توابع احتمال پیوسته

۷ـ۱ تابع چگالی احتمال و تابع توزیع متغیر تصادفی پیوسته

۷ـ۱ـ۱ متغیر تصادفی پیوسته

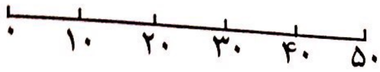
در فصل پیش درباره متغیرهای تصادفی گسسته و توابع احتمال خاص آن توضیح دادیم. در این فصل درباره متغیرهای تصادفی پیوسته و چند تا از توابع مهم[1] آن توضیح می‌دهیم.

فرض کنید علاقه‌مند به دانستن احتمال وقوع تصادف در یک اتوبان ۵۰ کیلومتری یا احتمال وقوع تصادف در نقطه یا فاصله‌ای مشخص در این اتوبان باشیم. همچنین فرض کنید که احتمال وقوع تصادف در هر نقطه‌ای از این اتوبان با نقطه دیگر برابر است. در این صورت فضای نمونه این آزمایش پیوستاری از نقاط است که روی ۰ تا ۵۰ کیلومتر واقع شده‌اند.

احتمال اینکه در هر فاصله‌ای به اندازه x تصادفی رخ دهد برابر با $\frac{x}{۵۰}$ است؛ مثلاً احتمال اینکه تصادف در جایی بین کیلومتر دهم تا چهلم رخ دهد برابر $\frac{۳}{۵}$ است؛ زیرا فاصله این دو، برابر ۳۰ = ۱۰ − ۴۰ است و کل فاصله ۵۰ کیلومتر است، پس احتمال آن $\frac{۳}{۵} = \frac{۳۰}{۵۰}$ خواهد بود؛ به عبارت دیگر خواهیم داشت:

---

۱. در این فصل صرفاً به معرفی توابع یکنواخت و نمایی بسنده می‌کنیم. در فصول بعدی با توابع نرمال، t استیودنت، کای ـ مربع، و فیشر آشنا خواهید شد. برای اطلاع از سایر توزیعهای پیوسته به منبع شماره ۱۵ انتهای کتاب مراجعه شود.



$$P(۱۰ \le X \le ۴۰) = \frac{۳۰}{۵۰} = \frac{۳}{۵}$$

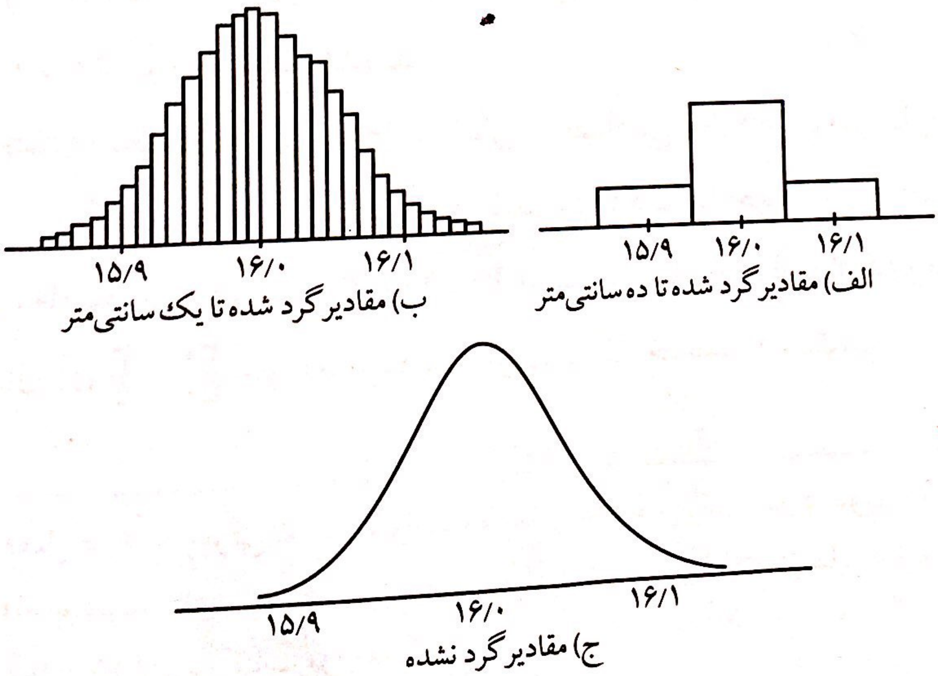
بدیهی است هر چه این فاصله کوتاه‌تر شود، احتمال مربوط به آن نیز کمتر می‌شود؛ مثلاً احتمال اینکه تصادف در فاصله کوچکی (مانند فاصله یک سانتی‌متری) روی دهد برابر با $(\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰۰}) : ۵۰ = ۰/۰۰۰۰۰۰۲$ است که خیلی کوچک است. وقتی فاصله به صفر می‌گراید، احتمال وقوع تصادف در آن فاصله نیز به صفر می‌گراید؛ یعنی:

$$P(X = x) = \frac{۰}{۵۰} = ۰$$

این بدان معنا نیست که امکان ندارد پیشامدهای متناظر رخ دهند؛ بالأخره تصادف در نقطه‌ای از این ۵۰ کیلومتر واقع می‌شود؛ بلکه چون طول فاصله بی‌نهایت کوچک است، احتمال وقوع تصادف در یک نقطه مشخص نزدیک به صفر است.

۷ـ۱ـ۲ تابعهای چگالی احتمال

نمودارهای بافت‌نگار شکل ۷ـ۱ برای قد ۴۰ دانش‌آموزِ یک کلاس در سه حالت ترسیم شده است:



شکل ۷ـ۱ تعریف احتمال برای متغیرهای پیوسته

روشن است که اگر مقادیر گرد نشوند یا به مقادیر بسیار کوچکی همچون یک صدم میلی‌متر گرد شوند، بافت نگار توزیع احتمال از حالت گسسته به پیوسته تبدیل می‌شود. تابعی که معرف این متغیر تصادفی پیوسته است تابع چگالی احتمال خوانده می‌شود که مساحت زیر منحنی آن برابر یک است. تابع چگالی احتمال را با $f(x)$ نشان می‌دهیم. تابع چگالی احتمال را «تابع چگالی» و «چگالی احتمال» نیز می‌نامند. احتمال اینکه متغیر تصادفی پیوسته X مقداری بین دو نقطه a و b را بگیرد، برابر است با سطح زیر منحنی بین این دو نقطه؛ یعنی:

$$\boxed{P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx} \quad (۷\text{-}۱)$$

همان‌طور که پیش از این گفتیم، در متغیرهای پیوسته، احتمال اینکه متغیر تصادفی X دقیقاً یک مقدار مشخص را بگیرد، برابر صفر است؛ زیرا:

$$P(X = a) = P(a \leq X \leq a) = \int_a^a f(x)dx = ۰ \quad (۷\text{-}۲)$$

با توجه به این مطلب، روشن است که:

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) \quad (۷\text{-}۳)$$

باید توجه داشت که نخست اینکه احتمال، مقداری غیرمنفی است؛ یعنی $P(a \leq X \leq b) \geq ۰$ و همچنین سطح زیر منحنی برابر یک است؛ یعنی:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = ۱ \quad (۷\text{-}۴)$$

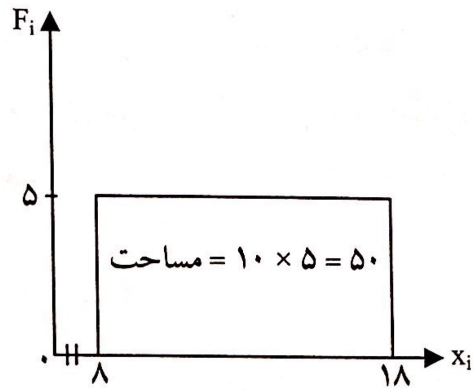
بنابراین تابعی با مقادیر $f(x)$ را که روی مجموعه اعداد حقیقی تعریف شده باشد، تابع چگالی احتمال می گوییم اگر:

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \geq ۰ \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = ۱ \end{array}} \quad (۷\text{-}۵)$$

برای درک بهتر تابع چگالی به مثال ۱ـ۷ نگاه کنید.

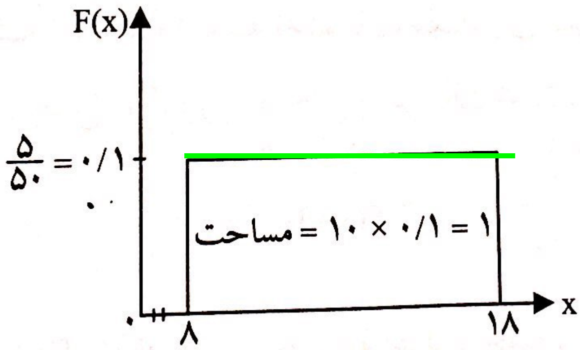
مثال ۱ـ۷ توزیع نمرات ۲۵ دانشجو در درسی همراه با نمودار آن به این صورت است:

نمرات (x_i)	F_i
۸ـ۱۰	۵
۱۰ـ۱۲	۵
۱۲ـ۱۴	۵
۱۴ـ۱۶	۵
۱۶ـ۱۸	۵
	۲۵



توزیع فراوانی نمرات

مشخص است که توزیع فراوانی نمرات نمی‌تواند یک تابع چگالی باشد (زیرا مساحت آن یک نیست). اگر بخواهیم تابع فراوانی را به تابع چگالی تبدیل کنیم باید طوری محور yها را تغییر دهیم که مساحت یک شود؛ یعنی آن را ۵۰ برابر کوچک کنیم (تقسیم بر ۵۰ کنیم). در این صورت به تابع چگالی آن دست پیدا می‌کنیم.



بنابراین تابع چگالی آن به این صورت می‌شود:

$$\boxed{f(x) = ۰/۱ \quad , \quad ۸ < x < ۱۸}$$

مثال ۲ـ۷ با توجه به تابع چگالی به دست آمده در مثال ۱ـ۷، موارد زیر را

حساب کنید.

الف) احتمال اینکه نمره فردی بین ۱۲ تا ۱۵ باشد.

ب) چند درصد افراد نمره‌شان کمتر از ۱۴ است؟

$$f(x)=۰/۱ \quad , \quad ۸<x<۱۸$$

الف)

$$P(۱۲\le X\le ۱۵)=\int_{۱۲}^{۱۵}۰/۱dx=[۰/۱x]_{۱۲}^{۱۵}=۰/۱(۱۵-۱۲)=۰/۳$$

ب)

$$P(X<۱۴)=\int_{۸}^{۱۴}۰/۱dx=[۰/۱x]_{۸}^{۱۴}=۰/۱(۱۴-۸)=۰/۶ \text{ یا } ۶۰\%$$

مثال ۳ـ۷ متغیر تصادفی X با این تابع چگالی احتمال مفروض است:

$$f(x)=\begin{cases}۲e^{-۲x} , & x>۰\\ ۰ , & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

می‌خواهیم این مقادیر را محاسبه کنیم:

الف) $P(۱\le X\le ۵)$

ب) $P(-۵\le X\le ۲/۷۵)$

الف) $$P(۱\le X\le ۵)=\int_{۱}^{۵}۲e^{-۲x}dx=[-e^{-۲x}]_{۱}^{۵}=-e^{-۱۰}+e^{-۲}=۰/۱۳۵$$

ب) $$P(-۵\le X\le ۲/۷۵)=\int_{۰}^{۲/۷۵}۲e^{-۲x}dx=[-e^{-۲x}]_{۰}^{۲/۷۵}$$
$$=-e^{-۵/۵}+e^{۰}=۰/۹۹۶$$

۳ـ۱ـ۷ تابع توزیع (تجمعی) متغیر تصادفی پیوسته

در بسیاری از موارد مایلیم احتمال اینکه مقدار متغیر تصادفی پیوسته از عدد حقیقی x کوچک‌تر یا مساوی آن است را بدانیم. همان‌طور که در متغیرهای تصادفی گسسته مطرح کردیم، در این موارد باید از تابع توزیع که گاهی توزیع تجمعی گفته می‌شود

و آن را با $F(x)$ نشان می‌دهیم، استفاده کنیم؛ یعنی:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \quad \text{(۷ـ۶)}$$

تابع توزیع (تجمعی)

بدیهی است که $F(-\infty) = ۰$ و $F(+\infty) = ۱$ است.

پیش از این گفتیم (رابطه ۷ـ۱) احتمال اینکه متغیر تصادفی پیوسته X مقداری بین دو عدد حقیقی a و b را بگیرد $(a \leq b)$ به این صورت محاسبه می‌شود:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

بدیهی است این احتمال را به این صورت نیز می‌توان محاسبه کرد:

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

مثال ۷ـ۴ با در نظر گرفتن چگالی احتمال مثال ۷ـ۳ می‌خواهیم از تابع توزیع آن برای محاسبه دوباره قسمت الف و ب استفاده کنیم.

ابتدا تابع توزیع را به دست می‌آوریم:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{۰}^{x} ۲e^{-۲x}dx = [-e^{-۲x}]_{۰}^{x} = ۱ - e^{-۲x}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$F(x) = \begin{cases} ۰, & x \leq ۰ \\ ۱ - e^{-۲x}, & x > ۰ \end{cases}$$

الف) $P(۱ \leq X \leq ۵) = F(۵) - F(۱) = ۰/۹۹۹ - ۰/۸۶۴ = ۰/۱۳۵$

ب) $P(-۵ \leq X \leq ۲/۷۵) = F(۲/۷۵) - F(-۵) = ۰/۹۹۶ - ۰ = ۰/۹۹۶$

تمرین

۱. اگر تابع چگالی متغیر تصادفی X به این صورت باشد:

$$f(x) = \begin{cases} ۶x(۱-x), & ۰ < x < ۱ \\ ۰, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

این موارد را محاسبه کنید.

الف) $P(X > \frac{۱}{۳})$

ب) $P(\frac{۱}{۳} < X < \frac{۳}{۴})$

ج) $P(X = \frac{۱}{۳})$

د) $P(\frac{۱}{۳} \leq X \leq \frac{۱}{۲})$

۲. اگر تابع توزیع متغیر تصادفی X به این صورت باشد:

$$F(x) = \begin{cases} ۱ - \frac{۴}{x^{۲}}, & x > ۲ \\ ۰, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

این موارد را محاسبه کنید:

الف) $P(X < ۵)$

ب) $P(۱ < X < ۱/۵)$

۳. تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به این صورت است:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{K}{\sqrt{x}}, & ۰ < x < ۴ \\ ۰, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

این مقادیر را محاسبه کنید:

الف) مقدار K

ب) تابع توزیع این متغیر تصادفی

ج) $P(X < ۲)$

۷-۲ امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی پیوسته

امید ریاضی (میانگین) و واریانس متغیر تصادفی گسسته X را در فصل پیش به این صورت تعریف کردیم:

$$E(X) = \sum_{x} x.f(x)$$

$$V(X) = \sum_{x} [x - E(X)]^{۲} f(x)$$

در مورد متغیرهای تصادفی پیوسته، برای محاسبه میانگین باید متغیر تصادفی را در تابع چگالی خود ضرب و سپس به ازای مقادیر ممکن متغیر، انتگرال گیری کرد؛ یعنی:

$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx} \quad (۷\text{-}۷)$$ امید ریاضی متغیر پیوسته

و برای محاسبه واریانس، باید متغیر تصادفی را از میانگین خود کم کرد و حاصل را به توان دوم رساند و سپس در تابع چگالی خود ضرب و در پایان به ازای مقادیر ممکن متغیر انتگرال گیری کرد؛ یعنی:

$$\boxed{V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(x)]^{۲} f(x)dx} \quad (۷\text{-}۸)$$ واریانس متغیر پیوسته

مثال ۵-۷ این تابع چگالی مفروض است:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۳}, & ۱ < x < ۴ \\ ۰, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

می‌خواهیم امید ریاضی و واریانس را پیدا کنیم.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx = \int_{۱}^{۴} x(\frac{۱}{۳})dx = [\frac{۱}{۶}x^{۲}]_{۱}^{۴} = \frac{۱۵}{۶} = ۲/۵$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^{۲} f(x)dx = \int_{۱}^{۴} (x - ۲/۵)^{۲}(\frac{۱}{۳})dx$$

$$= \frac{۱}{۳}[\frac{۱}{۳}x^{۳} - \frac{۵}{۲}x^{۲} + ۶/۲۵x]_{۱}^{۴} = ۰/۷۵$$

مثال ۶-۷ اگر سود شرکتی را متغیری پیوسته در نظر بگیریم که دارای این چگالی احتمال است:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۲}{۶۳}(x + ۳), & -۲ < x < ۵ \\ ۰, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

می‌خواهیم محاسبه کنیم سود مورد انتظار این شرکت چقدر است.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx=\int_{-۲}^{۵} x.\frac{۲}{۶۳}(x+۳)dx=\frac{۲}{۶۳}[\frac{۱}{۳}x^{۳}+\frac{۳}{۲}x^{۲}]_{-۲}^{۵}=۲/۴۰۷$$

به طور کلی اگر $Y=g(X)$ باشد، $E(Y)$ به این صورت محاسبه می‌شود:

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x).f(x)dx \tag{۷-۹}$$

اگر $Y=X$ باشد، $E(Y)$ میانگین متغیر تصادفی X و اگر $Y=[x-E(X)]^{۲}$ باشد، $E(Y)$ واریانس X محسوب می‌شود.

مثال ۷-۷ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به این صورت است:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۲x}{۲۵}, & ۰<x<۵\\ ۰, & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

می‌خواهیم این موارد را محاسبه کنیم.

الف) $E(X)$، گشتاور مرتبه اول نسبت به صفر

ب) $E(X^{۲})$، گشتاور مرتبه دوم نسبت به صفر

ج) $E(X^{۳})$، گشتاور مرتبه سوم نسبت به صفر

د) $E(X^{۴})$، گشتاور مرتبه چهارم نسبت به صفر

الف) $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx=\int_{۰}^{۵} x.(\frac{۲x}{۲۵})dx=[\frac{۲x^{۳}}{۷۵}]_{۰}^{۵}=\frac{۱۰}{۳}$$

ب) $$E(X^{۲})=\int_{-\infty}^{+\infty} x^{۲}.f(x)dx=\int_{۰}^{۵} x^{۲}.(\frac{۲x}{۲۵})dx=[\frac{x^{۴}}{۵۰}]_{۰}^{۵}=\frac{۲۵}{۲}$$

ج) $$E(X^{۳})=\int_{-\infty}^{+\infty} x^{۳}.f(x)dx=\int_{۰}^{۵} x^{۳}.(\frac{۲x}{۲۵})dx=[\frac{۲x^{۵}}{۱۲۵}]_{۰}^{۵}=۵۰$$

د) $$E(X^{۴})=\int_{-\infty}^{+\infty} x^{۴}.f(x)dx=\int_{۰}^{۵} x^{۴}.(\frac{۲x}{۲۵})dx=[\frac{x^{۶}}{۷۵}]_{۰}^{۵}=\frac{۶۲۵}{۳}$$

تمرین

۱. میانگین و واریانس متغیر تصادفی X با این تابع چگالی احتمال را پیدا کنید.

$$f(x)=\begin{cases}۶x(۱-x), & ۰<x<۱\\ ۰, & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

۲. میانگین متغیر تصادفی X با این تابع چگالی احتمال را پیدا کنید (به انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء نیاز است).

$$f(x)=\begin{cases}۲e^{-۲x}\ , & x>۰\\ ۰\ , & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

۳. اگر تابع چگالی متغیر تصادفی X به این صورت باشد:

$$f(x)=\begin{cases}-Kx\ , & -۲<x<۰\\ Kx\ , & ۰\le x<۴\\ ۰\ , & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

این مقادیر را محاسبه کنید:

الف) مقدار K

ب) امید ریاضی X

ج) تابع توزیع X

د) $P(-۱<X<۲/۵)$

۷ـ۳ توزیع یکنواخت پیوسته

یکی از ساده‌ترین و در عین حال مهم‌ترین توزیعها، توزیع احتمال یکنواخت پیوسته است. در ابتدای همین فصل برای بیان متغیر تصادفی پیوسته مثالی آورده شد ـ وقوع تصادف در اتوبان ۵۰ کیلومتری ـ که توزیع آن توزیع یکنواخت بود. در اینجا به تعریف این چگالی احتمال و میانگین و واریانس آن می‌پردازیم.

متغیر پیوستهٔ X را در نظر بگیرید که مقادیر خود را بین دو نقطه α و β انتخاب می‌کند و $\alpha<\beta$ است. اگر احتمال وقوع X در فاصله‌های هم‌اندازه، در فاصلهٔ α و β برابر باشد، چگالی احتمال مربوط به آن یکنواخت خواهد بود.

مثال ۷ـ۸ این تابع چگالی احتمال یکنواخت مفروض است:

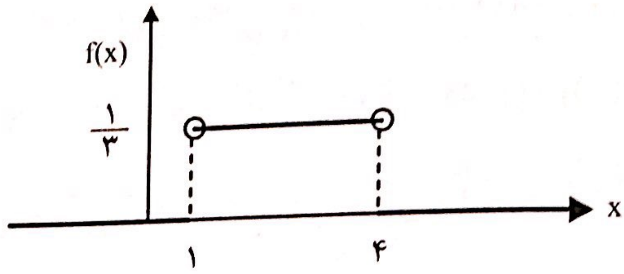
$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۳}\ , & ۱<x<۴\\ ۰\ , & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

الف) نمودار تابع چگالی را رسم کنید.

ب) تابع توزیع را پیدا کنید.

ج) نمودار تابع توزیع را رسم کنید.

الف)



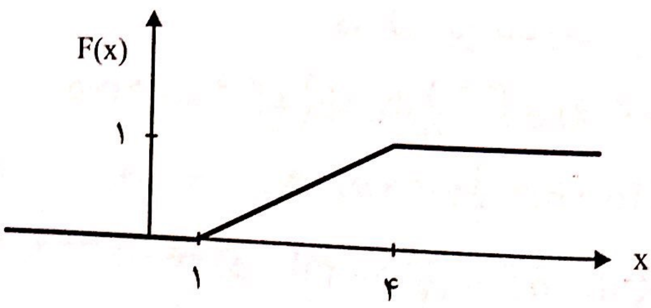
ب) برای پیدا کردن تابع توزیع، باید از تابع چگالی آن انتگرال بگیریم.

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{۱}^{x}\frac{۱}{۳}dx=\left[\frac{۱}{۳}x\right]_{۱}^{x}=\frac{۱}{۳}(x-۱)$$

بنابراین:

$$F(x)=\begin{cases} ۰, & x\le ۱\\ \frac{۱}{۳}(x-۱), & ۱<x<۴\\ ۱, & x\ge ۴\end{cases}$$

ج)



متغیر تصادفی پیوستهٔ X در صورتی دارای چگالی یکنواخت است که چگالی احتمال آن به این صورت باشد:

یکنواخت پیوسته
$$\boxed{f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{\beta-\alpha}, & \alpha<x<\beta\\ ۰, & \text{در غیر این صورت}\end{cases}} \qquad (۷\text{-}۱۰)$$

برای پیدا کردن میانگین و واریانس چگالی یکنواخت طبق معمول از انتگرال استفاده می‌کنیم:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} x(\frac{1}{\beta-\alpha})dx = \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \qquad (۷\_۱۱)$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(x)]^{2} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta}(x-\frac{\alpha+\beta}{2})^{2}(\frac{1}{\beta-\alpha})dx = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^{2} \qquad (۷\_۱۲)$$

میانگین و واریانس چگالی یکنواخت به این صورت است:

$$E(X) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \quad , \quad V(X) = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^{2}$$

مثال ۹ـ۷ سود شرکتی دارای توزیع یکنواخت بین ۳- و ۵ (به ۱۰ میلیون ریال) است. می‌خواهیم موارد ذیل را محاسبه کنیم.

الف) تابع چگالی احتمال

ب) احتمال آنکه سود شرکت بین ۰ تا ۳/۵ باشد.

ج) متوسط سود مورد انتظار شرکت

د) واریانس سود شرکت

الف)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & -3 < x < 5 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ب)

$$P(0 \le X \le 3/5) = \int_{0}^{3/5} \frac{1}{8}dx = [\frac{1}{8}x]_{0}^{3/5} = 0/4375$$

ج)

$$E(X) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}(-3+5) = 1$$

د)

$$V(X) = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^{2} = \frac{1}{12}(5+3)^{2} = 5/33$$

تمرین

۱. این توزیع یکنواخت را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha}, & \alpha < x < \beta \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اگر $\alpha = -۱۰$ و $E(X) = ۲$ باشد، این مقادیر را محاسبه کنید.

الف) مقدار β

ب) $V(X)$

ج) احتمال اینکه متغیر تصادفی X مقداری بین ۴ و ۵- را انتخاب کند.

د) احتمال اینکه X مقداری بزرگ‌تر از ۵- را انتخاب کند.

۲. سود مورد انتظار شرکتی دارای توزیع یکنواخت با میانگین ۴۰ میلیون ریال و واریانس ۱۲۰ میلیون ریال است. احتمال اینکه سود آن بیشتر از ۴/۲۵ میلیون ریال باشد، چقدر است؟

۳. این چگالی احتمال یکنواخت را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۶}, & -۲ < x < ۴ \\ ۰, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) نمودار تابع چگالی را رسم کنید.

ب) تابع توزیع را پیدا کنید.

ج) نمودار تابع توزیع را رسم کنید.

۴-۷ توزیع نمایی

اگر تعداد موفقیتها یا ورودیها دارای توزیع پواسون باشد، زمان بین موفقیتها یا ورودیهای متوالی دارای «توزیعی نمایی منفی» است. چون زمان پیوسته است، توزیع نمایی منفی نیز توزیعی پیوسته است (از این به بعد توزیع نمایی منفی را به اختصار توزیع نمایی می‌نامیم).

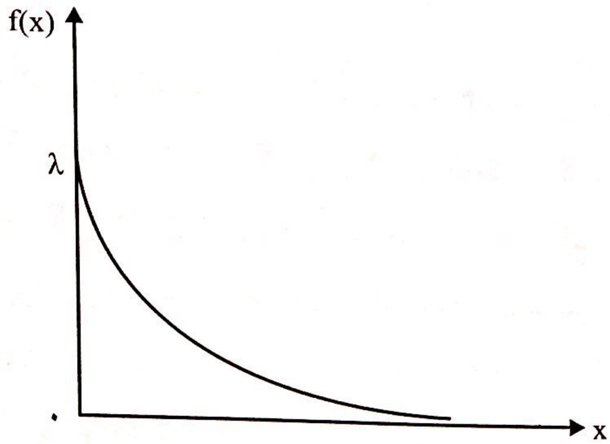
تابع چگالی توزیع نمایی به این صورت است:

$$\text{توزیع نمایی} \quad \boxed{f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > ۰ \\ ۰, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}} \qquad (۷\text{-}۱۳)$$

در این تابع، λ پارامتر توزیع است و متوسط تعداد موفقیتها یا ورودیها را در واحد

زمان (که λ در آن تعریف شده) نشان می‌دهد.

نمودار تابع چگالی توزیع نمایی در شکل ۲ـ۷ رسم شده است.



شکل ۲ـ۷ نمودار تابع چگالی توزیع نمایی

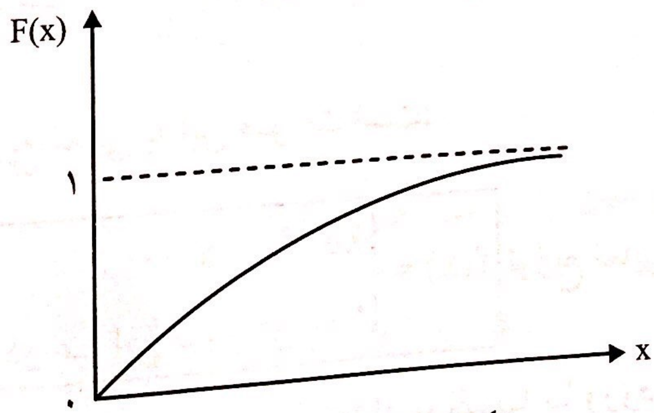
توجه کنید که تابع چگالی همواره نزولی است. تابع توزیع این متغیر تصادفی به این صورت محاسبه می‌شود:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{۰}^{x} \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_{۰}^{x} = ۱ - e^{-\lambda x} \qquad (۷\text{ـ}۱۴)$$

به همین ترتیب، احتمال اینکه زمان بین دو موفقیت یا دو ورود بیش از x طول بکشد، برابر است با:

$$P(X > x) = ۱ - F(x) = e^{-\lambda x} \qquad (۷\text{ـ}۱۵)$$

نمودار تابع توزیع نمایی، F(x)، آن در شکل ۳ـ۷ رسم شده است.



شکل ۳ـ۷ نمودار تابع توزیع نمایی

میانگین و واریانس توزیع نمایی به این صورت محاسبه می‌شود:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx = \int_{\cdot}^{+\infty} (x)\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{۱}{\lambda} \qquad (۷\text{-}۱۶)$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^{۲} f(x)dx = \int_{\cdot}^{+\infty} (x - \frac{۱}{\lambda})^{۲} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{۱}{\lambda^{۲}} \qquad (۷\text{-}۱۷)$$

مثال ۱۰-۷ به مدیری به طور متوسط در هر ساعت ۵ بار تلفن با توزیع پواسون، زده می‌شود. می‌خواهیم این مقادیر را محاسبه کنیم:

الف) به طور متوسط فاصلهٔ زمانی بین دو تلفن زدن متوالی

ب) احتمال اینکه فاصلهٔ زمانی بین دو تلفن زدن متوالی کمتر از ۱۰ دقیقه طول بکشد.

ج) احتمال اینکه فاصلهٔ دو تلفن متوالی بیش از ۳ دقیقه طول بکشد.

از آنجا که تعداد تلفنها دارای توزیع پواسون است، فاصلهٔ زمانی بین دو تلفن زدن متوالی دارای توزیع نمایی است و به طور متوسط ۵ تلفن در هر ساعت زده می‌شود، فاصلهٔ بین دو تلفن زدن متوالی $\frac{۱}{۵}$ ساعت است یعنی:

$$E(X) = \frac{۱}{\lambda} = \frac{۱}{۵} = ۰/۲$$

ب) چون واحد زمانی ساعت است، ابتدا ۱۰ دقیقه را به ساعت تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{۱۰}{۶۰} = \frac{۱}{۶} = ۰/۱۶۷$$

بنابراین:

$$P(X \leq ۰/۱۶۷) = F(۰/۱۶۷) = ۱ - e^{-\lambda x} = ۱ - e^{-۵(۰/۱۶۷)} = ۱ - e^{۰/۸۳۳} = ۰/۵۶۵$$

ج) ابتدا ۳ دقیقه را به ساعت تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{۳}{۶۰} = \frac{۱}{۲۰} = ۰/۰۵$$

بنابراین:

$$P(X > ۰/۰۵) = ۱ - F(۰/۰۵) = e^{-\lambda x} = e^{-۵(۰/۰۵)} = ۰/۷۷۹$$

مثال ۷-۱۱ به طور متوسط یک روز در میان یک کشتی با توزیع نمایی به اسکله‌ای می‌رسد. اگر امروز یک کشتی رسیده باشد، می‌خواهیم بدانیم احتمال اینکه ۴ روز طول بکشد تا کشتی دیگری برسد، چقدر است.

در این مثال $\lambda = \frac{۱}{۲}$ است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$P(X > ۴) = ۱ - F(۴) = e^{-\lambda x} = e^{-\frac{۱}{۲}(۴)} = e^{-۲} = ۰/۱۳۵$$

تمرین

۱. مدت تعمیر ماشینی براساس توزیع نمایی با میانگین ۱/۵ ساعت است.

الف) احتمال اینکه مدت تعمیر کمتر از یک ساعت طول بکشد، چقدر است؟

ب) احتمال اینکه مدت تعمیر بین ۱ تا ۲ ساعت طول بکشد، چقدر است؟

۲. تعداد اشتباهات یک حروف‌چین در حروف‌چینی یک متن ۵۰۰ سطری ۲ عدد با توزیع پواسون است. احتمال اینکه در ۱۰۰ سطر اول اشتباهی نباشد، چقدر است؟

۳. به طور متوسط هر ۰/۵ دقیقه ۱/۵ مشتری با توزیع پواسون به گیشهٔ پرداخت بانکی مراجعه می کند. احتمال اینکه اولین مشتری بعد از ۲ دقیقه وارد شود، چقدر است؟

۷-۵ خلاصه

همان‌طور که ذکر شد، اگر متغیر تصادفی پیوسته باشد، تابع معرف این متغیر، مشروط بر آنکه سطح زیر منحنی برابر یک باشد، تابع چگالی احتمال نامیده می‌شود. در این فصل نحوهٔ محاسبهٔ احتمال در یک توزیع پیوسته، میانگین و واریانس متغیر تصادفی پیوسته بیان شد.

از بین توزیعهای رایج پیوسته، توزیعهای یکنواخت و نمایی با تأکید بر شرایط استفاده از هر کدام مطرح شدند و مثالهایی در مورد کاربرد آنها ذکر شد ولی

آشنایی با مهم‌ترین توزیع پیوسته، یعنی توزیع نرمال، با توجه به اهمیت آن، به فصل بعد موکول شد.

۶ـ۷ سؤالات و مسائل

سؤالات دوگزینه‌ای

۱. مساحت زیر منحنی تابع چگالی احتمال برابر یک است. ص□ غ□

۲. احتمال اینکه متغیر تصادفی پیوسته‌ای دقیقاً مقدار مشخصی را بگیرد، بزرگ‌تر از صفر است. ص□ غ□

۳. همواره برای هر متغیر پیوسته‌ای همچون X رابطه $P(X<x)=P(X\le x)$ برقرار است. ص□ غ□

۴. در توابع پیوسته، احتمال اینکه متغیر X مقداری بین a و b $(a\le b)$ را انتخاب کند، برابر است با $\int_a^b f(x)dx$. ص□ غ□

۵. اگر $F(x)$ تابع توزیع باشد، همواره رابطه $P(a\le X\le b)=F(b)-F(a)$ برقرار است. ص□ غ□

۶. میانگین (امید ریاضی) متغیر تصادفی پیوسته X برابر است با $\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx$. ص□ غ□

۷. اگر α و β فاصله‌ای باشند که متغیر پیوسته X با چگالی یکنواخت مقدار خود را در آن فاصله انتخاب کند، آنگاه میانگین (امید ریاضی) متغیر X برابر است با $\frac{\alpha+\beta}{۲}$. ص□ غ□

۸. اگر تعداد موفقیتها (ورودیها) دارای توزیع پواسون باشد، زمان بین موفقیتهای متوالی دارای توزیع یکنواخت است. ص□ غ□

۹. تابع چگالی احتمال توزیع نمایی به این صورت است:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>۰\\ ۰, & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

ص□ غ□

۱۰. اگر λ پارامتر توزیع نمایی باشد، واریانس توزیع نمایی برابر است با $(\frac{1}{\lambda})^2$.

ص□ غ□

سؤالات چهارگزینه‌ای

۱۱. به ازای چه مقداری از K این تابع می‌تواند تابع چگالی احتمال باشد؟

$$f(x)=\begin{cases} Kx^2, & 0<x<4 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) $\frac{1}{4}$ ج) $\frac{3}{64}$

ب) $\frac{3}{16}$ د) $\frac{1}{16}$

۱۲. اگر متغیر پیوسته X تنها مقادیر غیرمنفی را با تابع چگالی احتمال $f(x)=e^{-x}$ اختیار کند، احتمال اینکه X مقداری بین ۱ تا ۳ را بگیرد، برابر است با:

الف) ۰/۲۳۲۵ ج) ۰/۱۳۵۳

ب) ۰/۳۱۸۱ د) ۰/۴۶۵۰

۱۳. میانگین متغیر تصادفی X با این تابع‌چگالی چقدر است؟

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2}{3}, & -1<x<\frac{1}{2} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) $\frac{3}{4}$ ج) $-\frac{3}{4}$

ب) $\frac{1}{4}$ د) $-\frac{1}{4}$

۱۴. واریانس متغیر تصادفی X در سؤال ۱۳ چقدر است؟

الف) $\frac{1}{16}$ ج) $\frac{9}{4}$

ب) $\frac{3}{16}$ د) $\frac{4}{9}$

۱۵. اگر $P(-2\le X\le 8)=0/71$ و $F(-2)=0/17$ باشد، $F(8)$ با کدام‌یک از این موارد برابر است؟

مسائل

۲۱. تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به این صورت است:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{K}{\sqrt{x}}, & ۰<x<۹\\ ۰, & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

این مقادیر را محاسبه کنید:

الف) مقدار K

ب) $P(۱<X<۴)$

ج) امید ریاضی X

۲۲. تابع توزیع متغیر تصادفی X به این صورت است:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۱۰}, & ۵<x<۱۵\\ ۰, & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

این مقادیر را محاسبه کنید:

الف) $P(۰\le X\le ۱۰)$

ب) امید ریاضی و واریانس X

۲۳. این تابع چگالی را که به چگالی مثلثی معروف است در نظر بگیرید:

$$f(x)=\begin{cases}C(x-۱), & ۱<x<۲\\ -\frac{۱}{۲}C(x-۴), & ۲\le x<۴\\ ۰, & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

الف) مقدار C را پیدا کنید.

ب) مقدار $P(۱\le X\le ۳)$

ج) تابع توزیع X را پیدا کنید.

د) میانگین و واریانس X را پیدا کنید.

ه) نمودار چگالی و تابع توزیع را در شکلی واحد رسم کنید.

۲۴. این چگالی یکنواخت را در نظر بگیرید و امید ریاضی و واریانس را حساب کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۴}, & -۲<x<۲\\ ۰, & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

۲۵. این چگالی نمایی را در نظر بگیرید:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}e^{-x/۲}, & x>۰\\ ۰, & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

الف) تابع توزیع X را به دست آورید.

ب) احتمال اینکه X مقداری بین $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۳}{۲}$ را اختیار کند چقدر است؟

ج) میانگین و واریانس X چقدر است؟

۲۶. مشخص شده است که تعداد خرابیهای ماشینی دارای توزیع پواسون با میانگین ۳ خرابی در ماه است (هر ماه را ۳۰ روز در نظر بگیرید).

الف) متوسط بین دو خرابی چند روز است؟

ب) احتمال اینکه در ۱۰ روز اول پس از سرویس، ماشین خراب شود چقدر است؟

۲۷. متوسط عمر مفید نوعی تایر اتومبیل دارای توزیع نمایی با ۷۵ هزار کیلومتر است. این احتمالات را محاسبه کنید:

الف) بین ۲۰ تا ۶۰ هزار کیلومتر بتوان با آن طی کرد.

ب) حداکثر ۵۰ هزار کیلومتر بتوان با آن طی کرد.

۲۸. تعداد دقایقی که ممکن است پروازی زودتر یا دیرتر انجام شود، متغیری تصادفی است که چگالی آن به این صورت است:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲۸۸}(۳۶-x^{۲}), & -۶<x<۶\\ ۰, & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

در این رابطه، مقادیر منفی، معرف زود انجام شدن پرواز و مقادیر مثبت، معرف تأخیر در پرواز است. این احتمالات را در مورد یکی از این پروازها محاسبه کنید:

الف) حداقل ۲ دقیقه زود انجام شود.

ب) حداقل یک دقیقه دیر انجام شود.

ج) مدتی از یک تا سه دقیقه زود انجام شود.

د) درست ۵ دقیقه دیر صورت گیرد.

۲۹. تخمین زده می‌شود که میانگین زمان منتهی به خرابی یک لامپ تلویزیون طبق توزیع نمایی ۳ سال است. شرکتی این لامپها را در طول اولین سال استفاده بیمه می کند. برای چند درصد از بیمه‌نامه‌ها خسارت خواهد پرداخت؟

۳۰. یکی از خاصیتهای جالب و منحصر به فرد توزیع نمایی خاصیت بی‌حافظه بودن است؛ یعنی $P(X > x + S / X > x) = P(X > S)$، برای مثال، اگر لامپی دارای توزیع نمایی برای زمان منتهی به خرابی آن باشد و در زمان x ببینیم هنوز در حال کار کردن است، در این صورت عمر باقی‌مانده نیز دارای همان توزیع نمایی است که لامپ در زمان صفر داشته است. با این توضیح اگر عمر ترانزیستوری دارای توزیع نمایی با میانگین ۱۰ هزار ساعت باشد و این ترانزیستور پیش از این ۱۰ هزار ساعت کار کرده باشد، احتمال اینکه بعد از ۱۵ هزار ساعت خراب شود، چقدر است؟

پاسخنامه سؤالات

۱) ص	۲) غ	۳) ص	۴) ص	۵) ص	۶) ص
۷) ص	۸) غ	۹) ص	۱۰) ص	۱۱) ج	۱۲) ب
۱۳) د	۱۴) ب	۱۵) الف	۱۶) ج	۱۷) د	۱۸) ب
۱۹) ب	۲۰) د				

فصل هشتم

توزیع نرمال

۸ـ۱ توزیع نرمال چیست؟

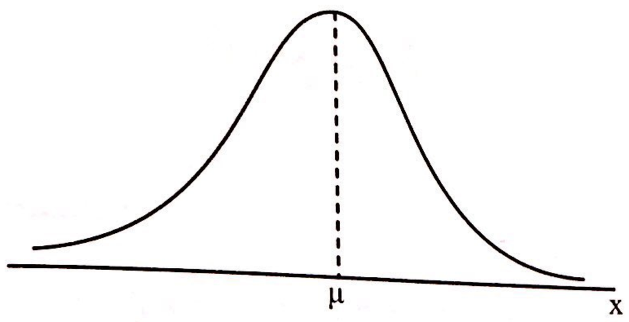
مهم‌ترین توزیع پیوسته، توزیع نرمال است و بدین جهت مطالب این فصل تنها به این توزیع اختصاص داده می‌شود. توزیع نرمال، توزیعی زنگی شکل است که اولین‌بار در قرن هجدهم مورد بررسی و مطالعه قرار گرفت. لاپلاس و دوموآور نقش چشمگیری در کشف آن داشتند و گوس[1] توزیع نرمال را به عنوان توزیع احتمال خطای اندازه‌گیریها با روش ریاضی به دست آورد. زمانی معتقد بودند که پدیده‌های واقعی باید دارای این توزیع باشد وگرنه در داده‌ها و روش گردآوری آن باید تردید کرد؛ به همین دلیل آن را توزیع نرمال نام نهادند. به تدریج با بررسیهای بیشتر نادرستی این فکر مشخص شد و توزیعهای دیگری که در فصل پیش بعضی از آنها را بررسی کردیم، مطرح شد، با این حال این توزیع نقشی اساسی در آمار دارد و دارای کاربردهای وسیعی است؛ چرا که خیلی از پدیده‌های طبیعی دارای این توزیع هستند و همچنین شکل حدی بسیاری از توزیعهای دیگر نیز نرمال است.

توزیع نرمال را می‌توان چنین تعریف کرد: «متغیر تصادفی پیوسته X با میانگین μ و انحراف معیار σ دارای توزیع نرمال است اگر تابع چگالی آن به این صورت باشد:

1. Gauss

توزیع نرمال $$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{1}{2}[(x-\mu)/\sigma]^2}}$$ (۸ـ۱)

در این رابطه ...۳/۱۴۱۵۹ = π و ...e = ۲/۷۱۸۲۸ است». شکل ۸ـ۱ نشان‌دهنده منحنی نرمال است.

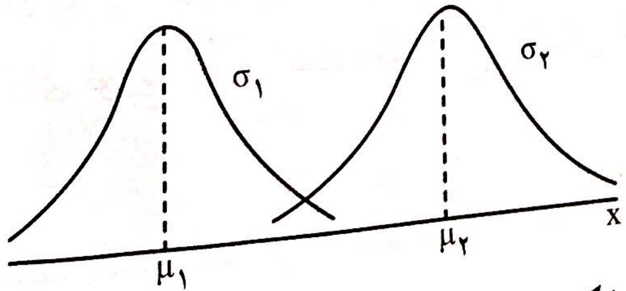


شکل ۸ـ۱ منحنی نرمال

به دلیل استفاده زیاد از این توزیع، از این به بعد متغیر تصادفی X را که دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ است به این صورت: $X \sim N(\mu,\sigma)$ نشان می‌دهیم و به این صورت می‌خوانیم: X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ است. دو پارامتر توزیع نرمال μ و σ است که با مشخص بودن آنها، توزیع به طور دقیق مشخص و منحنی آن قابل ترسیم می‌شود. حال به بررسی تأثیر این دو پارامتر روی منحنی آن می‌پردازیم.

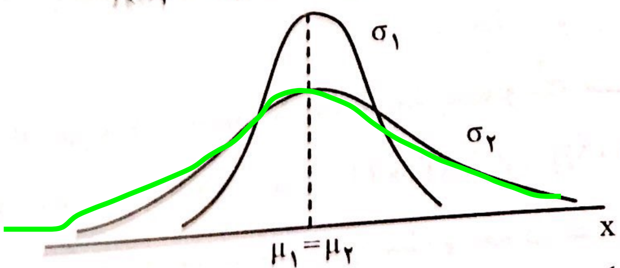
۸ـ۱ـ۱ تأثیر میانگین و انحراف معیار روی منحنی نرمال

شکل ۸ـ۲ دو منحنی نرمال را نشان می‌دهد که انحراف معیارشان برابر $(\sigma_1=\sigma_2)$ ولی میانگین اولی کوچک‌تر از میانگین دومی است $(\mu_1<\mu_2)$.



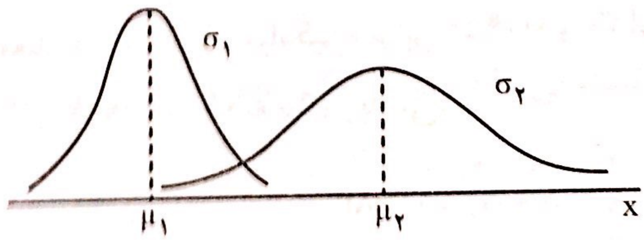
شکل ۸ـ۲ منحنیهای نرمال با $\sigma_1=\sigma_2$ و $\mu_1<\mu_2$

شکل ۳ـ۸ دو منحنی نرمال را نشان می‌دهد که میانگینشان یکسان ($\mu_1 = \mu_2$) ولی انحراف معیار دومی بزرگ‌تر از اولی است ($\sigma_2 > \sigma_1$).



شکل ۳ـ۸ منحنیهای نرمال با $\mu_1 = \mu_2$ و $\sigma_2 > \sigma_1$

شکل ۴ـ۸ دو منحنی نرمال را نشان می‌دهد که نه میانگینشان با هم برابر است و نه انحراف معیارشان ($\mu_1 < \mu_2$ و $\sigma_1 < \sigma_2$).



شکل ۴ـ۸ منحنیهای نرمال با $\mu_1 < \mu_2$ و $\sigma_1 < \sigma_2$

بنابراین هر چقدر میانگین افزایش یابد، منحنی به سمت راست انتقال می‌یابد و هر چقدر انحراف معیار افزایش یابد منحنی کوتاه‌تر می‌شود.

۲-۱-۸ خصوصیات توزیع نرمال

توزیع نرمال دارای خصوصیات مهمی به شرح زیر است (توجه داشته باشید که دو خصوصیت اول مربوط به تمام چگالیهای احتمال است).

۱. سطح زیر منحنی بالای محور X ها برابر ۱ است؛ به بیان دیگر $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ است.

۲. به ازای تمام مقادیر X، مقدار f(x) بزرگ‌تر یا مساوی صفر است؛ به بیان دیگر به ازای تمام X ها، $f(x) \geq 0$ خواهد بود.

۳. حداکثر مقدار تابع در $X = \mu$ حاصل می‌شود؛ به بیان دیگر در $X = \mu$ اولاً

$f'(x)=0$ ثانیاً $f''(x)<0$ خواهد بود.

۴. تابع حول میانگین، μ، متقارن است؛ به بیان دیگر $f(x+\mu)=f(-x+\mu)$ است.

۵. امید ریاضی و واریانس X به ترتیب μ و σ^2 است؛ به بیان دیگر $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx=\mu$ و $V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx=\sigma^2$ است.

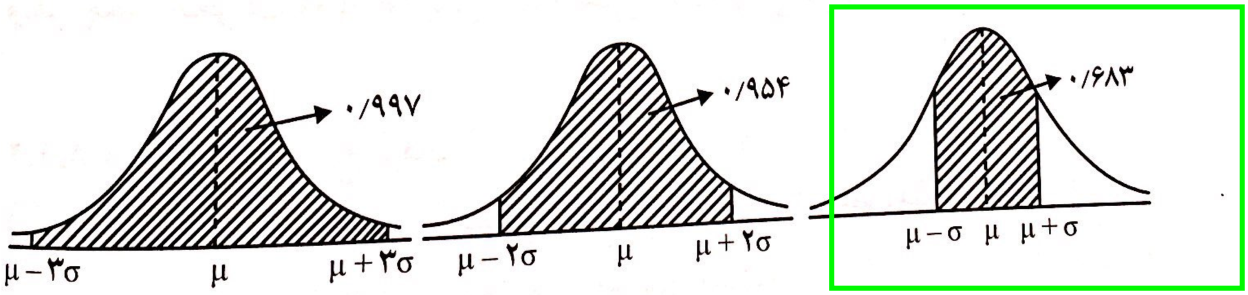
۶. با دورتر شدن از μ، چه در سمت راست و چه در سمت چپ، منحنی به محور Xها نزدیک‌تر می‌شود، ولی هیچ‌گاه به صفر نمی‌رسد؛ به بیان دیگر $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ است.

۷. در این توزیع میانگین، میانه و مد با هم برابرند.

۸ احتمال فاصله‌ای به اندازه «۱ انحراف معیار در هر طرف میانگین»، برابر ۰/۶۸۳، «۲ انحراف معیار در هر طرف میانگین» برابر ۰/۹۵۴؛ و «۳ انحراف معیار در هر طرف میانگین»، برابر ۰/۹۹۷ است؛ به بیان ریاضی:

$$P(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma)=0/683$$
$$P(\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma)=0/954$$
$$P(\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma)=0/997$$

این مفاهیم در شکل ۸ـ۵ نمایش داده می‌شود.



شکل ۸ـ۵ احتمال فاصله‌ای به اندازه ۱ انحراف معیار، ۲ انحراف معیار و ۳ انحراف معیار در هر دو طرف میانگین

پیش از این گفتیم که منحنی به ازای هیچ مقداری از X به صفر نمی‌رسد، ولی از آنجا که مساحت سطوح پایانی خارج از بازه $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ اندک است، معمولاً نمایش هندسی آن در دو سر این نقاط پایان می‌پذیرد.

۳-۱-۸ توزیع نرمال استاندارد

تابع چگالی احتمال نرمال به گونه‌ای است که محاسبه احتمال مورد نظر از آن، به این دلیل که نمی‌توان از این تابع به سادگی انتگرال گرفت، کار مشکلی است؛ بنابراین جدولی تهیه شده که فقط برای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس یک قابل استفاده است. حال اگر بتوانیم به جای متغیر $X \sim N(\mu,\sigma)$ از متغیر نرمالی استفاده می‌کنیم که میانگین آن صفر و واریانس آن یک باشد، می‌توانیم برای پیدا کردن احتمال مورد نظر به جدول ۳ پیوست مراجعه کنیم.

گفتیم که تابع چگالی منحنی نرمال چنین است:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}[(x-\mu)/\sigma]^2} \quad \text{برای} \quad -\infty < x < \infty$$

در این تابع، متغیر تصادفی X دارای میانگین μ و واریانس σ^2 است. حال اگر متغیری همچون Z را به این صورت تعریف کنیم؛ $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$؛ آنگاه تابع چگالی به این صورت خلاصه می‌شود:

$$\boxed{\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}} \quad \text{توزیع نرمال استاندارد} \qquad (8\text{-}2)$$

این متغیر دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس یک به شرح ذیل است:

$$E(Z) = E(\frac{X-\mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma}E(X-\mu) = \frac{1}{\sigma}[E(X)-E(\mu)] = \frac{1}{\sigma}(\mu-\mu) = 0$$

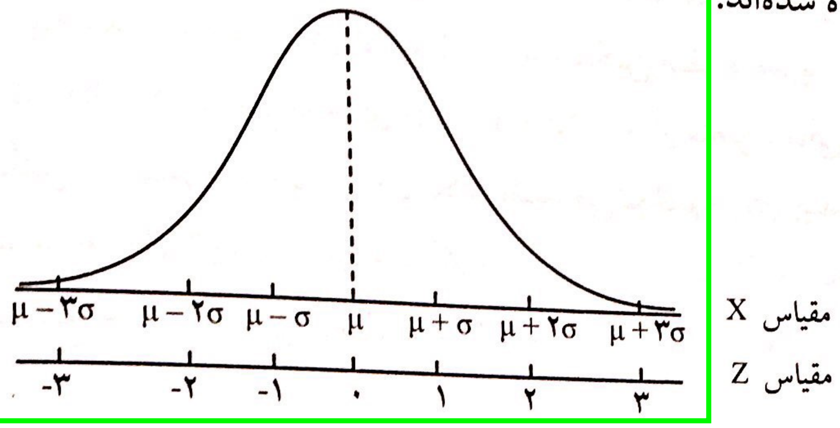
$$V(Z) = V(\frac{X-\mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma^2}V(X-\mu) = \frac{1}{\sigma^2}[V(X)+V(\mu)] = \frac{1}{\sigma^2}(\sigma^2+0) = 1$$

به این توزیع، توزیع نرمال استاندارد می گوییم؛ بنابراین می‌توان گفت هر توزیع متغیر تصادفی نرمالی همانند Z که دارای میانگین صفر و واریانس یک باشد، توزیع نرمال استاندارد است که به زبان ریاضی چنین نوشته می‌شود: $Z \sim N(0,1)$.

با داشتن میانگین و واریانس هر متغیری - در صورتی که توزیع آن نرمال باشد - می‌توان ابتدا آن را به توزیع نرمال استاندارد تبدیل کرد و سپس با مراجعه به جدول

پیوست احتمال آن را پیدا کرد.

با تبدیل متغیر تصادفی X به Z مقیاس تغییر می‌کند. در شکل ۶ـ۸ این دو مقیاس نشان داده شده‌اند.



شکل ۶ـ۸ مقایسه مقیاس متغیر تصادفی نرمال X با متغیر تصادفی نرمال استاندارد Z

۲ـ۸ استفاده مستقیم از جدول توزیع نرمال استاندارد

در استفاده مستقیم از جدول توزیع نرمال استاندارد، هدف پیدا کردن احتمال پیشامدی مشخص است. در این گونه استفاده، ابتدا متغیر تصادفی نرمال را به متغیر تصادفی نرمال استاندارد تبدیل و سپس احتمال مورد نظر را پیدا می‌کنیم.

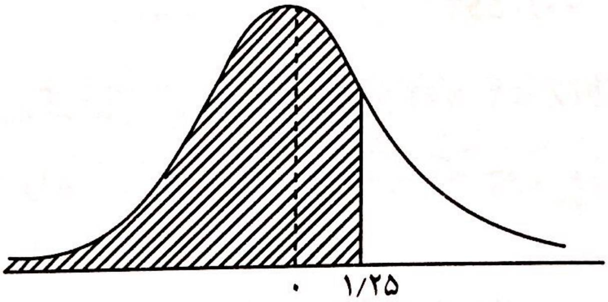
جدول ۳ پیوست، احتمال تجمعی را (احتمال اینکه متغیر نرمال استاندارد مقداری بین ∞- تا Z را بگیرد) نشان می‌دهد. شایان توجه است که احتمال اینکه متغیر تصادفی Z مقداری کمتر از ۳/۵۹- را بگیرد، نزدیک به صفر است (۰/۰۰۰۲)؛ از این رو مقادیر کمتر از ۳/۵۹- در آن آورده نشده و احتمال اینکه مقداری کمتر از ۳/۵۹+ را بگیرد، نزدیک به یک است (۰/۹۹۹۸)؛ بنابراین مقادیر بزرگ‌تر از ۳/۵۹ نیز در آن آورده نشده است. متغیر تصادفی نرمال استاندارد Z، متغیری پیوسته است و بین این دو مقدار (۳/۵۹+ و ۳/۵۹-) بی‌نهایت عدد حقیقی وجود دارد که نمایش همه آنها امکان‌پذیر نیست؛ بنابراین واحد افزایش آن یک‌صدم است یعنی در جدول، احتمال مقادیر کوچک‌تر از ۳/۵۹-، ۳/۵۸-، ...، ۳/۵۹ آورده شده است.

مثال ۱ـ۸ می‌خواهیم مقادیر هر یک از این احتمالات را پیدا کنیم: الف)

$P(Z \leq ۱/۲۵)$، ب) $P(Z \leq -۰/۴۰)$، ج) $P(Z \geq ۱/۵۹)$، د) $P(-۱/۱۰ < Z < ۲/۷۶)$

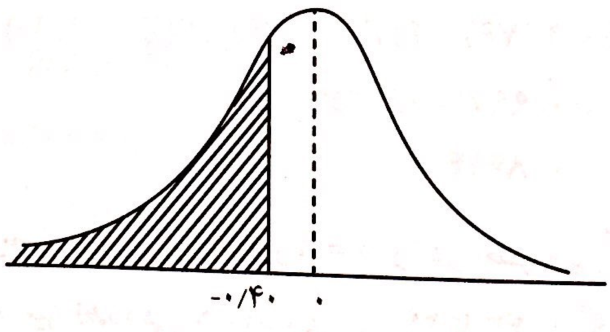
در محاسبه هر احتمالی در توزیع نرمال، بهتر است منحنی نرمالی برای آن رسم کنیم و سطح مورد نظر را به صورت تقریبی نشان دهیم. این کار، پیدا کردن احتمال مورد نظر را ساده‌تر و به درک بهتر مسئله کمک می‌کند.

الف) هدف پیدا کردن سطح هاشورخورده است.



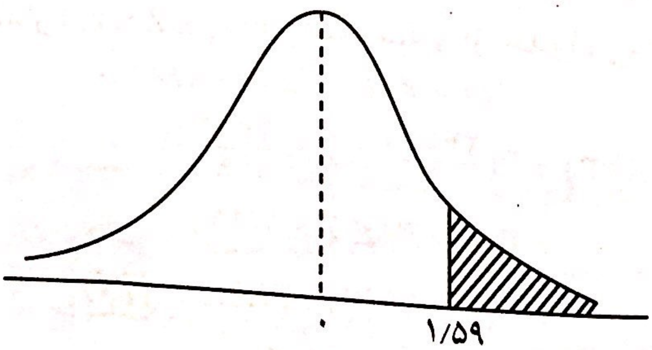
با مراجعه به جدول ۳ پیوست، در ستون اول از سمت چپ مقدار ۱/۲ را پیدا می‌کنیم و در تقاطع این سطر با ستونی که بالای آن مقدار ۰/۰۵ نوشته شده است، احتمال مورد نظر را پیدا می‌کنیم (مقدار ۰/۸۹۴۴)؛ بنابراین $P(Z \leq ۱/۲۵) = ۰/۸۹۴۴$ خواهد بود.

ب)



$P(Z \leqslant -۰/۴۰) = ۰/۳۴۴۶$

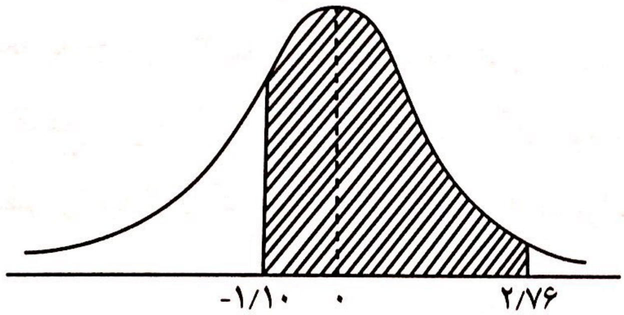
ج)



جدول نرمال استاندارد، احتمال مقادیر کوچک‌تر یا مساوی Z را نشان می‌دهد. برای محاسبه احتمال مقادیر بزرگ‌تر یا مساوی Z می‌توان از قانون متمم استفاده کرد؛ یعنی:

$$
\begin{aligned}
P(Z \geq ۱/۵۹) &= ۱ - P(Z \leq ۱/۵۹) \\
&= ۱ - ۰/۹۴۴۱ \\
&= ۰/۰۵۵۹
\end{aligned}
$$

د) برای محاسبه احتمال مورد نظر، می‌توان $P(Z \leq ۲/۷۶)$ را محاسبه و سپس مقدار $P(Z \leq -۱/۱۰)$ را از آن کم کرد. توجه کنید که چون توزیع نرمال Z، پیوسته است $P(Z \leq ۲/۷۶)$ برابر با $P(Z < ۲/۷۶)$ است.



$$
\begin{aligned}
P(-۱/۱۰ < Z < ۲/۷۶) &= P(Z < ۲/۷۶) - P(Z < -۱/۱۰) \\
&= ۰/۹۹۷۱ - ۰/۱۳۵۷ \\
&= ۰/۸۶۱۴
\end{aligned}
$$

مثال ۲ـ۸ توزیع نرمالی با $\mu = ۳۰$ و $\sigma = ۹$ را در نظر می‌گیریم، می‌خواهیم بدانیم احتمال اینکه متغیر تصادفی X مقداری بین ۲۴ تا ۴۳ را بگیرد، چقدر است.

با تبدیل متغیر X به Z (با استفاده از رابطه $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$) می‌توان به جای $P(x_۱ \leq X \leq x_۲)$ مقدار $P(z_۱ \leq Z \leq z_۲)$ را محاسبه و از جدول پیدا کرد؛ یعنی:

$$
\begin{aligned}
P(۲۴ \leq X \leq ۴۳) &= P\left(\frac{۲۴-۳۰}{۹} \leq Z \leq \frac{۴۳-۳۰}{۹}\right) \\
&= P(-۰/۶۷ \leq Z \leq ۱/۴۴) \\
&= P(Z \leq ۱/۴۴) - P(Z \leq -۰/۶۷) \\
&= ۰/۹۲۵۱ - ۰/۲۵۱۴ \\
&= ۰/۶۷۳۷
\end{aligned}
$$

مثال ۳ـ۸ دستگاه پرکننده شیشه‌های آبلیمو طوری تنظیم شده است که فقط ۳۳۰ گرم آبلیمو را داخل هر شیشه بریزد، با وجود این میزان آبلیمویی که وارد هر شیشه می‌شود دارای توزیع نرمال با میانگین ۳۳۰ گرم و انحراف معیار ۵ گرم است. می‌خواهیم این احتمالات را محاسبه کنیم:

الف) شیشه‌ای بین ۳۲۲ تا ۳۲۸ گرم آبلیمو داشته باشد.

ب) شیشه‌ای بیش از ۳۳۵ گرم آبلیمو داشته باشد.

ج) دایره کنترل کیفیت، میزان آبلیموی ۷۰ شیشه را به صورت تصادفی وزن می‌کند. انتظار می‌رود چند شیشه بیش از ۳۳۵ گرم آبلیمو داشته باشد.

در این مثال $\mu = ۳۳۰$ و $\sigma = ۵$ است؛ بنابراین

الف)
$$\begin{aligned} P(۳۲۲ \le X \le ۳۲۸) &= P\left(\frac{۳۲۲-۳۳۰}{۵} \le Z \le \frac{۳۲۸-۳۳۰}{۵}\right) \\ &= P(-۱/۶ \le Z \le -۰/۴) \\ &= P(Z \le -۰/۴) - P(Z \le -۱/۶) \\ &= ۰/۳۴۴۶ - ۰/۰۵۴۸ \\ &= ۰/۲۸۹۸ \end{aligned}$$

ب)
$$\begin{aligned} P(X \ge ۳۳۵) &= P\left(Z \ge \frac{۳۳۵-۳۳۰}{۵}\right) \\ &= P(Z \ge ۱) \\ &= ۱ - P(Z \le ۱) \\ &= ۱ - ۰/۸۴۱۳ \\ &= ۰/۱۵۸۷ \end{aligned}$$

ج) تعداد شیشه‌هایی که انتظار می‌رود بیش از ۳۳۵ گرم آبلیمو داشته باشند:

$$۰/۱۵۸۷ \times ۷۰ = ۱۱/۱۰۹ \approx ۱۱$$

مثال ۴ـ۸ زمان لازم برای تعمیر یک ماشین برچسب‌زنی دارای توزیع نرمال با میانگین ۵۰ دقیقه و انحراف معیار ۲۰ دقیقه است. هزینه هر بار تعمیر ۵ هزار ریال است. اگر تعمیر این ماشین بیش از ۸۵ دقیقه طول بکشد، به علت توقف خط تولید، ضرری معادل ۱۰۰ هزار ریال به بار می‌آید؛ می‌خواهیم محاسبه کنیم امید ریاضی

هزینه هر بار خرابی این دستگاه چقدر است.

ابتدا باید محاسبه کنیم با چه احتمالی مدت تعمیر بیش از ۸۵ دقیقه طول می‌کشد؛ یعنی:

$$P(X \geq ۸۵) = P(Z \geq \frac{۸۵-۵۰}{۲۰})$$
$$= P(Z \geq ۱/۷۵)$$
$$= ۱ - P(Z \leq ۱/۷۵)$$
$$= ۱ - ۰/۹۵۹۹$$
$$= ۰/۰۴۰۱$$

پس شرکت با احتمال ۰/۰۴۰۱ هم هزینه تعمیر و هم هزینه توقف خط تولید و با احتمال ۰/۹۵۹۹ تنها هزینه تعمیر را خواهد داشت؛ بنابراین امید ریاضی هزینه هر تعمیر، $E(C)$، چنین خواهد بود:

$$E(C) = ۰/۹۵۹۹(۵۰۰۰) + ۰/۰۴۰۱(۵۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰) = ۹۰۱۰$$

تمرین

۱. اگر Z متغیر تصادفی نرمال استاندارد باشد، این احتمالات را با استفاده از جدول پیدا کنید.

الف) $P(Z \leq ۲/۰۶)$

ب) $P(Z > -۰/۲۵)$

ج) $P(-۱/۱۵ < Z \leq ۰/۵۹)$

د) $P(-۱/۹۶ \leq Z \leq ۱/۹۶)$

هـ) $P(۲ \leq Z \leq ۴/۲۵)$

۲. فرض کنید $X \sim N(۱۵,۳)$ است؛ هر یک از این احتمالات را پیدا کنید.

الف) $P(X < ۱۲/۵)$

ب) $P(X \geq ۱۸)$

ج) $P(۱۲/۵ \leq X < ۱۸)$

۳. دستگاه تراشی در هفته گذشته نوعی پیستون را با میانگین قطر خارجی ۱۱/۲ سانتی‌متر و واریانس ۰/۰۰۱۴ با توزیع نرمال، تراش داده است. محاسبه کنید قطر خارجی چند درصد از پیستونها:

الف) کمتر از ۱۱/۲۳۵۲ است.

ب) بیشتر از ۱۱/۲۳۵۲ است.

ج) بین ۱۱/۲۳۵۲ و ۱۱/۲۳۴۹ است.

۴. سن کارگران کارخانه‌ای دارای توزیع نرمال با میانگین ۳۵ سال و انحراف معیار ۱۲ سال است؛ یعنی: $X \sim N(۳۵,۱۲)$. اگر خط‌مشی شرکت بازنشسته‌کردن تمام افرادی باشد که بیش از ۵۵ سال سن دارند، چند درصد از کارگران بازنشسته می‌شوند؟

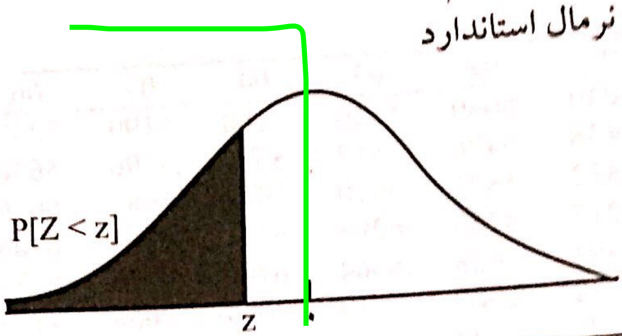
۵. مدیریت پرسنلی شرکتی برای تعدادی از متقاضیان استخدام آزمونی برگزار کرده است که حداقل نمره قبولی در آن ۷۵ است. مشخص شده است که میانگین نمرات متقاضیان ۶۳ با انحراف معیار ۱۵ است. محاسبه کنید چند درصد از متقاضیان پذیرفته می‌شوند.

۶. قطر یک بلبرینگ، متغیر تصادفی نرمال با میانگین ۷ سانتی‌متر و انحراف معیار ۰/۱ است. استاندارد فنی قطر این کالا عبارت است از $۶/۹۱ \leq X \leq ۷/۰۹$ و تولید یک بلبرینگ استاندارد ۱۲۵۰ ریال سود دارد. اگر قطر بلبرینگ تولیدی کمتر از ۶/۹۱ باشد غیرقابل استفاده است و ۱۰۵۰ ریال زیان دارد و در صورتی که قطر آن بیش از ۷/۰۹ باشد با انجام دادن کار اضافی و صرف هزینه‌ای معادل ۲۰۰ ریال می‌توان آن را به بلبرینگی تبدیل کرد که استاندارد باشد. سود مورد انتظار تولید هر بلبرینگ را حساب کنید.

۸-۳ استفاده معکوس از جدول توزیع نرمال استاندارد

در استفاده مستقیم از توزیع نرمال، ابتدا Z را مشخص و سپس احتمال آن را از جدول پیدا می کردیم، در استفاده معکوس، مقدار Z برای ما مشخص نیست و تنها

جدول ۳ احتمالهای نرمال استاندارد



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.5	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
-3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
-3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
-3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
-3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
-3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
-2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.392	.384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
-.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1694	.1867
-.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2297	.2266	2236	.2206	.2177	.2148
-.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-.3	.3821	.3783	.3745	.3707	3669	.3632	.3594	.3557	3520	.3483
-.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	3974	.3936	3897	3859
-.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
-.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

ادامه جدول ۳

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7175	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.9643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998