این ۵ مسابقه دو برد، دو مساوی و یک باخت داشته باشد، چقدر است؟

۲. بنا به اطلاعات گذشته مدیریت نیروی انسانی سازمانی، ۰/۳۲ از افرادی که این سازمان استخدام می‌کند قبل از دو سال کار سازمان را ترک می‌کنند. ۰/۲۷ در سازمان باقی می‌مانند، ولی از کار خود ناراضی هستند. ۰/۱۶ در سازمان باقی می‌مانند و نسبتاً راضی هستند و ۰/۲۵ باقی می‌مانند و از کار خود کاملاً راضی هستند. احتمال اینکه از بین ۷ نفری که شرکت به تازگی استخدام کرده است ۲ نفر سازمان را ترک کنند، یک نفر باقی بماند و ناراضی باشد، ۲ نفر باقی بمانند و نسبتاً راضی باشند و ۲ نفر نیز باقی بمانند و کاملاً راضی باشند، چقدر است؟

۹ـ۶ توزیع فوق هندسی

فرض کنید می‌خواهیم بدانیم اگر از بین ۱۰ عدد کالا که ۳ عدد آنها معیوب است، ۵ کالا را انتخاب کنیم احتمال اینکه ۴ عدد آنها سالم باشد، چقدر است. در فصل پنجم گفتیم که احتمال وقوع چنین پیشامدی برابر است با نسبت تعداد حالات مساعد به حالات ممکن؛ یعنی:

$$\text{احتمال} = \frac{\text{تعداد حالات مساعد}}{\text{تعداد حالات ممکن}}$$

تعداد حالات ممکن، یعنی انتخاب ۵ کالا از بین ۱۰ کالا (همان ترکیبهای ۵ تایی از ۱۰ تا یعنی $\binom{10}{5}$)، ولی برای محاسبه تعداد حالات مساعد، می‌خواهیم از بین ۷ کالای سالم ۴ کالا و از بین ۳ کالای معیوب یک کالا انتخاب کنیم. تعداد طرقی که می‌توان از بین ۷ کالا ۴ تا را انتخاب کرد همان ترکیبهای ۴ تایی از ۷ تاست $\binom{7}{4}$ و تعداد طرقی که می‌توان از بین ۳ کالای معیوب ۱ عدد را انتخاب کرد نیز همان ترکیبهای ۱ تایی از ۳ تاست $\binom{3}{1}$. طبق قانون ضرب، اگر بتوانیم تعداد مورد نظر از کالاهای سالم را به $\binom{7}{4}$ طریق و تعداد مورد نظر از کالاهای معیوب را به $\binom{3}{1}$ طریق انتخاب کنیم، تعداد مورد نظر از کالاهای سالم و معیوب را می‌توان به $\binom{3}{1}\binom{7}{4}$ طریق انتخاب کرد؛ یعنی در این مثال احتمال مورد نظر مساوی است با:

$$\frac{\binom{7}{4}\binom{3}{1}}{\binom{10}{5}} = \frac{35 \times 3}{252} = \frac{35}{84}$$

با تعمیم این مثال می‌توان گفت هرگاه بخواهیم این احتمال را پیدا کنیم که از بین N شیء مورد نظر که k تای آنها واجد شرایط است، n شیء را برگزینیم به طوری که x تای آن واجد شرایط باشد، از این فرمول که فرمول توزیع فوق هندسی نامیده می‌شود، استفاده می‌کنیم:

$$\text{فوق هندسی} \quad \boxed{P(X = x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \; x = 0, 1, \ldots, k} \qquad (۶\_۲۳)$$

امید ریاضی و واریانس توزیع فوق هندسی به این صورت است:

$$E(X) = \frac{nk}{N}, \; V(x) = \frac{nK(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)} \qquad (۶\text{_}۲۴)$$

مثال ۳۳ـ۶ از بین ۸ مدیری که به جلسه امروز دعوت شده‌اند، ۳ نفرشان رابطه‌مدار و بقیه کارمدارند. می‌خواهیم بدانیم اگر برحسب تصادف ۴ نفر را انتخاب کنیم، احتمال اینکه ۲ مدیر رابطه‌مدار انتخاب شود، چقدر است.

در این مثال $N = ۸$، $n = ۴$، $k = ۳$ و $x = ۲$ است؛ پس خواهیم داشت:

$$P(X = ۲) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{۳}{۲}\binom{۵}{۲}}{\binom{۸}{۴}} = \frac{۳\times ۱۵}{۷۰} = \frac{۹}{۱۴}$$

مثال ۳۴ـ۶ در مثال ۳۳ـ۶، امید ریاضی و واریانس تعداد مدیران رابطه‌مدار را محاسبه می‌کنیم:

$$E(X) = \frac{nk}{N} = \frac{۴\times ۳}{۸} = ۱/۵$$

یعنی از ۴ مدیر انتخابی، به طور متوسط ۱/۵ نفر آنها رابطه‌مدارند.

$$V(X) = \frac{nK(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)} = \frac{۴\times ۳(۸-۳)(۸-۴)}{۸^2(۸-۱)} = ۰/۵۳۶$$

اگر N بزرگ و n در مقایسه با N، کوچک باشد (با محاسبه سرانگشتی اگر n کمتر از ۵ درصد N باشد)، تفاوت چندانی بین نمونه‌گیری با جایگزینی و بدون جایگزینی وجود نخواهد داشت و می‌توان از توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و $P = \frac{k}{N}$ به عنوان تقریب توزیع فوق هندسی استفاده کرد.

مثال ۳۵ـ۶ از بین ۲۰۰ متقاضی شغلی، تنها ۷۰ نفر واجد شرایط هستند. اگر ۶ نفر را برحسب تصادف انتخاب کنیم، می‌خواهیم احتمال اینکه ۳ نفر آنها واجد شرایط باشند را محاسبه کنیم.

برای حل این مثال که مثالی از نمونه‌گیری بدون جایگزینی است، باید از

توزیع فوق هندسی استفاده شود ($N = ۲۰۰$، $n = ۶$، $k = ۷۰$ و $x = ۳$)، ولی چون $n < ۰/۰۵N$ است ($۶ > ۰/۰۵ \times ۲۰۰$) می‌توان از توزیع دوجمله‌ای به عنوان تقریب توزیع فوق هندسی استفاده کرد؛ یعنی:

$$n = ۶ \ , \ p = \frac{k}{N} = \frac{۷۰}{۲۰۰} = ۰/۳۵$$

$$P(X = ۳) = \binom{۶}{۳}(۰/۳۵)^{۳}(۰/۶۵)^{۶-۳} = ۰/۲۴$$

تمرین

۱. از بین ۱۲ نفری که متقاضی استخدام در کاری هستند، ۳ نفر قادر به انجام دادن آن هستند. قرار است به صورت تصادفی ۲ نفر انتخاب شوند. این احتمالات را محاسبه کنید:

الف) هیچ‌کدام قادر به انجام کار نباشند.

ب) تنها یک نفر قادر به انجام کار باشد.

ج) هر دو قادر به انجام کار باشند.

۲. ظرفی شامل ۱۰ کالاست که ۳ عدد آنها خراب است. نمونه‌ای ۲ تایی انتخاب شده است، احتمال اینکه حداکثر یک واحد آن خراب باشد، چقدر است؟

۳. انجمنی شامل ۲ زن و ۷ مرد است. تابع احتمال را در یک نمونه دوتایی به گونه‌ای بنویسید که X نشان‌دهنده زنان انتخاب شده، باشد. امید ریاضی (میانگین) X را محاسبه کنید.

۴. طی پژوهشهایی که دربارهٔ ۱۲۰ مشتری یک شرکت انجام گرفته، مشخص شده است که ۹۰ نفر آنها از کیفیت تولیدات و خدمات بعد از فروش شرکت راضی هستند. اگر از این ۱۲۰ مشتری برحسب تصادف ۵ نفر انتخاب شوند، احتمال اینکه ۴ نفر از تولیدات و خدمات شرکت راضی باشند، چقدر است؟

۶ـ۱۰ توزیع پواسون

در توزیع دوجمله‌ای، وقتی n بزرگ شود محاسبات کار ساده‌ای نخواهد بود؛ مثلاً

اگر بخواهیم بدانیم از بین ۲۰۰۰ واحد کالای موجود که هر یک با احتمال ۰/۰۰۱۵ معیوب‌اند، با چه احتمالی ۵ عدد آنها معیوب‌اند، ناچاریم $\binom{۲۰۰۰}{۵}$ و همین‌طور $(۰/۰۰۱۵)^{۵}(۰/۹۹۸۵)^{۱۹۹۵}$ را محاسبه و در هم ضرب کنیم که این محاسبات کار دشواری خواهد بود. در این گونه مواقع یعنی هنگامی که n به سمت بی‌نهایت و p به سمت صفر میل کند و در عین حال مقدار np ثابت بماند، استفاده از توزیع پواسون با این تابع احتمال، تقریب مناسبی برای توزیع دوجمله‌ای خواهد بود.

$$\text{پواسون}\ \boxed{P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!},\quad x=۰,۱,۲,\ldots} \qquad (۶\text{-}۲۵)$$

که در این رابطه، λ پارامتر توزیع و برابر با np، $(\lambda = np)$ و $e \approx ۲/۷۱۸$ است. جدول ۲ پیوست، احتمالات تجمعی پواسون را به ازای مقادیر مختلف λ و x نشان می‌دهد.

مثال ۶-۳۶ می‌خواهیم بدانیم احتمال اینکه از بین ۲۰۰۰ واحد کالای موجود شرکتی که هر کدام با احتمال ۰/۰۰۱۵ معیوب‌اند، ۵ عدد آنها معیوب باشد، چقدر است.

چون n بزرگ و p خیلی کوچک است، می‌توان از توزیع پواسون استفاده کرد؛ یعنی:

$$\lambda = np = ۲۰۰۰ \times ۰/۰۰۱۵ = ۳$$

بنابراین:

$$P(X=۵)=\frac{e^{-۳}(۳)^{۵}}{۵!}=۰/۱۰۰۸$$

به طور کلی وقتی $n \geq ۲۰$ و $p \leq ۰/۰۵$ باشد، توزیع پواسون تقریب خوبی برای توزیع دوجمله‌ای و وقتی $n \geq ۱۰۰$ و $np \leq ۱۰$ باشد، تقریبی بسیار عالی برای آن محسوب می‌شود.

امید ریاضی و واریانس توزیع پواسون λ است. به عبارت دیگر $E(X)=\lambda$ و $V(X)=\lambda$. از بین توزیعهای رایج، چه پیوسته و چه گسسته، توزیعی که میانگین

(امید ریاضی) و واریانس آن با هم برابر است توزیع پواسون است و این یکی از خصوصیات جالب توجه این توزیع است.

مثال ۳۷ـ۶ براساس تجربه مشخص شده است که یک تلفنچی ۳ درصد از تلفنها را اشتباه وصل می‌کند. اگر امروز ۱۵۰ تلفن وصل کرده باشد، می‌خواهیم این موارد را محاسبه کنیم:

الف) امید ریاضی (میانگین) تلفنهایی که اشتباه وصل شده است.

ب) احتمال اینکه ۳ شماره را اشتباه وصل کرده باشد.

ج) احتمال اینکه بیش از یک شماره را اشتباه وصل کرده باشد.

چون $n = ۱۵۰ > ۲۰$ و $p = ۰/۰۳ \leq ۰/۰۵$ است، پس می‌توان از توزیع پواسون برای تقریب توزیع دوجمله‌ای استفاده کرد.

الف) $$\lambda = np = ۱۵۰ \times ۰/۰۳ = ۴/۵$$

ب) $$P(X = ۳) = \frac{e^{-۴/۵}(۴/۵)^{۳}}{۳!} = ۰/۱۶۸۷$$

ج) $$P(X > ۱) = ۱ - P(X \leq ۱) = ۱ - [P(X = ۰) + P(X = ۱)]$$

$$= ۱ - \left(\frac{e^{-۴/۵}(۴/۵)^{۰}}{۰!} + \frac{e^{-۴/۵}(۴/۵)^{۱}}{۱!}\right) = ۰/۹۳۸۹$$

۱ـ۱۰ـ۶ توزیع پواسون برای تعداد مراجعات

معمولاً تعداد مراجعاتی که به سیستمی می‌شود، از توزیع پواسون برخوردار است که در این صورت λ متوسط تعداد مراجعات در واحد زمان است. کاربرد توزیع پواسون در این زمینه خیلی بیشتر از تقریب آن برای توزیع دوجمله‌ای است؛ مثلاً تعداد مشتریانی که در هر ساعت به یک سیستم صف مراجعه می‌کنند، تعداد اتومبیلهایی که در هر دقیقه برای زدن بنزین به پمپ بنزینی مراجعه می‌کنند، تعداد مشتریانی که در هر ساعت به رستورانی مراجعه می‌کنند، ... می‌تواند دارای توزیع پواسون باشد. در این حالت فرمول توزیع پواسون به صورت زیر است:

پواسون برای مراجعات $$\boxed{P(X = x) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{x}}{x!}, \quad x = ۰, ۱, ۲, \ldots} \qquad (۶\text{ـ}۲۶)$$

در این رابطه، t واحد زمانی است که متوسط مراجعات (λ) با توجه به آن تعریف می‌شود.

مثال ۳۸ـ۶ تعداد مشتریانی که به بانکی مراجعه می‌کنند دارای توزیع پواسون با میانگین ۲ مشتری در هر دقیقه هستند؛ می‌خواهیم این احتمالات را محاسبه کنیم:

الف) در یک دقیقه اول هیچ مشتری‌ای مراجعه نکند.

ب) در ۱۰۵ ثانیه اول کمتر از ۳ مشتری مراجعه کند.

ج) در ۱/۵ دقیقه اول یک مشتری مراجعه کند.

الف)

$$\lambda t = ۲\times ۱ = ۲$$

$$P(X=۰)=\frac{e^{-۲}(۲)^{۰}}{۰!}=۰/۱۳۵۳$$

ب)

$$\lambda t = ۲\times \frac{۱۰۵}{۶۰} = ۳/۵$$

$$P(X<۳)=P(X=۰)+P(X=۱)+P(X=۲)$$

$$=\frac{e^{-۳/۵}(۳/۵)^{۰}}{۰!}+\frac{e^{-۳/۵}(۳/۵)^{۱}}{۱!}+\frac{e^{-۳/۵}(۳/۵)^{۲}}{۲!}$$

$$=۰/۰۳۰۲+۰/۱۰۵۷+۰/۱۸۵۰=۰/۳۲۰۹$$

ج)

$$\lambda t = ۲\times ۱/۵ = ۳$$

$$P(X=۱)=\frac{e^{-۳}(۳)^{۱}}{۱!}=۰/۱۴۹۴$$

تمرین

۱. توزیع پواسونی با $\lambda = ۲$ را در نظر گرفته $P(X=۰)$، $P(X\le ۳)$ و $P(X\ge ۲)$ را حساب کنید.

۲. تعداد اتومبیلهای سواری‌ای که به رستورانی مراجعه می‌کنند دارای توزیع پواسون با میانگین ۲/۵ اتومبیل در هر ۱۰ دقیقه هستند، این احتمالات را حساب کنید.

الف) در ۱۰ دقیقه اول بیش از یک اتومبیل مراجعه کند.

ب) در ۲۰ دقیقه بیش از ۳ اتومبیل و کمتر یا مساوی ۶ اتومبیل مراجعه کند.

ج) در ۵ دقیقه اول اتومبیلی مراجعه نکند.

۳. طبق تجارب گذشته مشخص شده است که ۰/۰۲۵ از مسافرین قطار بلیت خود را

بازپس می‌دهند. اگر امروز ۲۵۰ نفر بلیت گرفته باشند، این احتمالات را محاسبه کنید.

الف) ۵ نفر بلیت خود را بازپس دهند.

ب) کمتر یا مساوی ۳ نفر بلیت خود را باز پس دهند.

۴. توزیع پواسونی با $\lambda = ۱$ را در نظر بگیرید و برای $x = ۰,۱,۲,۳,۴$، $P(X = x)$ را محاسبه و نمودار احتمال آن را رسم کنید. آیا این نمودار چولگی دارد؟

۵. توزیع پواسونی با $\lambda = ۴$ را در نظر بگیرید و برای $x = ۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹$، $P(X = x)$ را محاسبه و نمودار احتمال آن را رسم کنید. آیا این نمودار چولگی دارد؟

۶. از مقایسه نمودارهای احتمال دو تمرین ۴ و ۵ چه نتیجه‌ای می گیرید؟

۱۱ـ۶ توزیع یکنواخت گسسته

یکی از توابع گسسته، توزیع یکنواخت[1] است که احتمال تمامی حالتهای آن یکسان است. اگر k را تعداد حالتهای متغیر در نظر بگیریم، در این صورت:

$$\text{یکنواخت گسسته}\quad \boxed{P(x = x_i) = \frac{۱}{k} \quad , \quad x = x_۱, x_۲, \ldots, x_k} \qquad (۶\text{ـ}۲۷)$$

مثال ۳۹ـ۶ توزیع تعداد غیبتهای کارکنان در ۵۰ روز گذشته به این صورت بوده است.

x_i (تعداد غیبت)	۰	۱	۲	۳	۴	جمع
F_i (تعداد روز)	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۵۰

با توجه به اینکه توزیع فراوانی تعداد غیبتها یکنواخت است (فراوانی غیبتهای مختلف یکسان است) تابع احتمال آن به صورت زیر خواهد شد.

$$P(x = x_i) = \frac{۱}{۵} \quad , \quad x = ۰,۱,۲,۳,۴$$

1. uniform

۶ـ۱۲ خلاصه

در این فصل ابتدا متغیر تصادفی و سپس تابع احتمال و تابع تجمعی احتمال (تابع توزیع) معرفی شدند. همان‌طور که ذکر شد، هر متغیر تصادفی، دارای میانگین (امید ریاضی) و واریانس است؛ به طوری که می‌توان میانگین و واریانس متغیرهای تصادفی گسسته را محاسبه کرد. گاهی لازم است که رفتار هم‌زمان دو متغیر تصادفی مورد مطالعه قرار گیرد که بدین منظور تابع احتمال توأم بیان شد. با معرفی کوواریانس نوع و شدت رابطهٔ خطی بین دو متغیر تصادفی قابل محاسبه است.

از بین توزیعهای رایج گسسته، توزیعهای برنولی، دوجمله‌ای، دوجمله‌ای منفی، هندسی، چندجمله‌ای، فوق هندسی، و توزیع پواسون معرفی شدند و شرایط استفاده و موارد کاربرد آنها با ارائه مثالهای متعدد مطرح گردید. معرفی و بررسی توزیع متغیرهای تصادفی پیوسته به فصل بعد موکول شد.

۶ـ۱۳ سؤالات و مسائل

سؤالات دوگزینه‌ای

۱. تابع احتمال و تابع توزیع را می‌توان به صورت مترادف به کار برد. ص□ غ□

۲. امید ریاضی همان میانگین موزون است که احتمالات در آن نقش وزنها یا ضرایب را در میانگین موزون ایفا می‌کنند. ص□ غ□

۳. تابع احتمال توأم به بررسی رفتار هم‌زمان دو یا چند متغیر تصادفی می‌پردازد. ص□ غ□

۴. در توزیع احتمال توأم، احتمالات حاشیه‌ای X همان توزیع احتمال X است. ص□ غ□

۵. اگر مقدار کوواریانس ۲۱- شود می‌توان گفت که رابطه مستقیمی بین دو متغیر تصادفی وجود دارد. ص□ غ□

۶. اگر کوواریانس دو متغیر تصادفی X و Y، صفر باشد، این دو متغیر به ناچار مستقل‌اند. ص□ غ□

۷. اگر دو متغیر تصادفی X و Y مستقل باشند، کوواریانس آنها لزوماً صفر است.
ص□ غ□

۸. اگر دو متغیر تصادفی X و Y باشند، آنگاه $E(XY) = E(X) \times E(Y)$.
ص□ غ□

۹. اگر دو متغیر تصادفی X و Y مستقل باشند، آنگاه $V(X - Y) = V(X) + V(Y)$.
ص□ غ□

۱۰. نام دیگر توزیع دوجمله‌ای منفی، توزیع هندسی است.
ص□ غ□

۱۱. مقدار یک متغیر تصادفی را معمولاً می‌توان قبل از وقوع آن تعیین کرد.
ص□ غ□

۱۲. همواره می‌توان توزیع دوجمله‌ای را با توزیعهای دیگر تقریب زد.
ص□ غ□

۱۳. امید ریاضی (میانگین) توزیع دوجمله‌ای برابر با np است.
ص□ غ□

۱۴. وقتی احتمال موفقیت در توزیع دوجمله‌ای برابر ۰/۵ باشد، نمودار احتمال آن متقارن است.
ص□ غ□

۱۵. وقتی احتمال موفقیت در توزیع دوجمله‌ای بزرگ‌تر از ۰/۵ باشد، نمودار احتمال آن چوله به راست است.
ص□ غ□

۱۶. توزیع دوجمله‌ای حالت خاصی از توزیع چندجمله‌ای است.
ص□ غ□

۱۷. توزیع فوق هندسی برای نمونه‌گیریهای بدون جای‌گذاری استفاده می‌شود.
ص□ غ□

۱۸. اگر در توزیع فوق هندسی $n < ۰/۰۵ N$ باشد، می‌توان از توزیع دوجمله‌ای برای تقریب توزیع فوق هندسی استفاده کرد.
ص□ غ□

۱۹. از بین توزیعهای رایج، توزیعی که میانگین (امید ریاضی) و واریانس آن با هم برابر است، توزیع پواسون است.
ص□ غ□

۲۰. کاربرد توزیع پواسون برای تعداد مراجعات، به مراتب بیشتر از کاربرد آن برای تقریب توزیع دوجمله‌ای است.
ص□ غ□

۴۵. در سؤال ۴۳، $P(Y = 10 / X = 2)$ با کدام‌یک از این موارد برابر است؟

الف) $\frac{1}{6}$ ج) $\frac{1}{2}$

ب) $\frac{1}{3}$ د) ۱

۴۶. در سؤال ۴۳، $E(XY)$ با کدام‌یک از این موارد برابر است؟

الف) $\frac{3}{10}$ ج) ۱۰

ب) صفر د) $-\frac{10}{3}$

۴۷. در سؤال ۴۳، کوواریانس با کدام‌یک از این موارد برابر است؟

الف) $\frac{3}{10}$ ج) $-\frac{10}{3}$

ب) $\frac{10}{3}$ د) صفر

۴۸. درسؤال ۴۳، کدام‌یک از این روابط صادق است؟

الف) $E(X+Y) = E(X)$ ج) $E(X+Y) = E(XY)$

ب) $E(X+Y) = E(Y)$ د) $E(X+Y) = E(X) - E(Y)$

۴۹. در سؤال ۴۳، واریانس X و واریانس Y به ترتیب (از راست به چپ) کدام است؟

الف) ۵,۰ ج) ۵,۴

ب) ۲۵,۰ د) ۲۵,۴

۵۰. در سؤال ۴۳، $V(X - Y)$ با کدام‌یک از این موارد برابر است؟

الف) ۲۹ ج) $\frac{77}{3}$

ب) ۲۱ د) $\frac{107}{3}$

مسائل

۵۱. یک قرعه‌کشی با یک میلیون امتیاز قابل کسب دارای یک جایزه اول به مبلغ ۵ میلیون ریال، ۹ جایزه دوم هر یک به مبلغ ۲۵۰ هزار ریال، ۹۰ جایزه سوم هر یک به مبلغ ۲۵ هزار ریال و ۹۰۰ جایزه چهارم هر یک به مبلغ ۲۵۰۰ ریال است. اگر در ازای هر ۱۵ ریال خرید، یک امتیاز به خریدار تعلق گیرد، این موارد را محاسبه کنید.

الف) امید ریاضی سود هر امتیاز از نظر خریدار.

ب) فرض کنید تنها ۸۰ درصد از امتیازها کسب شده باشند. امید ریاضی سود فروشگاه مجری این قرعه‌کشی.

۵۲. مدیر یک شیرینی‌پزی بنا به تجربه می‌داند که تعداد کیکهای شکلاتی‌ای که ممکن است در روزی معین بفروشد، متغیری تصادفی است که دارای توزیع احتمال $P(X=x)=\frac{1}{6}$ به ازای $x=۰,۱,۲,۳,۴,۵$ است. همچنین می‌داند که هر کیکی که می‌فروشد هزار ریال سود دارد و هر کیکی که فروش نمی‌رود در اثر فاسد شدن ضرری برابر ۴۰۰ ریال خواهد داشت. با فرض اینکه هر کیک را تنها همان روزی که پخته می‌شود می‌توان فروخت، سود مورد انتظار شیرینی‌پز را برای هر یک از این روزها تعیین کنید.

الف) ۳ کیک بپزد.

ب) ۴ کیک بپزد.

ج) ۵ کیک بپزد.

۵۳. تعداد فروش کت و شلوار فروشگاه لباسی در هر روز، همراه با احتمال آن، در این جدول آورده شده است.

تعداد فروش	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
احتمال	۰/۱۰	۰/۱۵	۰/۱۶	۰/۲۰	۰/۱۹	۰/۰۸	۰/۰۷	۰/۰۵

الف) این فروشگاه به طور متوسط در هر روز چند کت و شلوار می‌فروشد؟

ب) واریانس تعداد فروش چقدر است؟

۵۴. امتحانی مشتمل بر ۴ پرسش ۳ گزینه‌ای است. فردی به صورت تصادفی به تمام پرسشها پاسخ می‌دهد. اگر X تعداد جوابهای درست باشد، این موارد را محاسبه کنید.

الف) تابع احتمال X

ب) امید ریاضی و واریانس X

ج) اگر معلمی مقیاس نمره را طبق تبدیل $Y=۲۲/۵X+۱۰$ عوض کند، در

این صورت امید ریاضی و واریانس Y را با دو روش حساب کنید.

۵۵. فرض کنید X متغیری تصادفی با میانگین μ و انحراف معیار σ باشد. میانگین و انحراف معیار Z را در هر یک از این حالات حساب کنید.

الف) $Z = 3X - 2$

ب) $Z = \frac{X-2}{4}$

ج) $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

۵۶. آیا این تابع می‌تواند معرف یک تابع احتمال باشد؟ چرا؟

$$f(x) = \frac{x-3}{8}, \quad x = 3, 4, 6, 8$$

۵۷. فرض کنید احتمال اینکه یک ناو جنگی در هر شلیک به هدف بزند $\frac{1}{5}$ است.

این احتمالات را در ۶ شلیک این ناو محاسبه کنید.

الف) دقیقاً ۲ بار به هدف بزنند.

ب) حداقل ۲ بار به هدف بزنند.

ج) حداکثر ۲ بار به هدف بزنند.

۵۸. شورای مدیران شرکتی مرکب از مدیر عامل و ۶ مدیر اداری، تدارکات، پرسنلی، تولید، بازاریابی و مالی است. هر موضوعی که طرح شود با اکثریت آراء این ۷ نفر درباره آن تصمیم گرفته می‌شود. فرض کنید موضوعی در این شورا طرح می‌شود و هر یک از اعضا به صورت مستقل با احتمال ۰/۴ به موضوع مذکور رأی مثبت می‌دهند. چقدر احتمال دارد که موضوع تصویب شود؟

۵۹. با توجه به داده‌های سؤال ۵۸، فرض کنید مدیر عامل، طالب تصویب این موضوع است و از قبل با مدیر مالی صحبت کرده و مطمئن شده است که او هم به این موضوع رأی مثبت می‌دهد. در این صورت احتمال تصویب موضوع چقدر است؟

۶۰. اظهارنظر حسابرسان راجع به حسابهای شرکتی ممکن است قبول، مردود، عدم اظهارنظر یا اظهارنظر مشروط باشد. در سال پیش ۰/۲۰، ۰/۱۵، ۰/۴۰ و ۰/۲۵ نظرها به ترتیب قبول، مردود، عدم اظهارنظر و اظهارنظر مشروط بوده است. اگر فرض کنیم ۶ شرکت به صورت تصادفی انتخاب شده‌اند، هر یک از این

احتمالات چقدر است؟

الف) احتمال اینکه حسابهای ۲ شرکت قبول شده باشد.

ب) احتمال اینکه حسابهای ۲ شرکت قبول و ۲ شرکت نیز مردود شده باشد.

ج) احتمال اینکه حسابهای ۲ شرکت قبول، ۲ شرکت مردود، یک شرکت مشروط شده و راجع به حسابهای یک شرکت اظهار نظری نشده باشد.

۶۱. توزیع احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y به این صورت است:

x \ y	۲۰	۴۰
۳	۰/۴	۰/۲
۵	۰/۲	۰/۱
۷	۰/۱	۰

الف) $E(X)$ و $E(Y)$ را حساب کنید.

ب) $E(XY)$ را حساب کنید.

ج) $Cov(X, Y)$ را پیدا کرده، راجع به ارتباط این دو متغیر توضیح دهید.

۶۲. فرض کنید نسخه دست‌نویس کتابی که ۵۰۰ صفحه دارد، دارای ۵۰ غلط است که به صورت تصادفی در سراسر کتاب پخش هستند. هر یک از این احتمالات را محاسبه کنید:

الف) فصلی از کتاب که ۳۰ صفحه دارد، دارای ۲ غلط یا بیشتر باشد.

ب) فصلی از کتاب که ۵۰ صفحه دارد، دارای ۲ غلط یا بیشتر باشد.

ج) یک صفحه انتخابی غلط نداشته باشد.

۶۳. فرض کنید ۵ مهندس و ۹ تکنیسین روی پروژه‌ای کار می‌کنند. اگر ۵ نفر را به صورت تصادفی انتخاب کنیم، احتمال اینکه دقیقاً دو مهندس انتخاب شود چقدر است؟

۶۴. فرض کنید که در مزرعه بزرگی ۴۰ درصد کارگران ساعتی طالب رسمی شدن هستند. این موارد را در صورتی که ۱۰ نفر از این کارگران انتخاب شوند، محاسبه کنید:

الف) احتمال اینکه آنها طالب رسمی شدن باشند.

ب) میانگین و واریانس تعداد افرادی که طالب رسمی شدن هستند.

۶۵. در ظرفی ۵ مهره سفید، ۳ مهره قرمز و ۲ مهره سبز وجود دارد. اگر چهار مهره به طور تصادف بیرون آورده شود، احتمال اینکه ۲ مهره قرمز و حداقل یک مهره سفید بیرون بیاید، چقدر است؟

۶۶. هنگام تهیه یک فیلم سینمایی، احتمال اینکه بازیگری نقش خود را در هر دور فیلمبرداری درست بازی کند ۰/۳۵ است. احتمال اینکه در چهارمین دور فیلمبرداری برای اولین بار نقش خود را درست بازی کند، چقدر است؟

۶۷. فرض کنید احتمال اینکه یک اظهارنامه مالیاتی به طور صحیح پر شود، فقط شامل خطاهایی به نفع مالیات‌دهنده، فقط شامل خطاهایی به نفع دولت، و یا شامل خطاهایی از هر دو نوع باشد به ترتیب ۰/۶۰، ۰/۲۰، ۰/۱۰ و ۰/۱۰ است. احتمال اینکه بین ۱۲ تا از چنین اظهارنامه‌هایی که برحسب تصادف برای حسابرسی انتخاب شده‌اند، ۵ تا صحیح پر شده باشند، ۴ تا فقط شامل خطاهایی به نفع مالیات‌دهنده، ۲ تا شامل فقط خطاهایی به نفع دولت و یکی شامل خطاهایی از هر دو نوع باشد، چقدر است؟

۶۸. فرض کنید برای ساختن عمارتی جدید، دو مرحله متوالی نقشه‌برداری و بنا کردن لازم است. زمان مورد نیاز برحسب سال، برای تکمیل نقشه‌برداری (S) و بنا کردن (C)، دو متغیر تصادفی مستقل با این توزیعهای احتمال هستند:

$$P(S) = (۰/۸)(۰/۲)^{S-۱} , \quad S = ۱, ۲, ۳, ...$$

$$P(C) = (۰/۵)(۰/۵)^{C-۲} , \quad C = ۲, ۳, ۴, ...$$

بدیهی است که کل زمان ساختن (T) عبارت است از $T = S + C$. اگر انجام کار ساختمان بیش از $T = ۴$ سال طول بکشد، پیمانکار جریمه می‌شود. احتمال جریمه شدن پیمانکار چقدر است؟

۶۹. مدیر یک مجموعه آپارتمانی، ۳ یخچال جدید که فروشنده سالم بودن آنها را تضمین می کند، سفارش می‌دهد. طبق ضمانتنامه، در صورت معیوب بودن یخچال

فروشنده باید آن را تعمیر کند. احتمال معیوب بودن هر یخچال ۲۰ درصد است.

الف) توزیع احتمال تعداد یخچالهای معیوب (X) را پیدا کرده، در جدولی بنویسید.

ب) میانگین و واریانس X چقدر است.

ج) فرض کنید هزینه تعمیر، شامل کار مزدی ثابت (۵۰ هزار ریال) به اضافه هزینه متغیر برای هر یخچال (۲۵ هزار ریال) باشد؛ یعنی:

$$C(x) = \begin{cases} ۰, & x = ۰ \\ ۵۰۰۰۰ + ۲۵۰۰۰x, & x > ۰ \end{cases}$$

متوسط هزینه تعمیر را پیدا کنید.

۷۰. طبق آمار سالیانه‌ای که اداره راهنمایی و رانندگی منتشر کرده است، از هر ۱۰۰ هزار نفر به طور متوسط ۳ نفر در اثر حوادث رانندگی کشته می‌شوند. این احتمالات را در شهری با ۲۰۰ هزار نفر جمعیت محاسبه کنید.

الف) ۵ نفر کشته شوند.

ب) کمتر از ۳ نفر کشته شوند.

ج) بین ۴ تا ۸ نفر کشته شوند (خود ۴ و ۸ را در نظر بگیرید).

پاسخ‌نامه سؤالات

۱) غ	۲) ص	۳) ص	۴) ص	۵) غ	۶) غ	۷) ص
۸) ص	۹) ص	۱۰) غ	۱۱) غ	۱۲) غ	۱۳) ص	۱۴) ص
۱۵) غ	۱۶) ص	۱۷) ص	۱۸) ص	۱۹) ص	۲۰) ص	۲۱) ص
۲۲) ص	۲۳) غ	۲۴) غ	۲۵) ص	۲۶) د	۲۷) د	۲۸) ج
۲۹) ج	۳۰) ب	۳۱) ج	۳۲) الف	۳۳) الف	۳۴) الف	۳۵) ج
۳۶) د	۳۷) ب	۳۸) الف	۳۹) د	۴۰) د	۴۱) ج	۴۲) ج
۴۳) ج	۴۴) د	۴۵) ب	۴۶) د	۴۷) ج	۴۸) ب	۴۹) د
۵۰) د						

فصل هفتم

توابع احتمال پیوسته

۷ـ۱ تابع چگالی احتمال و تابع توزیع متغیر تصادفی پیوسته

۷ـ۱ـ۱ متغیر تصادفی پیوسته

در فصل پیش درباره متغیرهای تصادفی گسسته و توابع احتمال خاص آن توضیح دادیم. در این فصل درباره متغیرهای تصادفی پیوسته و چند تا از توابع مهم[1] آن توضیح می‌دهیم.

فرض کنید علاقه‌مند به دانستن احتمال وقوع تصادف در یک اتوبان ۵۰ کیلومتری یا احتمال وقوع تصادف در نقطه یا فاصله‌ای مشخص در این اتوبان باشیم. همچنین فرض کنید که احتمال وقوع تصادف در هر نقطه‌ای از این اتوبان با نقطه دیگر برابر است. در این صورت فضای نمونه‌ٔ این آزمایش پیوستاری از نقاط است که روی ۰ تا ۵۰ کیلومتر واقع شده‌اند.

احتمال اینکه در هر فاصله‌ای به اندازه x تصادفی رخ دهد برابر با $\frac{x}{۵۰}$ است؛ مثلاً احتمال اینکه تصادف در جایی بین کیلومتر دهم تا چهلم رخ دهد برابر $\frac{۳}{۵}$ است؛ زیرا فاصله این دو، برابر ۳۰ = ۱۰ − ۴۰ است و کل فاصله ۵۰ کیلومتر است، پس احتمال آن $\frac{۳۰}{۵۰} = \frac{۳}{۵}$ خواهد بود؛ به عبارت دیگر خواهیم داشت:

---

۱. در این فصل صرفاً به معرفی توابع یکنواخت و نمایی بسنده می کنیم. در فصول بعدی با توابع نرمال، t استیودنت، کای ـ مربع، و فیشر آشنا خواهید شد. برای اطلاع از سایر توزیعهای پیوسته به منبع شماره ۱۵ انتهای کتاب مراجعه شود.