توزیع نرمال

۸ـ۱ توزیع نرمال چیست؟

مهم‌ترین توزیع پیوسته، توزیع نرمال است و بدین جهت مطالب این فصل تنها به این توزیع اختصاص داده می‌شود. توزیع نرمال، توزیعی زنگی شکل است که اولین‌بار در قرن هجدهم مورد بررسی و مطالعه قرار گرفت. لاپلاس و دوموآور نقش چشمگیری در کشف آن داشتند و گوس[1] توزیع نرمال را به عنوان توزیع احتمال خطای اندازه‌گیریها با روش ریاضی به دست آورد. زمانی معتقد بودند که پدیده‌های واقعی باید دارای این توزیع باشد وگرنه در داده‌ها و روش گردآوری آن باید تردید کرد؛ به همین دلیل آن را توزیع نرمال نام نهادند. به تدریج با بررسیهای بیشتر نادرستی این فکر مشخص شد و توزیعهای دیگری که در فصل پیش بعضی از آنها را بررسی کردیم، مطرح شد، با این حال این توزیع نقشی اساسی در آمار دارد و دارای کاربردهای وسیعی است؛ چرا که خیلی از پدیده‌های طبیعی دارای این توزیع هستند و همچنین شکل حدی بسیاری از توزیعهای دیگر نیز نرمال است.

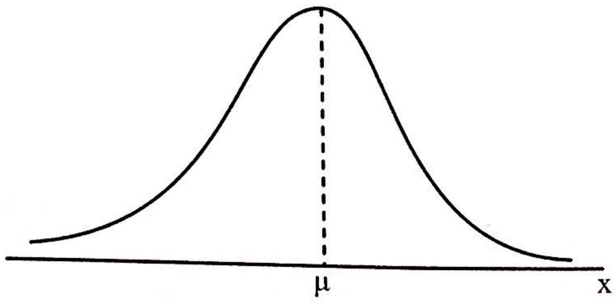
توزیع نرمال را می‌توان چنین تعریف کرد: «متغیر تصادفی پیوسته X با میانگین μ و انحراف معیار σ دارای توزیع نرمال است اگر تابع چگالی آن به این صورت باشد:

---

1. Gauss

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}[(x-\mu)/\sigma]^2} \quad \text{توزیع نرمال} \tag{۸ـ۱}$$

در این رابطه ...$\pi = 3/14159$ و ...$e = 2/71828$ است». شکل ۸ـ۱ نشان‌دهنده منحنی نرمال است.

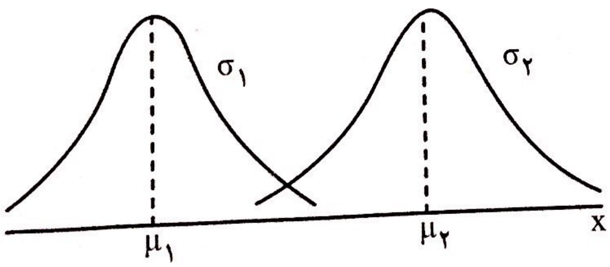


شکل ۸ـ۱ منحنی نرمال

به دلیل استفاده زیاد از این توزیع، از این به بعد متغیر تصادفی X را که دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ است به این صورت: $X \sim N(\mu,\sigma)$ نشان می‌دهیم و به این صورت می‌خوانیم: X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ است. دو پارامتر توزیع نرمال μ و σ است که با مشخص بودن آنها، توزیع به طور دقیق مشخص و منحنی آن قابل ترسیم می‌شود. حال به بررسی تأثیر این دو پارامتر روی منحنی آن می‌پردازیم.

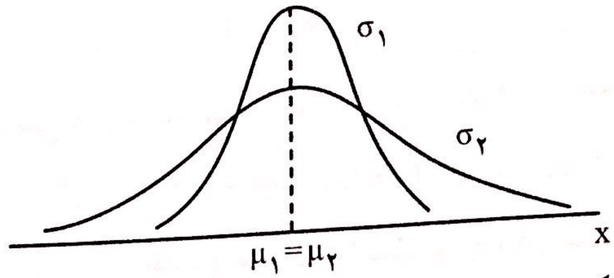
۸ـ۱ـ۱ تأثیر میانگین و انحراف معیار روی منحنی نرمال

شکل ۸ـ۲ دو منحنی نرمال را نشان می‌دهد که انحراف معیارشان برابر $(\sigma_1 = \sigma_2)$ ولی میانگین اولی کوچک‌تر از میانگین دومی است $(\mu_1 < \mu_2)$.



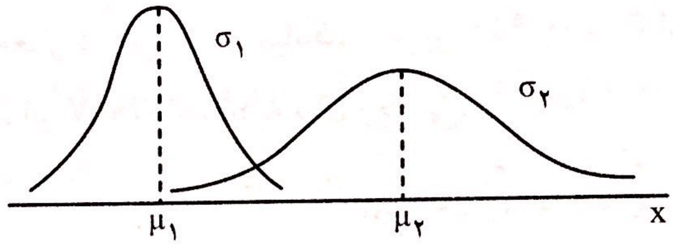
شکل ۸ـ۲ منحنیهای نرمال با $\sigma_1 = \sigma_2$ و $\mu_1 < \mu_2$

شکل ۸ـ۳ دو منحنی نرمال را نشان می‌دهد که میانگینشان یکسان ($\mu_1 = \mu_2$) ولی انحراف معیار دومی بزرگ‌تر از اولی است ($\sigma_2 > \sigma_1$).



شکل ۸ـ۳ منحنیهای نرمال با $\mu_2 = \mu_1$ و $\sigma_2 > \sigma_1$

شکل ۸ـ۴ دو منحنی نرمال را نشان می‌دهد که نه میانگینشان با هم برابر است و نه انحراف معیارشان ($\mu_1 < \mu_2$ و $\sigma_1 < \sigma_2$).



شکل ۸ـ۴ منحنیهای نرمال با $\mu_1 < \mu_2$ و $\sigma_1 < \sigma_2$

بنابراین هر چقدر میانگین افزایش یابد، منحنی به سمت راست انتقال می‌یابد و هر چقدر انحراف معیار افزایش یابد منحنی کوتاه‌تر می‌شود.

۸ـ۱ـ۲ خصوصیات توزیع نرمال

توزیع نرمال دارای خصوصیات مهمی به شرح زیر است (توجه داشته باشید که دو خصوصیت اول مربوط به تمام چگالیهای احتمال است).

۱. سطح زیر منحنی بالای محور X ها برابر ۱ است؛ به بیان دیگر $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ است.

۲. به ازای تمام مقادیر X، مقدار f(x) بزرگ‌تر یا مساوی صفر است؛ به بیان دیگر به ازای تمام X ها، $f(x) \geq 0$ خواهد بود.

۳. حداکثر مقدار تابع در $X = \mu$ حاصل می‌شود؛ به بیان دیگر در $X = \mu$ اولاً

$f'(x) = \cdot$ ثانیاً $f''(x) < \cdot$ خواهد بود.

۴. تابع حول میانگین، μ، متقارن است؛ به بیان دیگر $f(x+\mu) = f(-x+\mu)$ است.

۵. امید ریاضی و واریانس X به ترتیب μ و $\sigma^۲$ است؛ به بیان دیگر $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \mu$ و $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^۲ f(x)dx = \sigma^۲$ است.

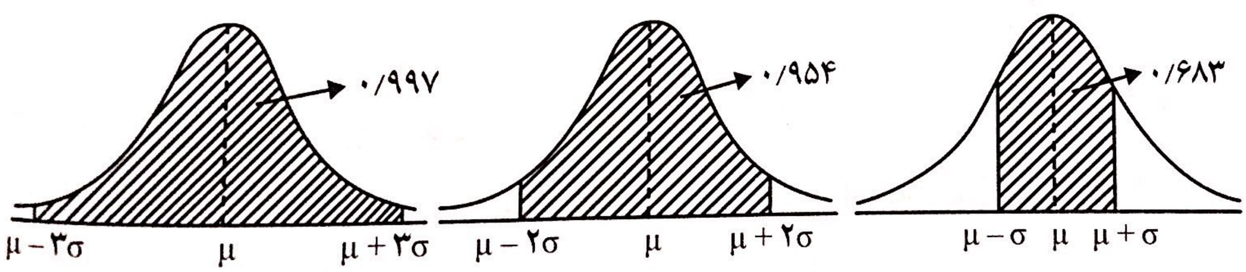
۶. با دورتر شدن از μ، چه در سمت راست و چه در سمت چپ، منحنی به محور X ها نزدیک‌تر می‌شود، ولی هیچ‌گاه به صفر نمی‌رسد؛ به بیان دیگر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \cdot$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \cdot$ است.

۷. در این توزیع میانگین، میانه و مد با هم برابرند.

۸. احتمال فاصله‌ای به اندازه «۱ انحراف معیار در هر طرف میانگین»، برابر ۰/۶۸۳، «۲ انحراف معیار در هر طرف میانگین» برابر ۰/۹۵۴؛ و «۳ انحراف معیار در هر طرف میانگین»، برابر ۰/۹۹۷ است؛ به بیان ریاضی:

$$P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) = \cdot/۶۸۳$$
$$P(\mu - ۲\sigma \le X \le \mu + ۲\sigma) = \cdot/۹۵۴$$
$$P(\mu - ۳\sigma \le X \le \mu + ۳\sigma) = \cdot/۹۹۷$$

این مفاهیم در شکل ۸ـ۵ نمایش داده می‌شود.



شکل ۸ـ۵ احتمال فاصله‌ای به اندازه ۱ انحراف معیار، ۲ انحراف معیار و ۳ انحراف معیار در هر دو طرف میانگین

پیش از این گفتیم که منحنی به ازای هیچ مقداری از X به صفر نمی‌رسد، ولی از آنجا که مساحت سطوح پایانی خارج از بازه $(\mu - ۳\sigma, \mu + ۳\sigma)$ اندک است، معمولاً نمایش هندسی آن در دو سر این نقاط پایان می‌پذیرد.

۳-۱-۸ توزیع نرمال استاندارد

تابع چگالی احتمال نرمال به گونه‌ای است که محاسبه احتمال مورد نظر از آن، به این دلیل که نمی‌توان از این تابع به سادگی انتگرال گرفت، کار مشکلی است؛ بنابراین جدولی تهیه شده که فقط برای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس یک قابل استفاده است. حال اگر بتوانیم به جای متغیر $X \sim N(\mu,\sigma)$ از متغیر نرمالی استفاده می‌کنیم که میانگین آن صفر و واریانس آن یک باشد، می‌توانیم برای پیدا کردن احتمال مورد نظر به جدول ۳ پیوست مراجعه کنیم.

گفتیم که تابع چگالی منحنی نرمال چنین است:

$$f(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\sigma^{۲}}} e^{-\frac{۱}{۲}[(x-\mu)/\sigma]^{۲}} \quad \text{برای} \quad -\infty < x < \infty$$

در این تابع، متغیر تصادفی X دارای میانگین μ و واریانس $\sigma^{۲}$ است. حال اگر متغیری همچون Z را به این صورت تعریف کنیم: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$؛ آنگاه تابع چگالی به این صورت خلاصه می‌شود:

$$\boxed{\varphi(z) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{۱}{۲}z^{۲}}} \quad \text{توزیع نرمال استاندارد} \qquad (۸\text{-}۲)$$

این متغیر دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس یک به شرح ذیل است:

$$E(Z) = E(\frac{X-\mu}{\sigma}) = \frac{۱}{\sigma}E(X-\mu) = \frac{۱}{\sigma}[E(X)-E(\mu)] = \frac{۱}{\sigma}(\mu-\mu) = ۰$$

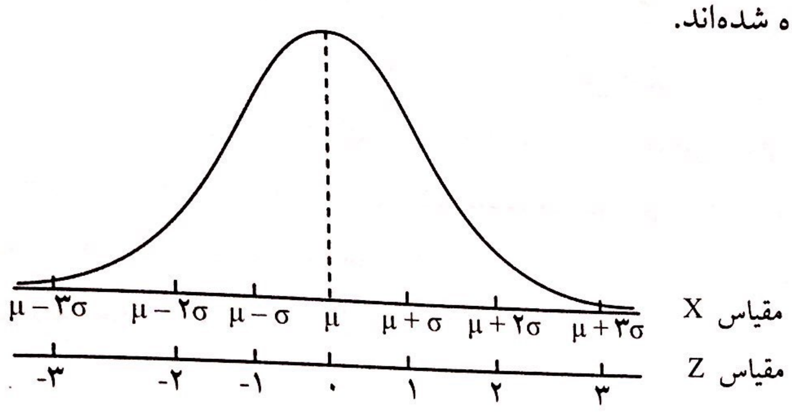
$$V(Z) = V(\frac{X-\mu}{\sigma}) = \frac{۱}{\sigma^{۲}}V(X-\mu) = \frac{۱}{\sigma^{۲}}[V(X)+V(\mu)] = \frac{۱}{\sigma^{۲}}(\sigma^{۲}+۰) = ۱$$

به این توزیع، توزیع نرمال استاندارد می گوییم؛ بنابراین می‌توان گفت هر توزیع متغیر تصادفی نرمالی همانند Z که دارای میانگین صفر و واریانس یک باشد، توزیع نرمال استاندارد است که به زبان ریاضی چنین نوشته می‌شود: $Z \sim N(۰,۱)$.

با داشتن میانگین و واریانس هر متغیری - در صورتی که توزیع آن نرمال باشد - می‌توان ابتدا آن را به توزیع نرمال استاندارد تبدیل کرد و سپس با مراجعه به جدول

پیوست احتمال آن را پیدا کرد.

با تبدیل متغیر تصادفی X به Z مقیاس تغییر می‌کند. در شکل ۸ـ۶ این دو مقیاس نشان داده شده‌اند.



شکل ۸ـ۶ مقایسه مقیاس متغیر تصادفی نرمال X با متغیر تصادفی نرمال استاندارد Z

۸ـ۲ استفاده مستقیم از جدول توزیع نرمال استاندارد

در استفاده مستقیم از جدول توزیع نرمال استاندارد، هدف پیدا کردن احتمال پیشامدی مشخص است. در این گونه استفاده، ابتدا متغیر تصادفی نرمال را به متغیر تصادفی نرمال استاندارد تبدیل و سپس احتمال مورد نظر را پیدا می‌کنیم.

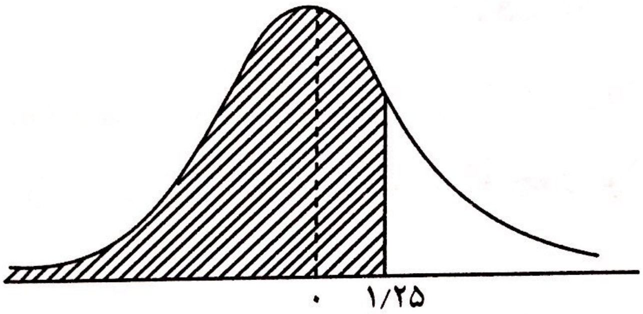
جدول ۳ پیوست، احتمال تجمعی را (احتمال اینکه متغیر نرمال استاندارد مقداری بین ∞- تا Z را بگیرد) نشان می‌دهد. شایان توجه است که احتمال اینکه متغیر تصادفی Z مقداری کمتر از ۳/۵۹- را بگیرد، نزدیک به صفر است (۰/۰۰۰۲)؛ از این رو مقادیر کمتر از ۳/۵۹- در آن آورده نشده و احتمال اینکه مقداری کمتر از ۳/۵۹+ را بگیرد، نزدیک به یک است (۰/۹۹۹۸)؛ بنابراین مقادیر بزرگ‌تر از ۳/۵۹ نیز در آن آورده نشده است. متغیر تصادفی نرمال استانداردِ Z، متغیری پیوسته است و بین این دو مقدار (۳/۵۹+ و ۳/۵۹-) بی‌نهایت عدد حقیقی وجود دارد که نمایش همه آنها امکان‌پذیر نیست؛ بنابراین واحد افزایش آن یک‌صدم است یعنی در جدول، احتمال مقادیر کوچک‌تر از ۳/۵۹-، ۳/۵۸-، ...، ۳/۵۹ آورده شده است.

مثال ۸ـ۱ می‌خواهیم مقادیر هر یک از این احتمالات را پیدا کنیم: الف)

$P(Z \le ۱/۲۵)$، ب) $P(Z \le -۰/۴۰)$، ج) $P(Z \ge ۱/۵۹)$، د) $P(-۱/۱۰ < Z < ۲/۷۶)$

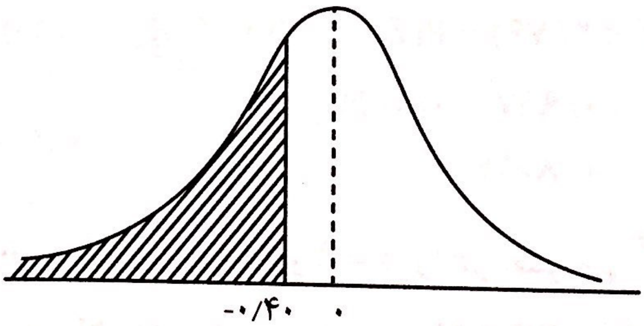
در محاسبه هر احتمالی در توزیع نرمال، بهتر است منحنی نرمالی برای آن رسم کنیم و سطح مورد نظر را به صورت تقریبی نشان دهیم. این کار، پیدا کردن احتمال مورد نظر را ساده‌تر و به درک بهتر مسئله کمک می‌کند.

الف) هدف پیدا کردن سطح هاشورخورده است.



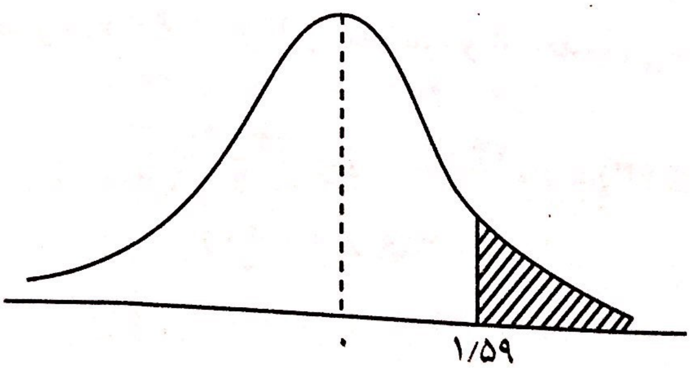
با مراجعه به جدول ۳ پیوست، در ستون اول از سمت چپ مقدار ۱/۲ را پیدا می‌کنیم و در تقاطع این سطر با ستونی که بالای آن مقدار ۰/۰۵ نوشته شده است، احتمال مورد نظر را پیدا می‌کنیم (مقدار ۰/۸۹۴۴)؛ بنابراین $P(Z \le ۱/۲۵) = ۰/۸۹۴۴$ خواهد بود.

ب)



$P(Z \leqslant -۰/۴۰) = ۰/۳۴۴۶$

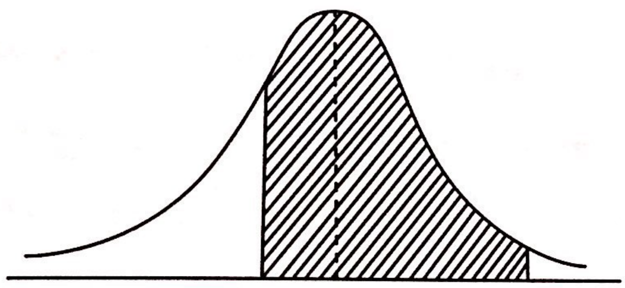
ج)



جدول نرمال استاندارد، احتمال مقادیر کوچک‌تر یا مساوی Z را نشان می‌دهد. برای محاسبه احتمال مقادیر بزرگ‌تر یا مساوی Z می‌توان از قانون متمم استفاده کرد؛ یعنی:

$$P(Z \geq ۱/۵۹) = ۱ - P(Z \leq ۱/۵۹)$$
$$= ۱ - ۰/۹۴۴۱$$
$$= ۰/۰۵۵۹$$

د) برای محاسبه احتمال مورد نظر، می‌توان $P(Z \leq ۲/۷۶)$ را محاسبه و سپس مقدار $P(Z \leq -۱/۱۰)$ را از آن کم کرد. توجه کنید که چون توزیع نرمال Z، پیوسته است $P(Z \leq ۲/۷۶)$ برابر با $P(Z < ۲/۷۶)$ است.



$$P(-۱/۱۰ < Z < ۲/۷۶) = P(Z < ۲/۷۶) - P(Z < -۱/۱۰)$$
$$= ۰/۹۹۷۱ - ۰/۱۳۵۷$$
$$= ۰/۸۶۱۴$$

مثال ۲ـ۸ توزیع نرمالی با $\mu = ۳۰$ و $\sigma = ۹$ را در نظر می‌گیریم، می‌خواهیم بدانیم احتمال اینکه متغیر تصادفی X مقداری بین ۲۴ تا ۴۳ را بگیرد، چقدر است.

با تبدیل متغیر X به Z (با استفاده از رابطه $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$) می‌توان به جای $P(x_۱ \leq X \leq x_۲)$ مقدار $P(z_۱ \leq Z \leq z_۲)$ را محاسبه و از جدول پیدا کرد؛ یعنی:

$$P(۲۴ \leq X \leq ۴۳) = P(\frac{۲۴-۳۰}{۹} \leq Z \leq \frac{۴۳-۳۰}{۹})$$
$$= P(-۰/۶۷ \leq Z \leq ۱/۴۴)$$
$$= P(Z \leq ۱/۴۴) - P(Z \leq -۰/۶۷)$$
$$= ۰/۹۲۵۱ - ۰/۲۵۱۴$$
$$= ۰/۶۷۳۷$$

مثال ۳ـ۸ دستگاه پرکننده شیشه‌های آبلیمو طوری تنظیم شده است که فقط ۳۳۰ گرم آبلیمو را داخل هر شیشه بریزد، با وجود این میزان آبلیمویی که وارد هر شیشه می‌شود دارای توزیع نرمال با میانگین ۳۳۰ گرم و انحراف معیار ۵ گرم است. می‌خواهیم این احتمالات را محاسبه کنیم:

الف) شیشه‌ای بین ۳۲۲ تا ۳۲۸ گرم آبلیمو داشته باشد.

ب) شیشه‌ای بیش از ۳۳۵ گرم آبلیمو داشته باشد.

ج) دایره کنترل کیفیت، میزان آبلیموی ۷۰ شیشه را به صورت تصادفی وزن می‌کند. انتظار می‌رود چند شیشه بیش از ۳۳۵ گرم آبلیمو داشته باشد.

در این مثال $\mu = ۳۳۰$ و $\sigma = ۵$ است؛ بنابراین

الف)

$$P(۳۲۲ \le X \le ۳۲۸) = P(\frac{۳۲۲-۳۳۰}{۵} \le Z \le \frac{۳۲۸-۳۳۰}{۵})$$
$$= P(-۱/۶ \le Z \le -۰/۴)$$
$$= P(Z \le -۰/۴) - P(Z \le -۱/۶)$$
$$= ۰/۳۴۴۶ - ۰/۰۵۴۸$$
$$= ۰/۲۸۹۸$$

ب)

$$P(X \ge ۳۳۵) = P(Z \ge \frac{۳۳۵-۳۳۰}{۵})$$
$$= P(Z \ge ۱)$$
$$= ۱ - P(Z \le ۱)$$
$$= ۱ - ۰/۸۴۱۳$$
$$= ۰/۱۵۸۷$$

ج) تعداد شیشه‌هایی که انتظار می‌رود بیش از ۳۳۵ گرم آبلیمو داشته باشند:

$$۰/۱۵۸۷ \times ۷۰ = ۱۱/۱۰۹ \approx ۱۱$$

مثال ۴ـ۸ زمان لازم برای تعمیر یک ماشین برچسب‌زنی دارای توزیع نرمال با میانگین ۵۰ دقیقه و انحراف معیار ۲۰ دقیقه است. هزینه هر بار تعمیر ۵ هزار ریال است. اگر تعمیر این ماشین بیش از ۸۵ دقیقه طول بکشد، به علت توقف خط تولید، ضرری معادل ۱۰۰ هزار ریال به بار می‌آید؛ می‌خواهیم محاسبه کنیم امید ریاضی

هزینه هر بار خرابی این دستگاه چقدر است.
ابتدا باید محاسبه کنیم با چه احتمالی مدت تعمیر بیش از ۸۵ دقیقه طول می‌کشد؛ یعنی:

$$\begin{aligned} P(X \geq ۸۵) &= P(Z \geq \frac{۸۵-۵۰}{۲۰}) \\ &= P(Z \geq ۱/۷۵) \\ &= ۱ - P(Z \leq ۱/۷۵) \\ &= ۱ - ۰/۹۵۹۹ \\ &= ۰/۰۴۰۱ \end{aligned}$$

پس شرکت با احتمال ۰/۰۴۰۱ هم هزینه تعمیر و هم هزینه توقف خط تولید و با احتمال ۰/۹۵۹۹ تنها هزینه تعمیر را خواهد داشت؛ بنابراین امید ریاضی هزینه هر تعمیر، $E(C)$، چنین خواهد بود:

$$E(C) = ۰/۹۵۹۹(۵۰۰۰) + ۰/۰۴۰۱(۵۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰) = ۹۰۱۰$$

تمرین

۱. اگر Z متغیر تصادفی نرمال استاندارد باشد، این احتمالات را با استفاده از جدول پیدا کنید.

الف) $P(Z \leq ۲/۰۶)$

ب) $P(Z > -۰/۲۵)$

ج) $P(-۱/۱۵ < Z \leq ۰/۵۹)$

د) $P(-۱/۹۶ \leq Z \leq ۱/۹۶)$

ه) $P(۲ \leq Z \leq ۴/۲۵)$

۲. فرض کنید $X \sim N(۱۵,۳)$ است؛ هر یک از این احتمالات را پیدا کنید.

الف) $P(X < ۱۲/۵)$

ب) $P(X \geq ۱۸)$

ج) $P(۱۲/۵ \leq X < ۱۸)$

۳. دستگاه تراشی در هفته گذشته نوعی پیستون را با میانگین قطر خارجی ۱۱/۲ سانتی‌متر و واریانس ۰/۰۰۱۴ با توزیع نرمال، تراش داده است. محاسبه کنید قطر خارجی چند درصد از پیستونها:

الف) کمتر از ۱۱/۲۳۵۲ است.

ب) بیشتر از ۱۱/۲۳۵۲ است.

ج) بین ۱۱/۲۳۵۲ و ۱۱/۲۳۴۹ است.

۴. سن کارگران کارخانه‌ای دارای توزیع نرمال با میانگین ۳۵ سال و انحراف معیار ۱۲ سال است؛ یعنی: $X \sim N(۳۵,۱۲)$. اگر خط‌مشی شرکت بازنشسته‌کردن تمام افرادی باشد که بیش از ۵۵ سال سن دارند، چند درصد از کارگران بازنشسته می‌شوند؟

۵. مدیریت پرسنلی شرکتی برای تعدادی از متقاضیان استخدام آزمونی برگزار کرده است که حداقل نمره قبولی در آن ۷۵ است. مشخص شده است که میانگین نمرات متقاضیان ۶۳ با انحراف معیار ۱۵ است. محاسبه کنید چند درصد از متقاضیان پذیرفته می‌شوند.

۶. قطر یک بلبرینگ، متغیر تصادفی نرمال با میانگین ۷ سانتی‌متر و انحراف معیار ۰/۱ است. استاندارد فنی قطر این کالا عبارت است از $۶/۹۱ \leq X \leq ۷/۰۹$ و تولید یک بلبرینگ استاندارد ۱۲۵۰ ریال سود دارد. اگر قطر بلبرینگ تولیدی کمتر از ۶/۹۱ باشد غیرقابل استفاده است و ۱۰۵۰ ریال زیان دارد و در صورتی که قطر آن بیش از ۷/۰۹ باشد با انجام دادن کار اضافی و صرف هزینه‌ای معادل ۲۰۰ ریال می‌توان آن را به بلبرینگی تبدیل کرد که استاندارد باشد. سود مورد انتظار تولید هر بلبرینگ را حساب کنید.

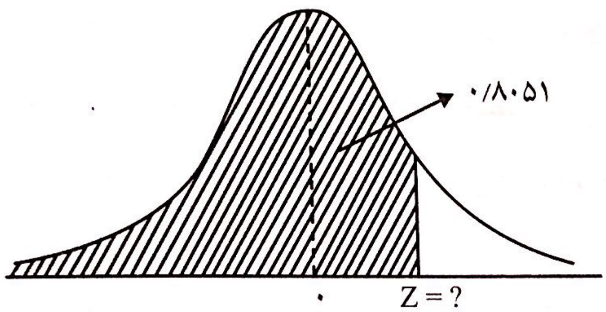
۸ـ۳ استفاده معکوس از جدول توزیع نرمال استاندارد

در استفاده مستقیم از توزیع نرمال، ابتدا Z را مشخص و سپس احتمال آن را از جدول پیدا می‌کردیم، در استفاده معکوس، مقدار Z برای ما مشخص نیست و تنها

احتمال آن مشخص است، احتمال را در جدول پیدا کرده، سپس Z متناظر با آن را مشخص می‌کنیم.

مثال ۵ـ۸ می‌خواهیم مقدار Z را در صورتی که $P(Z \leq z) = ۰/۸۰۵۱$، محاسبه کنیم.

عدد ۰/۸۰۵۱ را در جدول پیدا می‌کنیم و سپس z متناظر با آن را با توجه به سطر و ستون مربوط پیدا می‌کنیم. ۰/۸۶ پس $P(Z \leq ۰/۸۶) = ۰/۸۰۵۱$ خواهد بود.



در روش مستقیم برای حل مسائل، ابتدا متغیر تصادفی X را به Z تبدیل و سپس به جدول مراجعه می‌کردیم، ولی در روش معکوس، پس از پیدا کردن Z مقدار X را با استفاده از این رابطه پیدا می‌کنیم:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}, X = \mu + \sigma Z$$

مثال ۶ـ۸ فرض کنید $X \sim N(۱۰,۲)$ است. می‌خواهیم بدانیم به ازای چه مقداری از X رابطه $P(X \leq x) = ۰/۶۷۰۰$ برقرار است.

در جدول نرمال استاندارد، احتمال ۰/۶۷۰۰ متناظر با $Z = ۰/۴۴$ است؛ یعنی $P(Z \leq ۰/۴۴) = ۰/۶۷۰۰$ است؛ پس

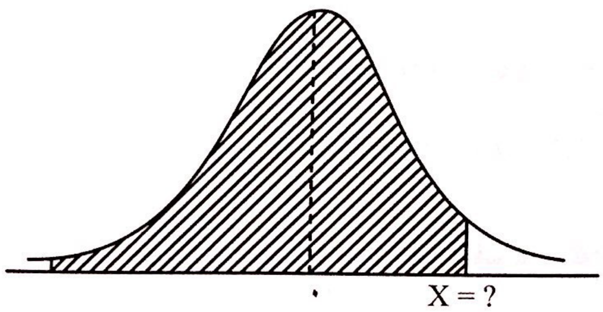
$$X = \mu + \sigma Z = ۱۰ + ۲(۰/۴۴) = ۱۰/۸۸$$

و یا

$$P(X \leq ۱۰/۸۸) = P(Z \leq ۰/۴۴) = ۰/۶۷۰۰$$

مثال ۷ـ۸ میزان مصرف مواد اولیه ماهانه در یک شرکت تولیدی، دارای

توزیع نرمال با میانگین ۷۵۲ تن و انحراف معیار ۸۶ است. این شرکت مواد اولیه مورد نیاز خود را در ابتدای هر ماه تهیه می‌کند. می‌خواهیم حساب کنیم شرکت باید چند تن مواد اولیه برای ماه بعدی تهیه کند تا با ۹۵ درصد اطمینان بداند از نظر مواد اولیه کمبودی نخواهد داشت.



با مراجعه به جدول داریم:

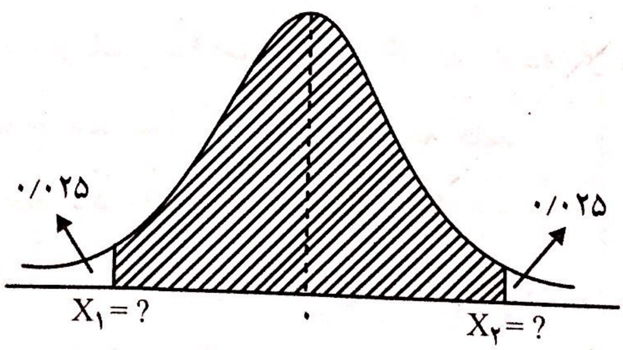
$$P(Z \leq ۱/۶۴۵) = ۰/۹۵۰۰$$

پس

$$X = \mu + \sigma Z = ۷۵۲ + ۸۶(۱/۶۴۵) = ۸۹۳/۴۷$$

یعنی شرکت با خرید ۸۹۳/۴۷ تن مواد اولیه با ۹۵ درصد اطمینان کمبودی نخواهد داشت.

مثال ۸ـ۸ دستگاهی طوری تنظیم شده است که به صورت خودکار و به طور متوسط پیچهایی به قطر ۳۸ میلی‌متر و با انحراف معیار ۰/۲ تولید می‌کند. می‌خواهیم بدانیم ۹۵ درصد پیچهای تولیدی در چه دامنه‌ای در دو طرف میانگین قرار می‌گیرند.



هدف پیدا کردن مقدار $X_۱$ و $X_۲$ است. جمع مساحت هاشورنخورده در سمت چپ و راست منحنی برابر $۰/۰۵ = ۰/۹۵ - ۱$ است. به دلیل متقارن بودن توزیع نرمال حول میانگین، آن دو با هم برابرند و مساحت هر یک $۰/۰۲۵ = ۲ : ۰/۰۵$ است؛ پس $P(Z \geq ۱/۹۶) = ۰/۰۲۵$ و $P(Z \leq -۱/۹۶) = ۰/۰۲۵$ است و بنابراین:

$$X_۱ = ۳۸ - ۰/۲(۱/۹۶) = ۳۷/۶۰۸$$

$$X_۲ = ۳۸ + ۰/۲(۱/۹۶) = ۳۸/۳۹۲$$

به عبارت دیگر ۹۵ درصد پیچهای تولیدی دارای قطری بین ۳۷/۶۰۸ و ۳۸/۳۹۲ میلی‌متر هستند.

تمرین

۱. در هر یک از این موارد مقدار z را پیدا کنید.

الف) $P(Z \geq z) = ۰/۰۴۸۵$

ب) $P(Z \geq z) = ۰/۸۵۰۸$

ج) $P(|Z| \leq z) = ۰/۸۷۴۰$

۲. فرض کنید $X \sim N(۱/۱, ۰/۱۵)$ باشد. به ازای چه مقدار X، روابط ذیل برقرار است؟

الف) $P(X \leq x) = ۰/۲۵۱۴$

ب) $P(X \geq x) = ۰/۵۴۵۰$

۳. زمان لازم برای تعمیر سیستم نیروی محرکه یک نوع ماشین دارای توزیع نرمال با میانگین ۴۸ دقیقه و واریانس ۲۵ است. تعمیرکار به راننده آن می گوید که زمان تعمیر حداکثر یک ساعت طول می کشد، محاسبه کنید:

الف) احتمال غلط بودن این ادعا چقدر است؟

ب) اگر این تعمیرکار با ۹۸ درصد اطمینان بخواهد مدت تعمیری را مشخص کند، آن مدت چقدر خواهد بود؟

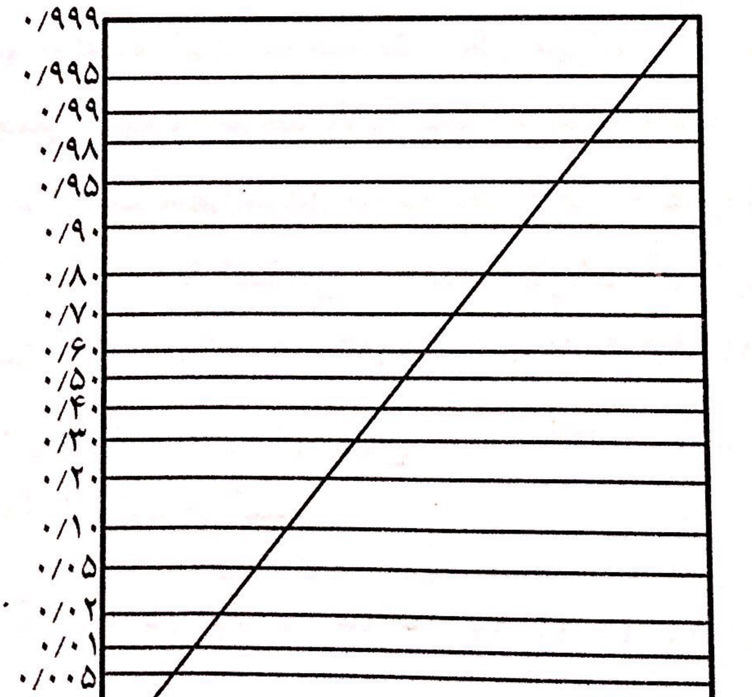
۴. زمان لازم برای انجام دادن کارهای بانکی یک مشتری به طور متوسط ۱۱۰ ثانیه با انحراف معیار ۳۵ ثانیه است که به صورت نرمال توزیع شده است، محاسبه کنید:

الف) کار ۸۵ درصد از مراجعه‌کنندگان به این بانک در چه دامنه‌ای در دو طرف میانگین زمان مراجعه قرار می‌گیرد؟

ب) کار ۵٪ از افرادی که بیشترین زمان را به خود اختصاص می‌دهد، حداقل چقدر طول می‌کشد؟

۴ـ۸ روشی برای تشخیص نرمال بودن توزیع

روشهای مختلفی برای تشخیص و آزمون نرمال بودن مشاهدات وجود دارد. در اینجا از روشی نسبتاً ساده و تا حدی ذهنی، برای تشخیص نرمال بودنِ توزیع مشاهدات استفاده می‌کنیم. صفحه مخصوصی به نام «صفحه احتمال نرمال» وجود دارد که نمونه آن در شکل ۷ـ۸ آورده شده است. احتمالهای تجمعی طوری روی محور عمودی آن درج شده که نمایش هندسی $P(X \leq x)$ به خط مستقیمی تبدیل شود و در محور افقی نیز باید مقیاس طوری انتخاب شود که تمام مشاهدات ما را دربر گیرد.



شکل ۷ـ۸ صفحه احتمال نرمال

بنا به تجربه مشخص شده است که دست‌کم ۱۵ تا ۲۰ مشاهده برای قضاوت در مورد توزیع لازم است.

برای رسم نمودار احتمال نرمال داده‌های طبقه‌بندی نشده در صفحه احتمال نرمال، باید این مراحل را انجام دهید:

۱. n مشاهده را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

۲. روی محور افقی برای نمایش همه داده‌ها مقیاسی برگزینید.

۳. براساس مشاهده مرتب شده i ام در محور افقی $(i = ۱, ۲, ..., n)$ و فراوانی نسبی اصلاح شده $\frac{i - ۰/۵}{n}$ در محور عمودی نقاطی را روی کاغذ پیدا کنید (نقاطی با مختصات $\frac{i - ۰/۵}{n}$ و مشاهده مرتب شده i ام).

۴. نمودار حاصل را با یک خط مستقیم (خط نرمال) مقایسه کنید. وجود انحرافهای منظم نشان‌دهنده نرمال نبودن توزیع مشاهدات است.

البته می‌توان به جای فراوانی نسبی اصلاح شده $\frac{i - ۰/۵}{n}$، از فراوانی نسبی تجمعی معمولی $\frac{i}{n}$ استفاده کرد؛ در این صورت بزرگ‌ترین مشاهده که فراوانی نسبی تجمعی آن یک است در نمودار قرار نمی‌گیرد.

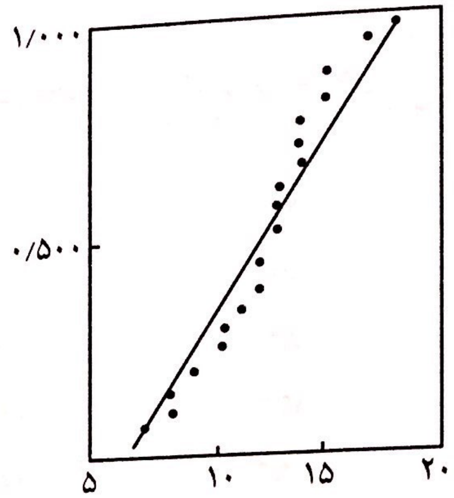
اگر داده‌ها طبقه‌بندی شده باشند، می‌توان از حدود بالای طبقات و فراوانی نسبی تجمعی آنها استفاده کرد؛ به عبارت دیگر می‌توان از نقاطی با مختصات فراوانی نسبی تجمعی طبقه i ام و حد بالای طبقه i ام استفاده کرد.

مثال ۹ـ۸ برای مشخص شدن توزیع تعداد ضایعات روزانه یک دستگاه تولیدی، ۲۰ روز را به صورت تصادفی انتخاب و ضایعات آن را یادداشت کرده‌ایم که بدین قرار است: ۱۰، ۱۴، ۱۳، ۱۸، ۱۲، ۱۵، ۱۱، ۱۷، ۹، ۱۳، ۱۴، ۸، ۱۲، ۵، ۷، ۱۴، ۱۳، ۱۰، ۱۵، ۸. می‌خواهیم بدانیم آیا توزیع تعداد ضایعات نرمال است یا نه.

ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم.

۵, ۷, ۸, ۸, ۹, ۱۰, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۲, ۱۳, ۱۳, ۱۳, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۵, ۱۵, ۱۷, ۱۸

سپس نقاط $(۵, \frac{۱ - ۰/۵}{۲۰}) = (۵, ۰/۰۲۵)$، $(۷, \frac{۲ - ۰/۵}{۲۰}) = (۷, ۰/۰۷۵)$، ... و $(۱۸, \frac{۲۰ - ۰/۵}{۲۰}) = (۱۸, ۰/۹۷۵)$ را در صفحه احتمال نرمال پیدا کنیم.



شکل ۸ـ۸ رسم نمودار احتمال برای مثال ۸ـ۹

چون نمودار احتمال در این شکل به خط نرمال نزدیک است، می‌توان گفت که توزیع مشاهدات ممکن است نرمال باشد.

مثال ۱۰ـ۸ این جدول، توزیع زمان لازم برای پر کردن فرمهای درخواست کار به وسیله ۲۰۰ متقاضی را نشان می‌دهد.

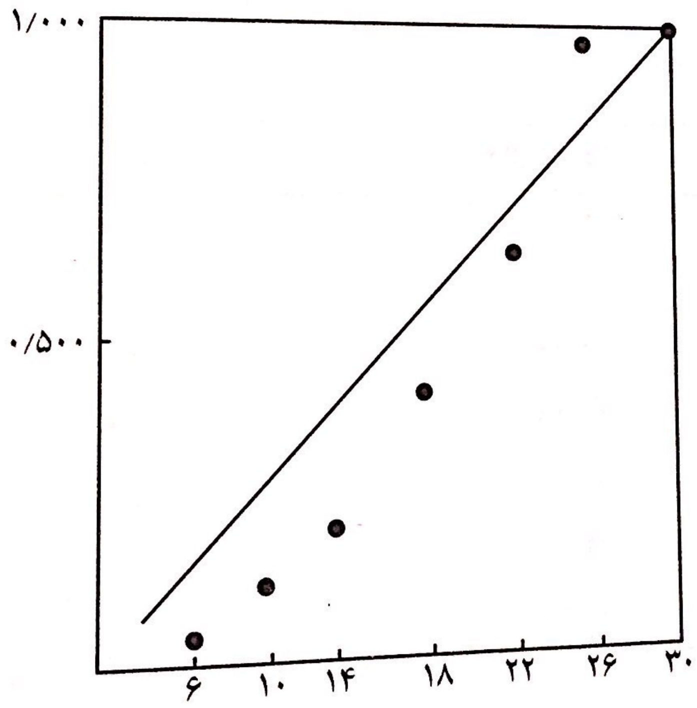
فراوانی	زمان (به دقیقه)
۵	۳ـ۶
۱۷	۷ـ۱۰
۲۰	۱۱ـ۱۴
۴۱	۱۵ـ۱۸
۵۰	۱۹ـ۲۲
۶۰	۲۳ـ۲۶
۷	۲۷ـ۳۰

می‌خواهیم با استفاده از صفحه احتمال نرمال مشخص کنیم آیا توزیع نرمال است یا نه.

برای رسم نمودار احتمال از حدود بالای طبقات و فراوانی نسبی تجمعی هر طبقه استفاده می کنیم.

حدود بالای طبقات	فراوانی تجمعی	فراوانی نسبی تجمعی
۶	۵	۰/۰۲۵
۱۰	۲۲	۰/۱۱۰
۱۴	۴۲	۰/۲۱۰
۱۸	۸۳	۰/۴۱۵
۲۲	۱۳۳	۰/۶۶۵
۲۶	۱۹۳	۰/۹۶۵
۳۰	۲۰۰	۱/۰۰۰

نقاطی با مختصات فراوانی نسبی تجمعی طبقه i ام و حد بالای طبقه i ام را روی صفحه احتمال نرمال نشان می‌دهیم:



شکل ۹ـ۸ رسم نمودار احتمال برای مثال ۱۰ـ۸

همان‌طور که در نمودار احتمال شکل ۹ـ۸ دیده می‌شود بسیاری از نقاط در زیر خط واقع شده‌اند؛ بنابراین نمی‌توان گفت که توزیع داده‌ها نرمال است.

تمرین

۱. اطلاعات مربوط به توزیع تعداد فروش شرکتی در ۵۰۰ روز گردآوری و در این جدول خلاصه شده است:

تعداد فروش	روز
۲۴≥	۳۸
۲۵ـ۲۹	۵۲
۳۰ـ۳۴	۱۶۵
۳۵ـ۳۹	۱۵۰
۴۰ـ۴۴	۶۰
۴۵≤	۳۵

با استفاده از صفحه احتمال نرمال، مشخص کنید آیا این توزیع می‌تواند نرمال باشد؟

۲. مقادیر واقعی وزن ۳۰ کره ۱۰۰ گرمی که برحسب گرم گرد شده‌اند و به طور تصادفی از میان تولیدات یک هفته یک شرکت انتخاب شده‌اند، بدین قرار است: ۹۸، ۹۶، ۱۰۴، ۱۰۶، ۹۷، ۹۸، ۱۰۷، ۱۰۲، ۱۰۶، ۱۰۰، ۱۰۱، ۹۷، ۹۸، ۱۰۶، ۱۰۴، ۱۰۰، ۱۰۱، ۹۵، ۹۷، ۱۰۵، ۱۰۷، ۹۹، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۲، ۱۰۵، ۱۰۳، ۱۰۶، ۹۴، ۱۰۷.
آیا توزیع وزن کره‌ها نرمال است؟

۸ـ۵ تقریب توزیع دوجمله‌ای به وسیله توزیع نرمال

در فصل ششم درباره توزیع گسسته دوجمله‌ای ـ تعداد موفقیتها در n آزمایش مستقل که احتمال موفقیت (p) در هر آزمایش ثابت است ـ توضیح دادیم. جداول مربوط به توزیع دوجمله‌ای، احتمالات مربوط به n های کوچک را نشان می‌دهد. اگر n بزرگ شود، محاسبه احتمال کار دشواری خواهد بود. در تقریب دوجمله‌ای به وسیله پواسون، قسمت ۶ـ۱۰، گفتیم اگر n بزرگ و p نزدیک به صفر یا یک باشد،

توزیع پواسون با $\lambda = np$ تقریب خوبی برای دوجمله‌ای خواهد بود.

در اینجا قضیه دیگری را مطرح می‌کنیم و آن اینکه اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و p باشد، در صورتی که n بزرگ باشد و p به صفر یا یک زیاد نزدیک نباشد، تقریب نرمال با پارامترهای $\mu = np$ و $\sigma = \sqrt{npq}$ تقریب خوبی برای توزیع دوجمله‌ای خواهد بود؛ به عبارت ریاضی: $X \sim N(np, \sqrt{npq})$. بنا به تجربه، اگر np و nq هر دو بزرگ‌تر از ۵ باشند، تقریب نرمال تقریب خوبی خواهد بود. در مواردی که p به ۰/۵ نزدیک باشد، تقریب نرمال برای n های کوچک نیز خوب است.

تقریب نرمال به ما این امکان را می‌دهد که احتمالهای مربوط به متغیر تصادفی X با توزیع دوجمله‌ای را چنان محاسبه کنیم که گویی X متغیر تصادفی با توزیع نرمال است.

چنانچه پیش از این نیز گفتیم، توزیع دوجمله‌ای توزیعی گسسته و توزیع نرمال توزیعی پیوسته است؛ برای مثال، در توزیع دوجمله‌ای با $n = ۱۰$ و $p = ۰/۴$، $P(X = ۵)$ مقداری مثبت است، ولی در توزیع نرمال مقدار $P(X = ۵)$ برابر صفر است؛ بنابراین وقتی تقریب نرمال را برای دوجمله‌ای به کار می‌بریم، باید از تصحیح پیوستگی استفاده کنیم؛ یعنی به جای محاسبه $P(X = ۵)$ باید $P(۴/۵ \le X \le ۵/۵)$ محاسبه شود. تصحیحهای پیوستگی مختلف در جدول ۱ـ۸ آورده شده است.

جدول ۱ـ۸ تصحیحهای پیوستگی توزیع دوجمله‌ای به منظور تقریب نرمال

احتمال مورد نظر از توزیع نرمال	احتمال مورد نظر از توزیع دوجمله‌ای
$P(x - ۰/۵ \le X \le x + ۰/۵)$	$P(X = x)$
$P(X \le x + ۰/۵)$	$P(X \le x)$
$P(X \le x - ۱ + ۰/۵) = P(X \le x - ۰/۵)$	$P(X < x)$
$P(X \ge x - ۰/۵)$	$P(X \ge x)$
$P(X \ge x + ۱ - ۰/۵) = P(X \ge x + ۰/۵)$	$P(X > x) = P(X \ge x + ۱)$
$P(x_۱ - ۰/۵ \le X \le x_۲ + ۰/۵)$	$P(x_۱ \le X \le x_۲)$

مثال ۱۱ــ۸ متغیر تصادفی X دارای توزیع دوجمله‌ای با $n = ۱۵$ و $p = ۰/۴$ است.

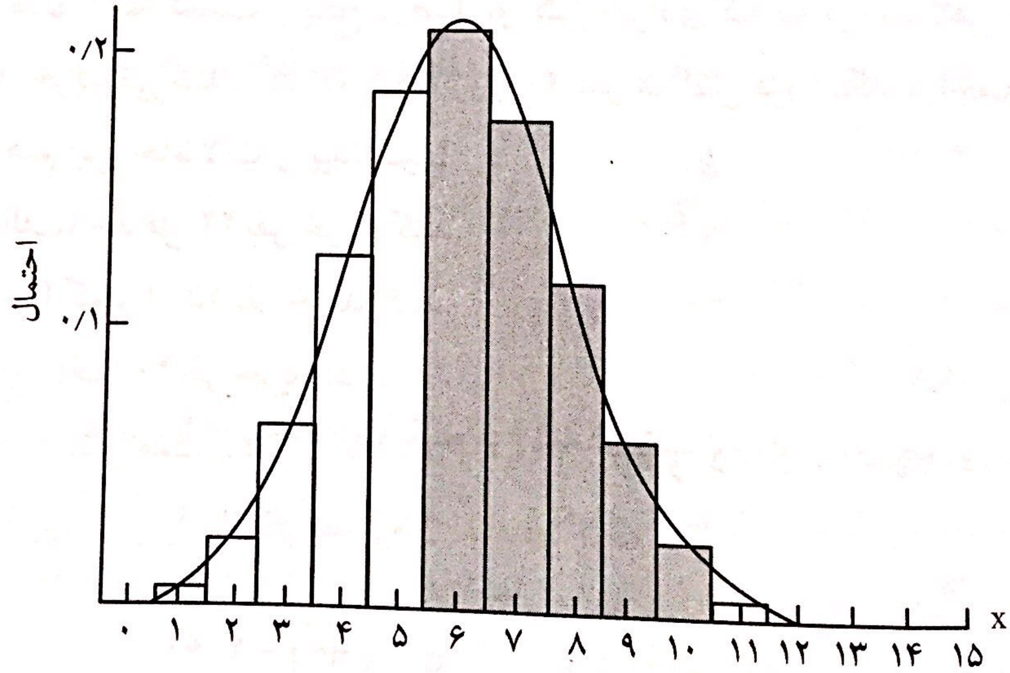
الف) می‌خواهیم احتمالات $P(X = x)$ را به ازای $x = ۰, ۱, ..., ۱۵$ از جدول پیدا کرده، نمودار مستطیلی احتمال را رسم کنیم.

ب) می‌خواهیم تعیین کنیم آیا تقریب نرمال می‌تواند تقریب خوبی برای این توزیع باشد.

ج) می‌خواهیم مقدار $P(۷ \leq X \leq ۱۰)$ را با توزیع دوجمله‌ای و تقریب نرمال (با تصحیح پیوستگی) محاسبه و آن دو را با یکدیگر مقایسه کنیم.

الف) با مراجعه به جدول ۱ پیوست، توزیع احتمال را به ازای مقادیر مختلف به دست می‌آوریم:

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
P(X = x)	۰/۰۰۰	۰/۰۰۵	۰/۰۲۲	۰/۰۶۴	۰/۱۲۶	۰/۱۸۶	۰/۲۰۷	۰/۱۷۷	۰/۱۱۸	۰/۰۶۱	۰/۰۲۵	۰/۰۰۷	۰/۰۰۲	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰



شکل ۱۰ــ۸ نمودار مستطیلی احتمال توزیع دوجمله‌ای با $n = ۱۵$ و $p = ۰/۴$ و منحنی نرمال تقریبی آن

ب) تقریب نرمال تقریب خوبی برای این توزیع است زیرا $np = ۱۵ \times ۰/۴ = ۶ > ۵$ و $nq = ۱۵ \times ۰/۶ = ۹ > ۵$ است.

ج) با استفاده از توزیعهای دوجمله‌ای خواهیم داشت:

$$P(۷ \le X \le ۱۰) = ۰/۳۸۱$$

ابتدا با استفاده از توزیع نرمال پارامترهای آن را پیدا می‌کنیم و سپس تصحیح پیوستگی را انجام می‌دهیم.

$$\mu = np = ۶ \qquad \sigma = \sqrt{npq} = ۱/۸۹۷$$

$$\begin{aligned} P(۶/۵ \le X \le ۱۰/۵) &= P(۰/۲۶ \le Z \le ۲/۳۷) \\ &= P(Z \le ۲/۳۷) - P(Z \le ۰/۲۶) \\ &= ۰/۳۸۸ \end{aligned}$$

تفاوت احتمالات به دست آمده از دو روش ناچیز است. ملاحظه می‌شود که تقریب نرمال حتی برای n هایی به کوچکی ۱۵ نیز قابل استفاده است. هر چقدر n افزایش یابد، تقریب دقیق‌تر می‌شود.

مثال ۱۲ـ۸ شصت و پنج درصد از کل افرادی که به فروشگاهی مراجعه می‌کنند خرید می‌کنند. اگر در یک روز ۳۰ نفر به این فروشگاه مراجعه کنند، می‌خواهیم این احتمالات را پیدا کنیم:

الف) حداقل ۲۲ نفر خرید کنند.

ب) کمتر از ۱۵ نفر خرید کنند.

ج) دقیقاً ۲۰ نفر خرید کنند.

در این مثال $np = ۳۰ \times ۰/۶۵ = ۱۹/۵ > ۵$ و $nq = ۳۰ \times ۰/۳۵ = ۱۰/۵ > ۵$ است؛ بنابراین می‌توان از تقریب نرمال استفاده کرد.

$$\mu = np = ۱۹/۵ \qquad \sigma = \sqrt{npq} = ۲/۶۱$$

بنابراین:

الف)

$$\begin{aligned} P_{\text{دوجمله‌ای}}(X \ge ۲۲) &= P_{\text{نرمال}}(X \ge ۲۱/۵) \\ &= P(Z \ge ۰/۷۷) \end{aligned}$$

$$= 1 - P(Z \leq ۰/۷۷)$$
$$= ۰/۲۲۰۶$$

ب)

$$P_{\text{دوجمله‌ای}}(X < ۱۵) = P_{\text{نرمال}}(X \leq ۱۴/۵)$$
$$= P(Z \leq -۱/۹۲)$$
$$= ۰/۰۲۷۴$$

ج)

$$P_{\text{دوجمله‌ای}}(X = ۲۰) = P_{\text{نرمال}}(۱۹/۵ \leq X \leq ۲۰/۵)$$
$$= P(۰ \leq Z \leq ۰/۳۸)$$
$$= P(Z \leq ۰/۳۸) - P(Z \leq ۰)$$
$$= ۰/۱۴۸۰$$

تمرین

۱. فرض کنید حسابهای ۳۰ درصد از شرکتهایی که یک سازمان آنها را حسابرسی می‌کند قبول می‌شوند. اگر از شرکتهایی که این سازمان حسابرسی کرده است، ۵۰ شرکت را به روش تصادفی برگزینیم، احتمال قبول شدن حسابها را در این موارد محاسبه کنید:

الف) بین ۲۵ تا ۴۵ شرکت

ب) حداکثر ۴۰ شرکت

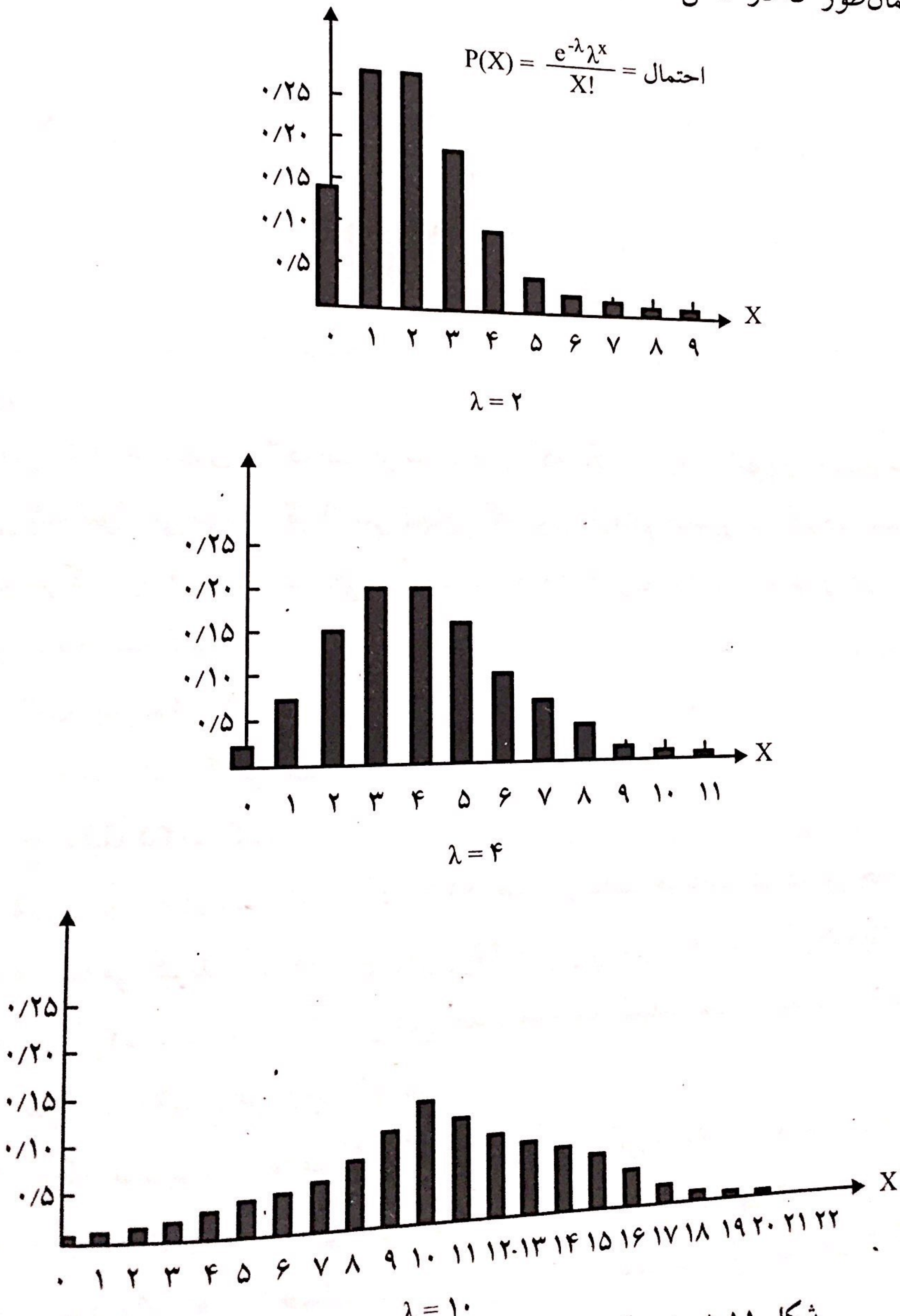
ج) دقیقاً ۳۵ شرکت

۲. استادی به تجربه دریافته است که ۴۵ درصد از دانشجویانش در درس خاصی نمره «ب» می‌گیرند. اگر در ترم جاری ۲۵ نفر این درس را با او گرفته باشند، احتمال گرفتن نمره «ب» را برای این تعداد محاسبه کنید: الف) حداقل ۱۰ نفر، ب) بین ۸ تا ۲۰ نفر، ج) دقیقاً ۱۰ نفر.

۳. یک شبکه تلویزیونی ادعا می‌کند که ۷۰ درصد از کل بینندگان تلویزیون وقت خود را به دیدن برنامه خاصی در شبهای سه‌شنبه اختصاص می‌دهند. به فرض درست بودن این ادعا، احتمال آنکه از بین ۴۰۰ بیننده، حداقل ۱۵۰ نفر از آنان برنامه را تماشا کرده باشند، چقدر است؟

۸ـ۶ تقریب توزیع پواسون به وسیله توزیع نرمال

وقتی میانگین توزیع پواسون (λ) نسبتاً بزرگ شود می‌توان تقریب نرمال را برای توزیع پواسون به کار برد. از اثبات ریاضی این موضوع خودداری می‌کنیم. همان‌طور که در شکل ۸ـ۱۱ نشان داده شده است هر چقدر λ افزایش یابد توزیع به



شکل ۸ـ۱۱ با بزرگ شدن λ توزیع پواسون به نرمال نزدیک می‌شود

نرمال نزدیک‌تر می‌شود. به طور کلی اگر $\lambda \geq ۱۰$ باشد، تقریب نرمال تقریب خوبی برای پواسون است. در این صورت میانگین و انحراف معیار توزیع نرمال برابر $\mu = \lambda$ و $\sigma = \sqrt{\lambda}$ خواهد بود.

در هنگام حل مسائل، در استفاده از توزیع نرمال به جای پواسون نیز، به دلیل گسسته بودن توزیع پواسون و پیوسته بودن توزیع نرمال، باید از تصحیح پیوستگی - همانند تقریب دوجمله‌ای به وسیله نرمال ـ استفاده کرد.

مثال ۱۳ـ۸ تعداد تلفنهایی که به روابط عمومی صدا و سیما زده می‌شود دارای توزیع پواسون با میانگین ۱۰ تلفن در هر دقیقه است. می‌خواهیم بدانیم احتمال اینکه کمتر از ۸ تلفن در یک دقیقه خاص زده شود، چقدر است.

در این مثال چون $\lambda = ۱۰$ است، می‌توان از تقریب نرمال با پارامترهای $\mu = ۱۰$ و $\sigma = \sqrt{۱۰} = ۳/۱۶$ استفاده کرد.

$$\begin{aligned} P_{\text{پواسون}}(X < ۸) &= P_{\text{نرمال}}(X \leq ۷/۵) \\ &= P(Z \leq -۰/۷۹) \\ &= ۰/۲۱۴۸ \end{aligned}$$

مثال ۱۴ـ۸ مثال ۱۳ـ۸ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم بدانیم احتمال اینکه در ۲/۵ دقیقه بین ۲۰ تا ۳۰ تلفن زده شود، چقدر است.

در اینجا $\lambda = ۲/۵ \times ۱۰ \geq ۱۰$ است، پس می‌توان از تقریب نرمال با $\mu = ۲۵$ و $\sigma = \sqrt{۲۵} = ۵$ استفاده کرد.

$$\begin{aligned} P_{\text{پواسون}}(۲۰ \leq X \leq ۳۰) &= P_{\text{نرمال}}(۱۹/۵ \leq X \leq ۳۰/۵) \\ &= P(-۱/۱ \leq Z \leq ۱/۱) \\ &= P(Z \leq ۱/۱) - P(Z \leq -۱/۱) \\ &= ۰/۷۲۸۶ \end{aligned}$$

تمرین

۱. به طور متوسط در هر دقیقه ۰/۵ مشتری با توزیع پواسون به قسمت پرداخت

فروشگاهی مراجعه می‌کند. احتمال اینکه بیش از ۲۰ مشتری در طی نیم ساعت مراجعه کنند، چقدر است؟

۲. تعداد کشتیهایی که به اسکله‌ای جهت تخلیه بار می‌رسند، دارای توزیع پواسون با میانگین ۱/۷۵ کشتی در هر شبانه‌روز است. احتمالات زیر را برای رسیدن کشتی در یک هفته محاسبه کنید.

الف) بین ۴ تا ۱۱ کشتی برسد.

ب) حداقل ۸ کشتی برسد.

۳. در خلال ساعت ۴ تا ۷ بعدازظهر، دوره اوج کاری، به طور متوسط در هر ۵ دقیقه یک ماشین جهت تعمیر به تعمیرگاهی مراجعه می‌کند. احتمال اینکه بین ساعت ۵ تا $\frac{۱}{۴}$۶ بیش از ۱۲ ماشین به این تعمیرگاه مراجعه کند، چقدر است؟

۸ـ۷ قضیه حدّ مرکزی

دو موضوع در قضیه حدّ مرکزی مطرح می‌شود؛ موضوع اول جمع n متغیر تصادفیِ مستقل و موضوع دوم توزیعهای نمونه‌گیری است. در کتاب حاضر فقط درباره موضوع اول توضیح خواهیم داد و موضوع دوم در جلد دوم کتاب مطرح خواهد شد.

توزیع نرمال تقریب خوبی برای توزیع مجموع متغیرهای تصادفی است. اگر X_1، X_2، ...، X_n، n متغیر تصادفی مستقل باشند، مشروط بر آنکه n به اندازه کافی بزرگ باشد، آنگاه متغیر تصادفی $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ دارای توزیع نرمال با $\mu_Y = \sum_{i=1}^{n} \mu_{x_i}$ و $\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{x_i}^2$ خواهد بود که μ_{x_i} و $\sigma_{x_i}^2$ به ترتیب میانگین و واریانس متغیر تصادفی X_i هستند. ممکن است این سؤال مطرح شود که اندازه n چقدر باید باشد تا بتوان از توزیع نرمال برای جمع n متغیر تصادفی استفاده کرد. اگر توزیع هر جمله X_i چولگی زیادی نداشته باشد و اگر نتواند یک جمله سهم عمده و تعیین کننده‌ای از مجموع را داشته باشد، توزیع مجموع حداقل ۱۰ متغیر تصادفی ($n \geq ۱۰$) تقریباً توزیع نرمال خواهد بود.

این نکته که X_i ها می‌توانند هر توزیعی داشته باشند، اهمیت توزیع نرمال را

نشان می‌دهد. مثالهای عملی این قضیه ممکن است زمان‌بندی پروژه‌ها که از فعالیتهای مختلفی تشکیل شده‌اند و یا وزن محموله‌هایی که وزن هر جزء از آنها دارای توزیع خاصی است، باشد.

مثال ۱۵ـ۸ برای تکمیل پروژه‌ای لازم است فعالیتهای مختلفی صورت گیرد. فعالیتهای مسیر بحرانی آن ـ مسیر بحرانی مسیری است که هر گونه تأخیری در انجام فعالیتهای آن باعث تأخیر در زمان اتمام کل پروژه می‌شود ـ همراه با میانگین و واریانس زمان انجام هر فعالیت جدول ۲ـ۸ آورده شده است.

جدول ۲ـ۸ میانگین و واریانس زمان انجام فعالیتهای مسیر بحرانی (به هفته)

فعالیت	میانگین	واریانس	فعالیت	میانگین	واریانس
۱	۳	۱/۲	۸	۴	۱/۸
۲	۲/۵	۱/۱	۹	۲/۵	۱/۲
۳	۴	۱/۵	۱۰	۳/۱	۲
۴	۲/۷	۲	۱۱	۲/۲	۱/۶
۵	۱/۲	۰/۵	۱۲	۶	۲/۷
۶	۳	۱/۲	۱۳	۳/۲	۱/۷
۷	۵	۲/۲	۱۴	۱	۰/۲

الف) می‌خواهیم میانگین و واریانس زمان کل پروژه را به دست آوریم.

ب) می‌خواهیم بدانیم احتمال اینکه پروژه حداکثر ۴۵ هفته طول بکشد، چقدر است.

الف) با پارامترهای ذیل صرف‌نظر از توزیع هر یک از فعالیتها، توزیع زمان مجموع فعالیتها تقریباً نرمال است.

$$\mu_Y = \mu_{x_۱} + \mu_{x_۲} + \ldots + \mu_{x_{۱۴}}$$
$$= ۳ + ۲/۵ + \ldots + ۱$$
$$= ۴۳/۴$$

$$\sigma_Y^۲ = \sigma_{x_۱}^۲ + \sigma_{x_۲}^۲ + \ldots + \sigma_{x_{۱۴}}^۲$$
$$= ۱/۲ + ۱/۱ + \ldots + ۰/۲$$
$$= ۲۰/۹$$

ب) زمان اتمام کل پروژه (Y) متغیری تصادفی با $Y \sim N(۴۳/۴, ۴/۵۷)$ است؛ بنابراین:

$$P(Y \le ۴۵) = P(Z \le ۰/۳۵)$$
$$= ۰/۶۳۶۸$$

مثال ۸ـ۱۶ با توجه به اطلاعات مثال ۸ـ۱۵ می‌خواهیم مدتی را برای تکمیل پروژه در نظر بگیریم که با ۹۵ درصد اطمینان بدانیم پروژه طی آن مدت انجام می‌شود.

با مراجعه به جدول نرمال استاندارد داریم:

$$P(Z \le ۱/۶۴۵) = ۰/۹۵$$

$$Y = \mu_Y + \sigma_Y Z$$
$$= ۴۳/۴ + ۴/۵۷(۱/۶۴۵)$$
$$= ۵۰/۹۲$$

حاصل عبارات نشان می‌دهد که برای تکمیل پروژه با ۹۵ درصد اطمینان به زمانی برابر ۵۰/۹۲ هفته نیازمندیم.

تمرین

۱. می‌خواهیم ۶۵ گونی سیب‌زمینی را که وزن هر گونی، متغیری تصادفی با میانگین ۷۵ کیلوگرم و واریانس ۱۵ است با کامیون از شهر «الف» به شهر «ب» حمل کنیم. ظرفیت این کامیون ۵ تن است. اگر بار کامیون بیش از ظرفیت باشد، راننده جریمه می‌شود. احتمال جریمه شدن راننده این کامیون چقدر است؟

۲. اتوبوسی بین شهر اول و یازدهم تردد می‌کند. بین این دو شهر ۹ شهر دیگر وجود

دارد که میانگین زمان حرکت بین آنها (به ساعت) همراه با انحراف معیار آن در این جدول آمده است.

محدودهٔ سفر	میانگین	انحراف معیار	محدودهٔ سفر	میانگین	انحراف معیار
۱_۲	۱	۰/۲۰	۶_۷	۲	۰/۱۵
۲_۳	۱/۵	۰/۳۰	۷_۸	۳	۰/۴۰
۳_۴	۲	۰/۲۵	۸_۹	۱/۲	۰/۱۵
۴_۵	۰/۷۵	۰/۱	۹_۱۰	۰/۸	۰/۱۰
۵_۶	۱/۵	۰/۲۰	۱۰_۱۱	۱/۶	۰/۳۰

الف) میانگین و واریانس کل سفر را حساب کنید.

ب) اگر شرکت مسافربری بخواهد با ۹۰ درصد احتمال مدت زمانی را اعلام کند که اتوبوس به مقصد می‌رسد، آن زمان چند ساعت خواهد بود؟

۸_۸ خلاصه

توزیع نرمال؛ مهم‌ترین توزیع پیوسته است. در این فصل ضمن معرفی این توزیع، نحوهٔ تأثیر میانگین و انحراف معیار هر توزیع بر منحنی نرمال آن توزیع بیان شد و ویژگیهای توزیع نرمال مطرح شد.

همچنین روش تبدیل متغیر تصادفی نرمال به متغیر نرمال استاندارد و نحوهٔ استفاده از جدول آماری برای محاسبه مقادیر احتمالی ذکر شد و گفته شد که اگر «مقدار احتمال» مشخص باشد، می‌توان با استفاده معکوس از جدول مذکور، مقدار متغیر تصادفی را پیدا کرد. همچنین با تقریب زدن توزیعهای دوجمله‌ای و پواسون به وسیلهٔ توزیع نرمال، می‌توان از محاسبات بیش از حد، اجتناب کرد. در پایان فصل نیز یکی از ابعاد پراهمیت «قضیه حد مرکزی»، در مورد جمع n متغیر تصادفی مستقل مطرح شد.

۸ـ۹ سؤالات و مسائل

سؤالات دوگزینه‌ای

۱. مقدار z برای نقطه‌ای مانند x در توزیع نرمال عبارت است از سطح زیر منحنی بین x و میانگین توزیع. ص□ غ□

۲. در توزیع نرمال، میانگین همواره بین میانه و مد قرار می‌گیرد. ص□ غ□

۳. دنباله‌های راست و چپ توزیع نرمال تا بی‌نهایت امتداد داشته، هرگز محور افقی را قطع نمی‌کند. ص□ غ□

۴. سطح محصور بین $\mu+\sigma$ و $\mu-\sigma$ برابر با ۰/۹۵۴ است. ص□ غ□

۵. هر چقدر واریانس افزایش یابد، منحنی نرمال کشیده‌تر می‌شود. ص□ غ□

۶. اگر نمودار پس از رسم در صفحه احتمال نرمال، انحرافهای منظمی از خط نرمال داشت، توزیع داده‌ها نرمال است. ص□ غ□

۷. توزیع دوجمله‌ای را در صورتی که $np>5$ و $nq>5$ باشد، می‌توان با توزیع نرمال تقریب زد. ص□ غ□

۸. توزیع پواسون را در صورتی که $\lambda>5$ باشد، می‌توان با توزیع نرمال تقریب زد.

ص□ غ□

۹. سطح زیر منحنی نرمال بین میانگین و میانگین به اضافه یک انحراف معیار برای توزیعی که میانگین آن ۱۰۰ است بیشتر از توزیعی است که میانگین آن ۱۰ است.

ص□ غ□

سؤالات چهارگزینه‌ای

۱۰. میانگین و واریانس توزیع نرمال استاندارد به ترتیب (از چپ به راست) کدام‌اند؟

الف) (۰,۱) ج) (۱,۱)

ب) (۱,۰) د) (۰,۰)

۱۱. فرض کنید Z متغیر استاندارد و $\int_0^2 \varphi(z)dz = ۰/۴۷۷۲$ است. $P(Z\geq ۲)$ کدام است؟

الف) ۰/۰۲۲۸ ج) ۰/۹۷۷۲

ب) ۰/۴۷۷۲ د) ۰/۵۲۲۸

۱۲. اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین ۵۰ باشد، $P(X \leq ۵۰)$ کدام است؟

الف) صفر
ب) $\frac{۱}{۲}$
ج) $\frac{۳}{۴}$
د) ۱

۱۳. اگر اندازه دو نفر از جامعه نرمالی، ۱۳ و ۱۹ و اندازه این دو برحسب متغیر استاندارد Z، صفر و ۳ باشد، میانگین و انحراف معیار (به ترتیب از چپ به راست) کدام‌اند؟

الف) (۶,۳)
ب) (۱۹,۳)
ج) (۱۳,۲)
د) (۲,۱۹)

۱۴. اگر $P(۰ \leq Z \leq ۰/۵) = ۰/۱۹۱۵$ و $P(۰ \leq Z \leq ۱) = ۰/۳۴۱۳$ باشد، $P(-۱ \leq Z \leq ۰/۵)$ کدام است؟

الف) ۰/۱۴۹۸
ب) ۰/۴۶۷۲
ج) ۰/۵۳۲۸
د) ۰/۸۵۰۲

۱۵. اگر $P(Z \leq -۲) = ۰/۰۲۲۸$ و X نیز دارای توزیع نرمال با میانگین ۲۵ و $P(X \geq ۵) = ۰/۹۷۷۲$ باشد، انحراف معیار X کدام است؟

الف) صفر
ب) ۵
ج) ۱۰
د) ۱۵

۱۶. اگر n و p دو پارامتر توزیع دوجمله‌ای باشند، کدام‌یک از این موارد را می‌توان با توزیع نرمال تقریب زد؟

الف) $n = ۵, P = ۰/۳$
ب) $n = ۱۰, P = ۰/۴$
ج) $n = ۱۵, P = ۰/۴۵$
د) الف و ج

۱۷. اگر بخواهیم $P(X > ۹)$ را در توزیعی دوجمله‌ای با توزیع نرمال تقریب بزنیم - مشروط بر آنکه تقریب مجاز باشد - کدام‌یک از این موارد را، با تصحیح پیوستگی، باید حساب کنیم؟

الف) $P(X \geq ۸/۵)$
ب) $P(X \leq ۹/۵)$
ج) $P(X \geq ۹/۵)$
د) $P(X \leq ۸/۵)$

۱۸. اگر محموله‌ای متشکل از ۱۰ قلم کالا باشد که وزن هر قلم کالا دارای توزیع یکنواخت با پارامترهای $\alpha = ۱۳$ و $\beta = ۲۵$ تن باشد، کدام‌یک از عبارتهای ذیل در مورد محموله صحیح است؟

الف) $\mu = ۱۲۰$ ، $\sigma^2 = ۱۹۰$، و توزیع یکنواخت

ب) $\mu = ۱۲۰$ ، $\sigma^2 = ۱۹۰$، و توزیع نرمال

ج) $\mu = ۱۹۰$ ، $\sigma^2 = ۱۲۰$، و توزیع نرمال

د) $\mu = ۱۹۰$ ، $\sigma^2 = ۱۲۰$، و توزیع نامشخص

۱۹. توزیع پواسونی با $\lambda = ۳۶$ را در نظر بگیرید؛ پارامترهای تقریب نرمال آن کدام است؟

الف) $\sigma = ۳۶, \mu = ۳۶$

ب) $\sigma = ۳۶, \mu = ۶$

ج) $\sigma = ۶, \mu = ۳۶$

د) $\sigma = ۶, \mu = ۶$

۲۰. برای رسم نمودار احتمال در صفحه احتمال نرمال برای داده‌های طبقه‌بندی شده، از کدام‌یک از موارد ذیل استفاده می‌شود؟

الف) محور افقی حدود طبقات، محور عمودی فراوانی نسبی

ب) محور افقی فراوانی نسبی، محور عمودی حدود طبقات

ج) محور افقی حدود بالای طبقات، محور عمودی فراوانی تجمعی یا نسبی

د) محور افقی حدود بالای طبقات، محور عمودی فراوانی نسبیِ تجمعی

مسائل

۲۱. فرض کنید میانگین و انحراف معیار نمرات نهایی درسی به ترتیب ۷۰ و ۱۴ باشد (توزیع نمرات نرمال است). اگر بخواهیم به ۱۰ درصد افراد کلاس نمره «الف»، به ۲۰ درصد نمره «ب»، به ۴۰ درصد نمره «ج»، به ۲۰ درصد نمره «د»، و به ۱۰ درصد نمره «ه» بدهیم، حداقل نمره برای قرار گرفتن در هر یک از گروههای مذکور چقدر است؟

۲۲. دو سینما برای جلب هزار مشتری با هم رقابت می کنند. فرض کنید که هر یک از مشتریان کاملاً مستقل از دیگران یکی از دو سینما را انتخاب می کند. هر سالن

سینما باید چند صندلی داشته باشد تا احتمال جواب کردن مشتری به دلیل کمبود صندلی، کمتر از یک درصد باشد؟

۲۳. وقتی را که شخصی برای رفتن از منزل تا محل کار صرف می‌کند دارای توزیع نرمال با میانگین ۵۰ دقیقه و انحراف معیار ۱۴ دقیقه است.

الف) احتمال اینکه این شخص فردا بیش از یک ساعت از وقتش را برای این کار صرف کند، چقدر است؟

ب) اگر این شخص بخواهد ریسک دیر رسیدن به محل کار را به ۳ درصد کاهش دهد، برای رفتن از منزل به محل کار باید دست‌کم چند دقیقه از وقت خود را تخصیص دهد؟

۲۴. احتمال اینکه از بین ۱۲ هزار رقم تصادفی، حداکثر ۱۰۵۰ بار رقم ۵ تکرار شده باشد، چقدر است؟

۲۵. زمان مورد انتظار (میانگین) و انحراف معیار زمان انجام دادن فعالیتهای مسیر بحرانی پروژه‌ای در این جدول آورده شده است (واحد زمان هفته است):

فعالیت	میانگین	واریانس	فعالیت	میانگین	واریانس
۱	۳	۱/۲	۶	۳	۱/۰
۲	۲	۰/۸	۷	۴/۲	۲/۱
۳	۱/۸	۰/۵	۸	۱	۰/۳
۴	۵	۲/۰	۹	۰/۵	۰/۲
۵	۳	۱/۵			

الف) احتمال تکمیل پروژه بین ۲۰ تا ۲۶ هفته چقدر است؟

ب) احتمال تکمیل پروژه طی حداکثر ۲۲ هفته چقدر است؟

ج) اگر بخواهیم با کارفرمای پروژه قراردادی ببندیم، چند هفته برای تکمیل آن در نظر بگیریم به طوری که با ۹۵ درصد احتمال مطمئن باشیم پروژه بیشتر از آن مدت طول نخواهد کشید؟

د) کارفرمای پروژه گفته است افزون بر مبلغ قرارداد، به شرط تکمیل پروژه

پروژه بین ۲۰ تا ۳۰ هفته، مبلغ یک میلیون ریال به عنوان پاداش خواهد پرداخت، ولی اگر بیش از ۳۰ هفته طول بکشد مبلغ ۱۰ میلیون ریال خسارت خواهد گرفت. امید ریاضی دریافت پاداش برای شرکت بابت زمان تکمیل پروژه چقدر است؟

در زمانی کمتر از ۲۰ هفته، مبلغ ۵ میلیون ریال و به شرط تکمیل

۲۶. کشتارگاهی ۴۷۰ گوسفند را بدون توزین آنها، یک‌جا می‌خرد. وزن هر گوسفند به طور متوسط ۴۵ کیلوگرم با انحراف معیار ۴ است. احتمال اینکه وزن این ۴۷۰ گوسفند بیش از ۲۲ تن باشد، چقدر است؟

۲۷. تعداد شکایاتی که ماهانه به دادگاهی می‌رسد دارای توزیع پواسون با میانگین ۵ شکایت است. احتمال اینکه در طی فصل پاییز بیش از ۱۷ شکایت به این دادگاه برسد، چقدر است (از تقریب نرمال استفاده کنید)؟

۲۸. توزیع درآمد ماهانه ۱۲۰۰ خانوارِ انتخاب شده از شهری در این جدول آورده شده است:

طبقات (ارقام به ده هزار ریال)	فراوانی
۱۰_۱۵	۱۰۰
۱۵_۲۰	۲۵۰
۲۰_۲۵	۲۳۰
۲۵_۳۰	۲۲۰
۳۰_۳۵	۱۴۰
۳۵_۴۰	۸۰
۴۰_۴۵	۵۵
۴۵_۵۰	۷۰
۵۰_۵۵	۳۳
۵۵_۶۰	۲۲

با استفاده از صفحه احتمال نرمال، تعیین کنید آیا توزیع درآمد این شهر می‌تواند نرمال باشد؟

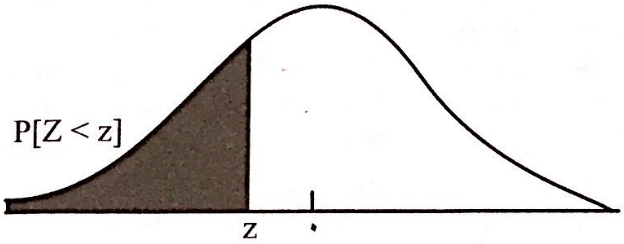
۲۹. فرض کنید $X \sim N(۲۰,\sigma)$ باشد، اگر $P(X \leq ۲۲+\sigma)=۰/۹۷۷۲$ باشد، σ را پیدا کنید.

۳۰. به طور متوسط ۵ درصد از تولیدات روز و ۸ درصد از تولیدات شب کارخانه‌ای معیوب است. تولیدات روز دو برابر شب است. تولیدات روز و شب در یک جا و به صورت درهم نگهداری می‌شود. احتمال اینکه مأمور کنترل کیفیت پس از انتخاب ۱۵۰ کالا و آزمایش آنها متوجه وجودِ ۸ تا ۱۲ کالای معیوب شود، چقدر است؟

پاسخ‌نامه سؤالات

۱) غ	۲) غ	۳) ص	۴) غ	۵) غ
۶) غ	۷) ص	۸) غ	۹) غ	۱۰) الف
۱۱) الف	۱۲) ب	۱۳) ج	۱۴) ج	۱۵) ج
۱۶) ج	۱۷) ج	۱۸) ج	۱۹) ج	۲۰) د

جدول ۳ احتمالهای نرمال استاندارد



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.5	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
-3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
-3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
-3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
-3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
-3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
-2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.392	.384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
-.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1694	.1867
-.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2297	.2266	2236	.2206	.2177	.2148
-.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-.3	.3821	.3783	.3745	.3707	3669	.3632	.3594	.3557	3520	.3483
-.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	3974	.3936	3897	3859
-.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
-.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

ادامه جدول ۳

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7175	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.9643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998

مدیریت

آمار و کاربرد آن در مدیریت

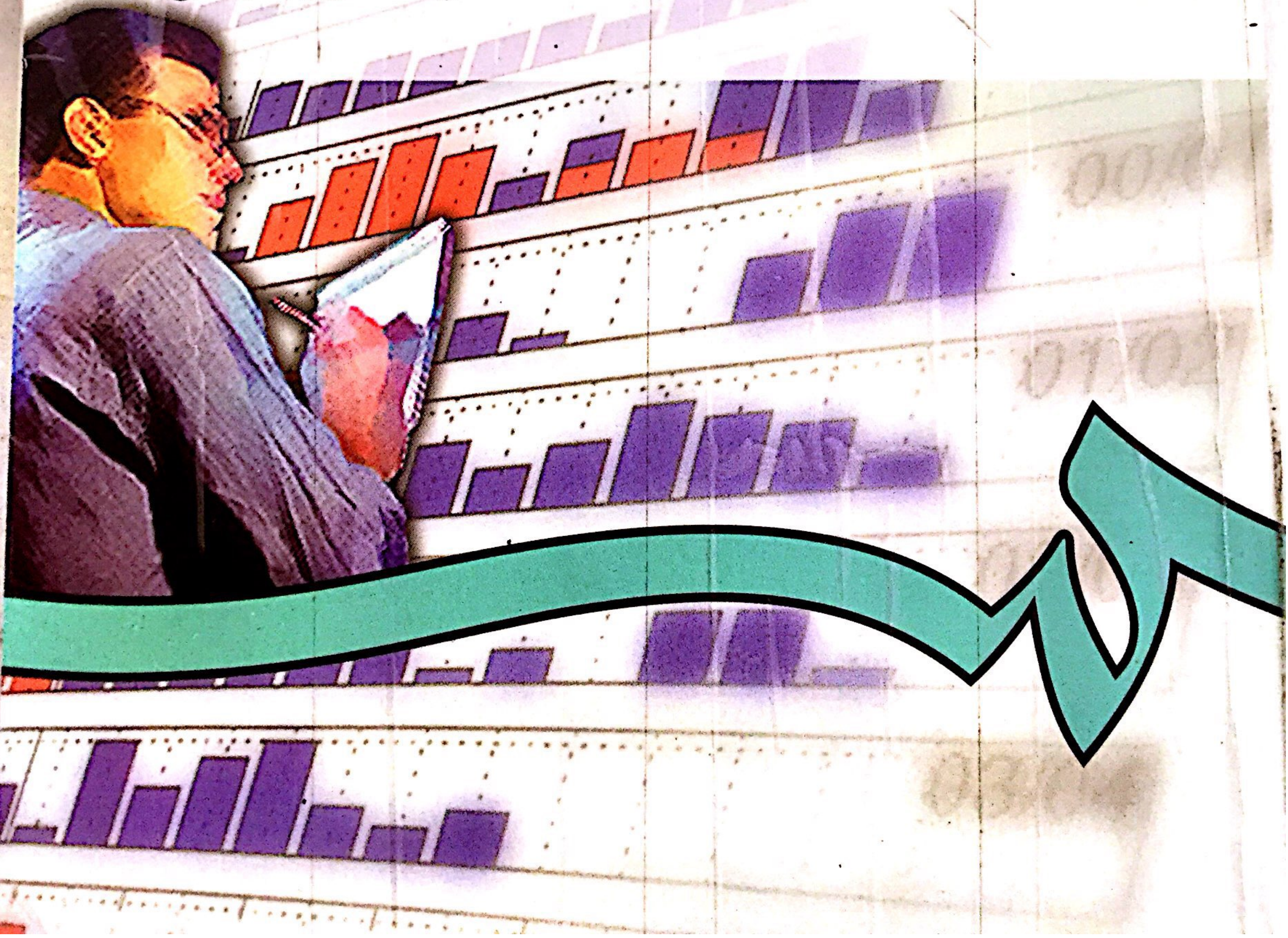
جلد دوم

تحلیل آماری

(ویراست ۳)

دکتر عادل آذر

دکتر منصور مؤمنی



فهرست مطالب

عنوان | صفحه

عنوان	صفحه
فصل یازدهم: آزمون فرض آماری	۹۷
۱ـ۱۱ مقدمه	۹۷
۲ـ۱۱ فرض صفر و فرض مقابل	۹۸
۳ـ۱۱ سطح معنی‌دار و خطاهای آماری	۱۰۱
۴ـ۱۱ توزیع نمونه‌گیری آماره	۱۰۵
۵ـ۱۱ آزمون فرض یک‌دنباله و دو دنباله	۱۰۶
۶ـ۱۱ مراحل عمومی آزمون فرض آماری	۱۰۹
۷ـ۱۱ آزمون فرض آماری میانگین یک جامعه (μ_x)	۱۱۱
۸ـ۱۱ آزمون مقایسهٔ میانگین دو جامعهٔ آماری	۱۱۶
۹ـ۱۱ آزمون مقایسهٔ زوجها (آزمون قبل و بعد)	۱۲۱
۱۰ـ۱۱ آزمون فرض نسبت موفقیت در جامعه (p)	۱۲۷
۱۱ـ۱۱ آزمون فرض مقایسهٔ نسبت موفقیت در دو جامعهٔ آماری	۱۳۰
۱۲ـ۱۱ آزمون فرض آماری برای واریانس جامعه	۱۳۳
۱۳ـ۱۱ آزمون فرض آماری برای مقایسهٔ واریانس دو جامعه	۱۳۶
۱۴ـ۱۱ خلاصه	۱۴۰
۱۵ـ۱۱ سؤالات و مسائل	۱۴۰
فصل دوازدهم: تحلیل واریانس	۱۵۰
۱ـ۱۲ مقدمه	۱۵۰
۲ـ۱۲ تحلیل واریانس یک‌عامله	۱۵۳
۳ـ۱۲ طرح آزمایشها	۱۶۱
۴ـ۱۲ تحلیل واریانس دوعامله	۱۶۴
۵ـ۱۲ ملاحظات بیشتر	۱۷۶
۶ـ۱۲ مقایسه‌های پس از تجربه	۱۷۷
۷ـ۱۲ سؤالات و مسائل	۱۸۶
فصل سیزدهم: رگرسیون خطی ساده و همبستگی	۱۹۰
۱ـ۱۳ مقدمه	۱۹۰
۲ـ۱۳ انواع روابط بین دو متغیر و نمودار پراکنش	۱۹۱

عنوان | صفحه

فصل نهم

نمونه‌گیری و توزیعهای نمونه‌گیری

در بسیاری از زمینه‌های کاربردی، محققان درصدد تعیین پارامترهای جامعه‌اند؛ ولی دسترسی به آنها به‌طور مستقیم با سرشماری جامعهٔ آماری امکان‌پذیر نیست. در چنین موقعیتهایی، محققان ناچارند برای استنباط پارامترهای مورد نظر به نمونه‌هایی از جوامع آماری اکتفا کنند.

شاخص به دست آمده از جامعهٔ آماری با استفاده از سرشماری را پارامتر می‌نامند. در مقابل شاخص به دست آمده از یک نمونه تصادفی n تایی از جامعه را «آماره»[1] نامیده‌اند. همان‌طور که در فصل اول نیز بیان شد یکی از مهم‌ترین جنبه‌های آمار استنباطی تعمیم اطلاعات از سطح آماره به پارامتر است که در این فصل مقدمات آن را بررسی می‌کنیم.

از آنجا که اندازه‌های نمونه[2] از نمونه‌ای به نمونهٔ دیگر در تغییرند، پس مقدار یک «آماره» از نمونه‌ای به نمونهٔ دیگر تغییر خواهد کرد. بنابراین برای دستیابی به پایایی[3] استنباط براساس آمارهٔ محاسبه شده از نمونه، باید به تعیین یا تقریب توزیع آن آماره قادر بود. توزیع آماره آن تابع احتمالی است که از نمونه‌گیری مکرر

1. statistic
2. sample measurement
3. reliability

حاصل می‌شود و در شکل کامل‌تر خود آن را «توزیع نمونه‌گیری آماره»[1] می‌گویند. شناخت توزیع نمونه‌گیری آماره به آمارگر اجازه می‌دهد که از میان آماره‌های مختلف بهترین را برای تخمین پارامتر مورد نظر انتخاب کند. همچنین کمک می‌کند که ضمن تعیین محدودیتهای برآوردکننده[2]، درجهٔ خطای برآورد نیز تعیین شود.

قبل از ورود به بحث توزیع آماره و خواص آن، ابتدا ضرورت و روشهای نمونه‌گیری را ـ که الفبای هر نوع کاربرد آمار استنباطی است ـ بررسی می‌کنیم و سپس به‌تفصیل به موضوع توزیعهای نمونه‌گیری می‌پردازیم.

۱ـ۹ دلایل نمونه‌گیری

دلایل مختلفی وجود دارد که معمولاً محققان از سرشماری کل جامعه صرف‌نظر کرده، به تعداد معدودی از عناصر جامعه ـ یعنی نمونه ـ اکتفا می‌کنند. این دلایل در پنج دسته به شرح زیر طبقه‌بندی شده‌اند:

۱. هزینه: اغلب نمونه می‌تواند اطلاعات قابل اعتماد و مفیدی با هزینه‌ای کمتر از سرشماری فراهم کند. مثلاً هزینهٔ سرشماری همهٔ مدیران به منظور کسب اطلاعاتی در خصوص شیوهٔ مدیریت آنها زیاد است، درحالی که انتخاب نمونه‌ای علمی از جامعه مدیران می‌تواند با کسری از این هزینه، داده‌هایی با قابلیت اعتماد کافی فراهم کند.

۲. به روز بودن[3]: نمونه اغلب اطلاعاتی بهنگام‌تر از سرشماری به دست می‌دهد؛ زیرا داده‌های کمتری جمع‌آوری و تجزیه و تحلیل می‌شوند. این جنبه از نمونه، به‌خصوص زمانی که اطلاعات برای تصمیم‌گیری سریع مورد نیاز باشد، اهمیت بیشتری می‌یابد. برای مثال، چنانچه هدف بررسی خط تولید برای کنترل آن باشد، بررسی کیفیت کل محصولات تولیدشده در یک روز غیرممکن به نظر

---

1. statistic sampling distribution (SSD)
2. estimator
3. up to date

می‌رسد، مگر اینکه در مدت تولید، نمونه‌های لازم انتخاب شود.

۳. درستی: نمونه اغلب اطلاعاتی به درستی سرشماری و یا حتی درست‌تر از آن فراهم می‌کند؛ زیرا خطاهای جمع‌آوری داده‌ها را در یک کار تحقیقی کوچک بهتر از یک کار تحقیقی بزرگ می‌توان کنترل کرد. بنابراین با استفاده از نمونه‌گیری می‌توان به نیروهای محقق آموزش لازم را داد و آنها را راحت‌تر از سرشماری کنترل کرد.

۴. زمان: سرشماری کل جامعه آماری به زمان طولانی نیاز دارد، به‌طوری که گاهی زمان تحقیق و دسترسی به عناصر جامعه به اندازه‌ای طولانی است که کاربرد آن را منتفی می‌سازد. به همین جهت با انتخاب نمونه‌ای از جامعه می‌توان با زمان کمتر اطلاعات تفصیلی‌تری به دست آورد.

۵. آزمون تخریب‌کننده: وقتی آزمونی موجب خراب‌شدن یک کالا می‌شود، باید نمونه‌گیری را به کار برد. این امر در صنایع نظامی که کنترل کیفیت کالا با تخریب همراه است، بیشتر مصداق دارد. برای مثال، مدیر تولید کارخانهٔ تولید لامپ اگر بخواهد پس از کنترل برای فروش نیز لامپی بماند باید از نمونه استفاده کند.

۲ـ۹ روشهای نمونه‌گیری

صرف‌نظر از اینکه استفاده از چه روش آمار استنباطی مورد نظر است، قدرت آن روش بستگی به روشی دارد که برای انتخاب نمونه به کار می‌رود. درصورتی که نمونه، نماینده واقعی جامعه نباشد یا به عبارتی دارای اریبی[1] باشد، پیش‌بینی صحیح و دقیق دربارهٔ پارامتر(های) جامعه امکان نخواهد داشت.

اریب در نمونه‌گیری را می‌توان با به کاربردن روشهای نمونه‌گیری صحیح و مناسب و با درنظرگرفتن مشخصات عناصر جامعه کاهش داد. به دیگر سخن، استنباط با استفاده از چنین نمونه‌هایی دارای پایایی خواهد بود. این امر صرفاً بدین دلیل است که اصول نمونه‌گیری تصادفی، اساس نظریه آمار استنباطی را شکل

1. bias

می‌دهند و بر پایه شانس و احتمال بنا شده‌اند. روشهای نمونه‌گیری که در ذیل دربارهٔ آنها بحث خواهیم کرد روشهای مناسبی برای نمونه‌گیری تصادفی‌اند.

۱. نمونه‌گیری تصادفی ساده

در نمونه‌گیری تصادفی ساده هر یک از عناصر جامعهٔ مورد نظر برای انتخاب شدن، شانس مساوی دارند. در این روش، افراد یا اشیای مورد نیاز از فهرست جامعه آماری‌ای که به همین منظور شماره‌گذاری و تهیه شده است به صورت تصادفی انتخاب می‌شوند. مطابق قانون احتمال، افراد انتخاب شده باید دارای ویژگیهایی همانند جامعه‌ای باشند که از آن انتخاب شده‌اند.

نمونه‌گیری تصادفی ساده را می‌توان به روشهای مختلف انجام داد. دو گونه از این روشها بدین شرح‌اند:

الف) قرعه‌کشی: قرعه‌کشی با هر یک از روشهای معمول آن نوعی نمونه‌برداری است. مثلاً اگر بخواهیم از میان ۶۰ نفر نمونه‌ای ۱۲ نفری به روش تصادفی انتخاب کنیم، کافی است نام یا شمارهٔ ردیف این عده را بدون رعایت ترتیب خاصی روی ۶۰ کارت مختلف بنویسیم و کارتها را در یک جعبه قرار دهیم. سپس کارتها را مخلوط کرده، ۱۲ کارت را یکی پس از دیگری انتخاب کنیم.

ب) جدول اعداد تصادفی: فراهم آوردن وسایل قرعه‌کشی بی‌نقص، مخصوصاً در گروههای بزرگ کار آسانی نیست و به جای آن می‌توان از جدول اعداد تصادفی[1] استفاده کرد. در جدول اعداد تصادفی ارقام ۰ تا ۹ در تعدادی سطر و ستون گردآوری شده‌اند. ترتیب استخراج و تنظیم این اعداد به صورت کاملاً تصادفی با روشها و وسایلی مانند قرعه‌کشی و رایانه انجام می‌گیرد. نمونه‌ای از چنین مجموعهٔ تصادفی اعداد را می‌توان در جدول ۱ پیوست همین کتاب ملاحظه کرد که با صد سطر و ده ستون در دو صفحه فراهم شده است. تنظیم اعداد در گروههای

1. random digits table

۵×۵ فقط بدین منظور است که بتوان اعداد را به آسانی خواند. خاصیت اصلی این جدول آن است که احتمال پیش آمدن ارقام ۰ تا ۹ در هر نقطهٔ آن (در هر سطر یا ستون یا گروه چند در چند آن) برای همهٔ ارقام یکسان و مقداری ثابت است.

روش استفاده از این جدول را برای تشکیل نمونهٔ تصادفی با مثال N=۶۰ و n=۱۲ شرح می‌دهیم. مراحل نمونه‌برداری عبارت‌اند از:

مرحله اول: افراد جامعه را از ۱ تا N شماره‌گذاری کنید. بهتر است این شماره‌گذاری بدون رعایت ترتیب خاصی انجام گیرد.

مرحله دوم: به‌طور تصادفی عددی را به عنوان مبدأ نمونه‌برداری در جدول انتخاب کنید. برای مثال عدد ۴ که در تقاطع سطر ۱۲ و ستون ۵ (جدول ۱ پیوست) واقع شده است.

مرحله سوم: از مبدأ نمونه‌برداری ردیفهایی به تعداد ارقام N در نظر بگیرید. در این مثال چون N دو رقمی است ردیفهای دوتایی را انتخاب کنید، ولی ساده‌تر آن است که ابتدا ردیفهای عمودی و مجاور هم به کار روند. سپس از ردیف دو ستونی‌ای که با اعداد ۴۹، ۸۸ و ۴۸ شروع می‌شود، استفاده کنید.

مرحلهٔ چهارم: باید اعداد ردیفهای انتخابی را به ترتیب خواند. N عدد متناسب با شماره‌گذاری جامعه، شماره ردیف افرادی را نشان می‌دهد که باید در نمونه انتخاب شوند. عدد متناسب، عددی است که در فاصلهٔ ۱ تا N واقع شده است. پس در این مثال به ۴۹، ~~۸۸~~، ۴۸، ~~۷۷~~، ~~۷۷~~، ~~۸۹~~، ۳۱، ۲۳، ۴۲، ۰۹، ۴۷، ۱۳، ۵۸، ۱۹، ۲۴ و ۴۶ توجه داشته باشید که:

اول، اعدادی مانند ۸۸، ۷۷ و ۸۹ را که خارج از دامنهٔ شماره‌گذاری جامعه‌اند به حساب نیاورید.

دوم، هر عدد مکرر را فقط یک بار به حساب آورید.

سوم، اگر عدد N ضریب کامل ۱۰ باشد ($۱۰۰=۱۰^۲$، $۱۰۰۰=۱۰^۳$ و غیره) باید تعداد ستونها را یک واحد کمتر از N در نظر گرفت. مثلاً در جامعهٔ ۱۰۰ نفری می‌توان با دو ستون اعداد تصادفی نمونه‌برداری کرد و عدد ۰۰ را به جای شماره

۱۰۰ پذیرفت. این روش ساده‌تر به منزلهٔ این است که افراد جامعه به جای ۱ تا N از ۰ تا N-۱ شماره‌گذاری شوند.

یکی از مشکلات این روش، تهیه و تدوین فهرست افراد جامعهٔ آماری است، چرا که در بسیاری از موارد چنین کاری قبلاً انجام نشده است.

۲. نمونه‌گیری سیستماتیک[1]

روش نمونه‌گیری منظم، روش تغییر شکل‌یافتهٔ نمونه‌گیری تصادفی ساده است. در این روش عناصر نمونه از فهرست افراد یا اعضای جامعه آماری که به همین منظور آماده شده است انتخاب می‌شوند. برای مثال فرض کنید از جامعه‌ای که ۲ هزار عضو دارد می‌خواهیم ۱۰۰ عضو را انتخاب کنیم. نمونه مورد نظر را می‌توان از روی فهرست، ۲۰ نفر، ۲۰ نفر انتخاب کرد (۲۰ = ۱۰۰ ÷ ۲۰۰۰). نقطهٔ شروع نمونه‌گیری عبارت است از هر عضوی که دارای شماره مساوی یا کوچک‌تر از ۲۰ است؛ این نقطه به صورت تصادفی انتخاب می‌شود.

این روش برای آن دسته از جوامع آماری که کد از پیش تعیین شده و مرتبی دارند (همانند شماره کارمندی، دانشجویی و پلاک منازل) کاربرد فراوان دارد. با مشخص شدن اولین عضو نمونه، سایر اعضای نمونه در این روش معین می‌شوند. این خاصیت از یک سو یکی از محاسن روش تلقی و از سوی دیگر موجب از دست رفتن شانس انتخاب برای سایر اعضای جامعه می‌شود. به عبارت دیگر، خاصیت تصادفی بودن عناصر نمونه برخلاف روش نمونه‌گیری تصادفی ساده با علامت سؤال (؟) همراه است.

۳. نمونه‌گیری طبقه‌بندی شده[2]

برای بیشتر کردن شباهت نمونه و جامعه و افزایش دقت نمونه‌برداری برای برآورد

1. systematic sampling
2. stratified sampling

پارامترهای جامعه و دخالت دادن ویژگیهای جامعه در نمونه، در این روش، جامعه به گروههای متجانس تقسیم و هر گروه از افرادی تشکیل می‌شود که ویژگیهای مشابه دارند. پس از تقسیم جامعه به گروههای متجانس، تعداد نمونه نسبت به هر گروه مشخص و سپس با استفاده از روش نمونه‌گیری تصادفی ساده یا منظم، تعداد عناصر مورد نیاز از هر گروه انتخاب می‌شود. از این روش هنگامی استفاده می‌شود که محقق اطمینان داشته باشد که اعضای جامعه مورد بررسی، از نظر یک‌سری ویژگیها (صفات) با هم متفاوت باشند. در روش نمونه تصادفی ساده، به این ویژگیها توجهی نمی‌شود.

مثال ۱ـ۹ هدف از این مثال، تحقیق و بررسی وضعیت عملکرد واحدهای مختلف سازمان است. مدیریت سازمان اعتقاد دارد که میزان عملکرد تحت تأثیر واحد سازمانی است. در این تحقیق تعداد کارمندان در هر واحد چنین مشخص شده‌اند: واحد مالی ۱۸۰ نفر، واحد اداری ۲۲۸ نفر، واحد تولید ۱۳۳ نفر و واحد خدمات ۵۹ نفر.

بررسیها نشان می‌دهد که باید یک نمونهٔ ۸۰ نفره را از کل سازمان انتخاب و تعداد نمونه‌ها را برحسب هر گروه (واحد) مشخص کرد.

از آنجا که مدیریت به تأثیر واحد کاری بر عملکرد اعتقاد دارد پس باید نسبت کارمندان هر واحد به کل کارمندان سازمان را در نمونهٔ ۸۰ تایی رعایت کرد. حاصل عملیات نمونه‌گیری گروهی برای تعیین عناصر نمونهٔ هر گروه در جدول ۱ـ۹ آمده است.

جدول ۱ـ۹ جدول تعیین نمونه‌های مورد نیاز در هر واحد

نماد	واحد مالی	واحد اداری	واحد تولید	واحد خدمات	جمع
N_k (تعداد افراد در هر گروه جامعه)	۱۸۰	۲۲۸	۱۳۳	۵۹	$N=$ ۶۰۰
$p_k=\frac{N_k}{N}$ (نسبت افراد در هر گروه جامعه)	٪۳۰	٪۳۸	٪۲۲	٪۱۰	٪۱۰۰
$n_k=p_k\times n$ (تعداد افراد نمونه در هر گروه)	۲۴	۳۰	۱۸	۸	$n=$ ۸۰

چنان‌که مشخص است براساس سطر آخر جدول ۱ـ۹ باید از واحد مالی ۲۴ نفر، اداری ۳۰ نفر، واحد تولید ۱۸ نفر و خدمات ۸ نفر را به عنوان نمونه انتخاب کرد.

۴. نمونه‌گیری خوشه‌ای[1]

هرگاه جامعه مورد بررسی خیلی وسیع و گسترده باشد و تهیه فهرست تمامی اعضای جامعه امکان‌پذیر نباشد انتخاب نمونه از نظر اجرایی مشکل به نظر می‌رسد. برای مثال، فرض کنید می‌خواهیم میزان تحصیلات کارمندان یک شهر بزرگ را بررسی کنیم. انتخاب نمونه با استفاده از روشهای مذکور دشوار است و به دقت و هزینه زیاد نیاز دارد؛ اما با استفاده از نمونه‌گیری خوشه‌ای می‌توان واحد نمونه‌گیری را «سازمان» تعریف کرد. ابتدا چند سازمان (خوشه) را به صورت نمونه‌گیری تصادفی ساده یا سامان‌مند و سپس کارمندان مورد نیاز را از بین این سازمانها انتخاب می‌کنیم. تفاوت روش نمونه‌گیری گروهی و خوشه‌ای در این است که در روش گروهی تهیه فهرست اعضای جامعه (چهارچوب نمونه‌گیری) امکان‌پذیر است ولی در خوشه‌ای این کار مقدور نیست.

۵. نمونه‌گیری مرحله‌ای

نمونه‌گیری مرحله‌ای[2]، شکل گسترش‌یافتهٔ نمونه‌گیری خوشه‌ای است. در این روش عناصر نمونه اصلی طی چند مرحله انتخاب می‌شوند؛ یعنی انتخاب نمونه از نمونهٔ دیگر. مثلاً می‌توان در مثال نمونه‌گیری خوشه‌ای، ابتدا چند سازمان را به‌طور تصادفی از یک شهر برگزید و سپس از بین هر سازمان چند واحد سازمانی را معین و پس از آن عناصر نمونه را از هر واحد به‌طور تصادفی انتخاب کرد. به‌طور کلی باید گفت در روش نمونه‌گیری مرحله‌ای، در هر مرحله یک شرط بر روی اعضای جامعه گذاشته می‌شود و به این طریق نمونه مورد نظر را انتخاب می‌کنند.

1. cluster sampling
2. stage sampling

۳ـ۹ روش نمونه‌گیری تصادفی ساده با جای‌گذاری و بدون جای‌گذاری

اگر در یک جامعهٔ آماری با N عضو، یک نمونه تصادفی به حجم n انتخاب شود، چنانچه هر یک از عناصر نمونه پس از انتخاب و یادداشت صفت مورد نظر مجدداً به جامعه برگردد و دوباره نمونه بعدی انتخاب شود، این رویه اگر تا انتخاب n امین عضو نمونه ادامه داشته باشد به نمونه‌گیری تصادفی ساده «با جای‌گذاری» معروف است. واضح است که در این روش احتمال انتخاب هر یک از عناصر نمونه از جامعهٔ آماری مساوی $\frac{1}{N}$ است.

حال چنانچه عناصر نمونه، پس از انتخاب، دیگر به جامعه برنگردند و این رویه تا انتخاب n امین عضو نمونه ادامه داشته باشد، آن را نمونه‌گیری تصادفی ساده «بدون جای‌گذاری» می گویند. واضح است که احتمال انتخاب اولین عضو نمونه $\frac{1}{N}$، دومین عضو نمونه $\frac{1}{N-1}$ و سرانجام n امین عضو نمونه $\frac{1}{N-n+1}$ است. طبیعی است در نمونه‌گیری با جای‌گذاری امکان انتخاب یک فرد برای چندین مرتبه وجود دارد، اما در نمونه‌گیری بدون جای‌گذاری امکان تکرار یک عضو از جامعه هرگز وجود ندارد.

احتمالاً در نظر اول، نمونه‌گیری با جای‌گذاری به هیچ وجه معقول به نظر نمی‌آید. چرا باید به یک عضو جامعه که قبلاً در نمونه بوده است شانس اضافی داد؟ از نظر جمع‌آوری اطلاعات این عمل در واقع دوباره‌کاری محض است و همان‌طور که مشخص است در نمونه‌گیری با جای‌گذاری دقت هم کمتر می‌شود. با این حال، نمونه‌گیری با جای‌گذاری به دو دلیل مهم است: ۱) اگر در جریان نمونه‌برداری از بابت دوباره‌کاری آسوده‌خاطر باشیم، زحمات ما خیلی کمتر می‌شود (به‌خصوص این امر در نمونه‌های بزرگ صادق است) و ۲) دلیل اصلی این است که همین اندک تغییری که در روش خود می‌دهیم باعث می‌شود که نمونه‌گیری و محاسبات آن آسان‌تر و بدین وسیله امکان بررسی روشهای پیچیده‌تر نمونه‌گیری نیز میسر شود. خلاصه آنکه اگر یک روش در حالت «طبیعی» به محاسبات پیچیده‌ای

نیاز داشته باشد و ما بتوانیم با یک تغییر جزئی از آن اجتناب کنیم، این تغییر صورت خواهد گرفت.

به‌طور کلی، اگر نمونه‌گیری با جای‌گذاری انجام پذیرد مشاهدات تصادفی X_1، X_2، ...، X_n مستقل خواهند بود. در جامعه‌های بزرگ حتی اگر نمونه‌گیری بدون جای‌گذاری انجام گیرد در عمل، شبیه نمونه‌گیری با جای‌گذاری است؛ به‌طوری که باز هم اساساً استقلال برقرار است. نمونه‌گیری از جامعه‌های بزرگ را «نمونه‌گیری از جامعه نامحدود» گویند که براساس این قاعده تعریف می‌شود:

$$\frac{n}{N} \leq \%5 \qquad (۹\text{-}۱)$$

چنانچه رابطهٔ ۱ـ۹ برقرار نباشد، حجم نمونه نسبت به جامعه آنقدر بزرگ است که می‌توانیم آن را «نمونه‌گیری از جامعه محدود» بنامیم.

در نمونه‌گیری از جامعه کوچک - با فرض بدون جای‌گذاری - مشاهدات را نمی‌توان مستقل از هم فرض کرد. در تمامی بحثهای کاربردی این کتاب تعریف ما از نمونه همان نمونه تصادفی ساده با جای‌گذاری (نمونه‌گیری از جامعه نامحدود) است که تعریف ریاضی آن چنین می‌شود:

نمونهٔ تصادفی ساده شامل n متغیر تصادفی X_1، X_2، ...، X_n مستقل از یکدیگر است که هر یک از آنها توزیعی همانند توزیع جامعهٔ آماری دارند.

تمرین

۱. تفاوت نمونه‌گیری گروهی با نمونه‌گیری خوشه‌ای را ذکر کنید.

۲. توضیح دهید در چه صورتی می‌توان نمونه‌گیری بدون جای‌گذاری را همانند نمونه‌گیری با جای‌گذاری تلقی کرد؟

۳. صدا و سیما در نظر دارد براساس یک نمونه‌گیری تصادفی، متوسط زمانی را که ساکنان منطقه به‌خصوصی روزانه صرف تماشای تلویزیون می کنند، برآورد کند. با توجه به سرشماری اخیر ۱ میلیون نفر در این منطقه ساکن‌اند. از این تعداد ۳۰۰

هزار نفر مرد، ۳۲۵ هزار نفر زن و مابقی کودک هستند. با بودجه‌ای که صدا و سیما به این امر اختصاص داده است می‌توان نمونه‌ای مرکب از ۱۰ هزار نفر را انتخاب کرد. مطالعات مشابهی که در سایر مناطق شده است نشان می‌دهد متوسط زمانی که مردان، زنان و کودکان صرف تماشای تلویزیون می‌کنند کاملاً با یکدیگر متفاوت است.

الف) به نظر شما در این نمونه ۱۰ هزار نفری چه تعداد مرد و زن و کودک باید وجود داشته باشند؟

ب) اگر بین متوسط زمانی که مردان، زنان و کودکان صرف تماشای تلویزیون می‌کنند اختلافی وجود نداشته باشد، پیشنهادی که در بند الف کرده‌اید باز هم مورد دارد؟ چرا؟

ج) چه روش نمونه‌گیری را برای بند ب پیشنهاد می‌کنید و به چه دلایلی؟

۹ـ۴ توزیعهای نمونه‌گیری

برای استنباط هر پارامتر جامعه باید از یک آماره استفاده کرد. بنابراین متناظر با هر پارامتری یک آماره وجود دارد که خود یک متغیر تصادفی است. چنان‌که گفتیم هر آماره‌ای دارای یک توزیع نمونه‌گیری (تابع احتمال) است. تابع احتمال یک آماره، تابعی است که براساس نمونه‌های تصادفی n تایی که به‌طور مکرر از جامعهٔ آماری انتخاب شده است به دست می‌آید. این تابع را «توزیع نمونه‌گیری آماره» گویند.

توزیع نمونه‌گیری یک آماره به توزیع جامعه‌ای بستگی دارد که نمونه از آن حاصل شده و ممکن است به‌طور ریاضی و یا تقریب تجربی استنباط شود. زمانی که توزیع نمونه‌گیری، به‌طور تجربی تقریب زده می‌شود، چنانچه اندازه نمونه[1] n تایی بزرگ باشد، آماره محاسبه‌شده از نمونه‌های مکرر که به صورت بافت‌نگار فراوانی نسبی ترسیم می‌شود، ممکن است تقریب بسیار خوبی برای توزیع نمونه‌گیری واقعی باشد.

1. sample size

هر گونه استنباط از آماره به توزیع آن بستگی دارد. توزیع آماره نشان‌دهنده رفتار آن در نمونه‌گیریهای مکرر است. توزیع نمونه‌گیری مشخص می‌کند که آیا آمارهٔ به کار رفته تناسب لازم را با پارامتر مورد نظر دارد یا خیر؟ آیا آماره‌ای بهتر از آن وجود ندارد؟

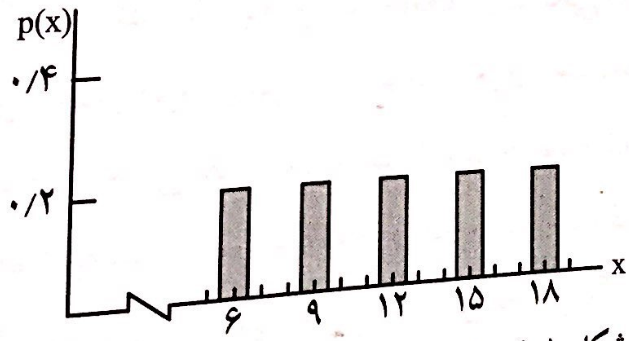
سعی خواهیم کرد با تشریح یک مثال ساده پاسخ مناسبی به سؤالات فوق دهیم. یکی از روشهای نمونه‌گیری، نمونه‌گیری تصادفی ساده است. در این روش، شانس انتخاب هر یک از عناصر جامعهٔ آماری در نمونهٔ n تایی یکسان است. برای انتخاب یک نمونهٔ n تایی بدون جای‌گذاری از یک جامعهٔ N عضوی، $\binom{N}{n}$ نمونهٔ ممکن وجود دارد. با این توصیف شانس انتخاب هریک از نمونه‌های n تایی عبارت از $\frac{1}{\binom{N}{n}}$ خواهد بود.

مثال ۲ـ۹ فرض کنید یک جامعهٔ آماری ۵ عضوی با مقادیر ۶، ۹، ۱۲، ۱۵ و ۱۸ وجود دارد. جامعه دارای ۵ عضو مجزاست که احتمال رخداد هر یک از آنها $\frac{۱}{۵}$ خواهد بود؛ بنابراین:

$$f(x)=۰/۲۰ \;،\; x = ۶، ۹، ۱۲، ۱۵، ۱۸$$

تابع احتمال فوق در شکل ۱ـ۹ به صورت بافت‌نگار رسم شده است. از آنجا که هریک از مقادیر جامعه احتمال یکسان $\frac{۱}{N}$ دارد، پس میانگین جامعه عبارت است از:

$$\mu_x = \frac{\Sigma x_i}{N} = \frac{۶۰}{۵} = ۱۲$$



شکل ۱ـ۹ تابع احتمال برای یک جامعه با ۵ مشاهده

همچنین واریانس جامعه برابر است با:

$$\sigma_x^۲=\frac{\Sigma(x_i-\mu_x)^۲}{N}=\frac{۹۰}{۵}=۱۸$$

به علاوه میانه جامعه (Md) مساوی ۱۲، یعنی با میانگین جامعه برابر است.

با انتخاب یک نمونهٔ تصادفی ۳ تایی از جامعهٔ فوق، تعداد نمونه‌های ۳ تایی ممکن عبارت است از:

$$\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{۳!(۵-۳)!}=۱۰$$

هر یک از ۱۰ نمونهٔ ممکن در جدول ۲ـ۹ آمده است. میانگین، میانه و واریانس هر یک از نمونه‌های ۳ تایی محاسبه‌شده و در جدول مشخص است. در این جدول $\bar{X}$ آماره μ_x، md آمارهٔ میانه جامعه و $S_x^۲$ آماره $\sigma_x^۲$ است. حال به تعریف ریاضی هریک از این آماره‌ها می‌پردازیم:

$\bar{X}$ که آماره میانگین واقعی جامعه است، از حاصل تقسیم مجموع عناصر نمونه بر تعداد عناصر نمونه به دست می‌آید؛ یعنی:

$$\bar{X}=\frac{\Sigma x_i}{n} \qquad (۲\text{ـ}۹)$$

md بیان‌کنندهٔ ارزش عددی وسط عناصر مرتب‌شدهٔ نمونه است که آماره Md محسوب می‌شود.

جدول ۲ـ۹ مقادیر $\bar{X}$، md و $S_X^۲$ یک نمونهٔ تصادفی ۳ تایی در یک جامعهٔ ۵ تایی

نمونه	مقادیر نمونه	$\bar{X}$	md	$S_x^۲$
۱	۶ , ۹ , ۱۲	۹	۹	۹
۲	۶ , ۹ , ۱۵	۱۰	۹	۲۱
۳	۶ , ۹ , ۱۸	۱۱	۹	۳۹
۴	۶ , ۱۲ , ۱۵	۱۱	۱۲	۲۱
۵	۶ , ۱۲ , ۱۸	۱۲	۱۲	۳۶
۶	۶ , ۱۵ , ۱۸	۱۳	۱۵	۳۹
۷	۹ , ۱۲ , ۱۵	۱۲	۱۲	۹
۸	۹ , ۱۲ , ۱۸	۱۳	۱۲	۲۱
۹	۹ , ۱۵ , ۱۸	۱۴	۱۵	۲۱
۱۰	۱۲ , ۱۵ , ۱۸	۱۵	۱۵	۹

واریانس نمونه، S_x^2، نیز از مجموع مجذور انحرافات حول $\bar{X}$ تقسیم بر n-1 به دست می‌آید؛ یعنی:

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}{n-1} \quad (۹\text{-}۳)$$

از آنجا که احتمال رخداد هر یک از نمونه‌های ۳ تایی در جدول ۲ـ۹، $\frac{1}{10}$ است، پس احتمال رخداد هر یک از عناصر آماره‌ها ($\bar{X}$، md و S_x^2) نیز مساوی $\frac{1}{10}$ خواهد بود. بدین ترتیب، توزیعهای نمونه‌گیری محاسبه شدهٔ میانگین نمونه در قسمت «الف» و میانهٔ نمونه در قسمت «ب» جدول ۳ـ۹ آمده است. توجه داشته باشید که هفت مقدار متفاوت برای $\bar{X}$ و فقط سه مقدار متفاوت برای میانهٔ نمونه (md) وجود دارد.

حال فرض کنید که به انتخاب یکی از آماره‌های $\bar{X}$ و md برای تخمین پارامتر $Md = \mu_x = ۱۲$ علاقه‌مندیم؛ کدام یک از آنها را باید انتخاب کرد؟ بافت‌نگارهای احتمال برای میانه و میانگین نمونه براساس جدول ۳ـ۹ در شکل ۲ـ۹ آمده است. یکی از روشهای ساده مقایسهٔ $\bar{X}$ و md به عنوان برآوردکننده‌های ممکن $\mu_x = ۱۲$، این نکته را نشان می‌دهد که در دو میانه، دارای دو خطای ۳- = (۱۲ - ۹) و

جدول ۳ـ۹ توزیع نمونه‌گیری $\bar{X}$ و md به دست آمده از جدول ۲ـ۹

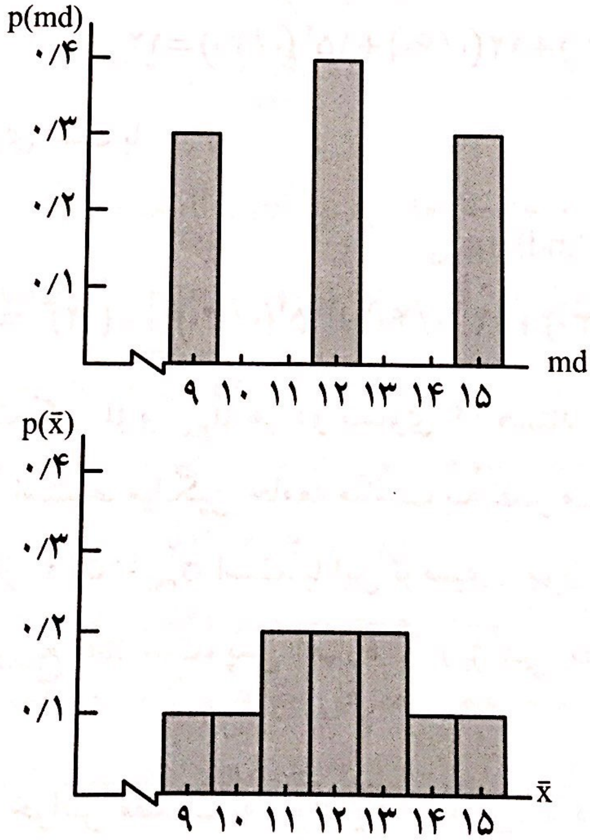
الف) میانگین نمونه		ب) میانهٔ نمونه	
$f(\bar{X})$	$\bar{X}$	f(md)	md
۰/۱۰	۹	۰/۳۰	۹
۰/۱۰	۱۰	۰/۴۰	۱۲
۰/۲۰	۱۱	۰/۳۰	۱۵
۰/۲۰	۱۲		
۰/۲۰	۱۳		
۰/۱۰	۱۴		
۰/۱۰	۱۵		

۳ = (۱۲ − ۱۵) هستیم که هر کدام از آنها دارای احتمال ۳۰ درصد است. به عبارت دیگر، کوچک‌ترین خطا، خطای ۳ واحدی با احتمال ۶۰ درصد است که بسیار بزرگ است. حال آنکه در $\overline{X}$ احتمال خطای ۳ و بیشتر فقط ۰/۲۰ است. با این قاعده برای تخمین μ_x آمارهٔ $\overline{X}$ به md اولویت پیدا می‌کند.

از آنجا که توزیعهای نمونه‌گیری مورد بحث، توابع احتمال حقیقی هستند، پس با استفاده از آنها میانگین و واریانس را محاسبه می‌کنیم. براساس داده‌های جدول ۳ـ۹ میانگین $\overline{X}$ که با $\mu_{\overline{x}}$ بیان می‌شود، عبارت است از:

$$\mu_{\overline{x}} = \Sigma \overline{X}_i f(\overline{X}_i) \qquad (۹\text{ـ}۴)$$
$$= ۹(۰/۱۰) + ۱۰(۰/۱۰) + \ldots + ۱۵(۰/۱۰) = ۱۲$$

میانگین $\overline{X}$ با میانگین واقعی جامعه، μ_x، کاملاً مساوی است؛ این امر اتفاقی نیست بلکه در هر نمونه‌گیری تصادفی تساوی $\mu_{\overline{x}}$ و μ_x برقرار است. پس می‌توان پذیرفت که:



شکل ۲ـ۹ تابع احتمال برای توزیعهای نمونه‌گیری $\overline{X}$ و md نمونه

۹ـ۵ خواص مطلوب آماره‌ها

چنان‌که در بخش قبل آمد، برای هر پارامتر تخمین‌زننده‌های مختلفی وجود دارد که باید بهترین آنها برای استنباط پارامتر انتخاب شود. برای مثال برای μ_x دو برآوردکننده $\bar{X}$ و md وجود داشت که میانگین هر دو آنها با μ_x مساوی بود، ولی آنچه $\bar{X}$ را بر md ارجح کرد پراکندگی کمتر آن بود. حال برای تعمیم مطلب، پارامتر دلخواهی از جامعه، مثلاً θ را در نظر می‌گیریم و برآوردکننده (آمارهٔ) آن را با $\hat{\theta}$ نشان می‌دهیم و سرانجام به خواص مطلوب آماره‌ها می‌پردازیم.

۱. نااریب (بدون تورش)[1]

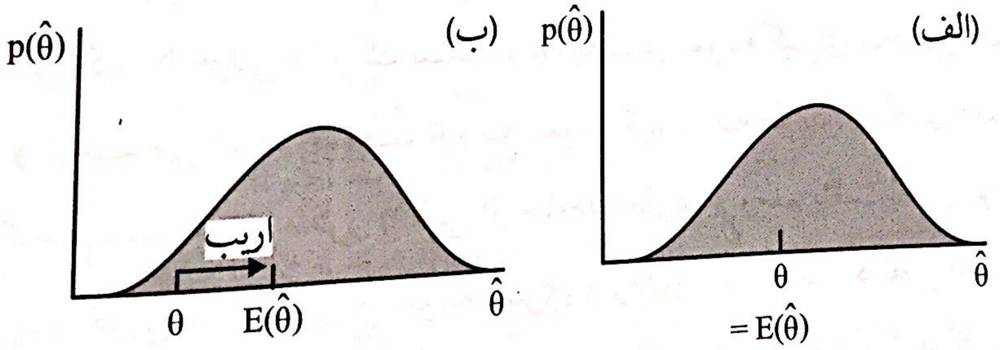
اگر میانگین $\hat{\theta}$، چنان‌که شکل ۳ـ۹ الف نشان می‌دهد، به‌طور دقیق بر θ (پارامتر واقعی) منطبق باشد، $\hat{\theta}$ برآوردکننده‌ای نااریب خوانده می‌شود. حال تعریف را به‌طور رسمی بیان می‌کنیم:

$\hat{\theta}$ برآوردکنندهٔ نااریب θ است اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$E(\hat{\theta})=\theta \qquad (۹\text{ـ}۱۰)$$

البته برآوردکنندهٔ $\hat{\theta}$ اریب نامیده می‌شود اگر $E(\hat{\theta})$ با θ متفاوت باشد. در واقع، اریب به عنوان این تفاوت تعریف می‌شود:

$$\text{اریب}=E(\hat{\theta})-\theta \qquad (۹\text{ـ}۱۱)$$



شکل ۳ـ۹ مقایسهٔ الف، برآوردکنندهٔ نااریب، با ب، برآوردکنندهٔ اریب

1. unbiasedness

شکل ۳ـ۹ ب اریب را نشان می‌دهد و در آن توزیع $\hat{\theta}$ «دور از هدف» است؛ چون $E(\hat{\theta})$ از θ بزرگ‌تر است. $\hat{\theta}$ گرایش به این دارد که θ را زیادتر برآورد کند؛ برای مثال از برآوردکنندهٔ اریب، میانگین توان دوم انحراف نمونه را در نظر بگیرید:

$$\text{میانگین توان دوم انحراف نمونه} = \frac{1}{n}\Sigma(x_i - \bar{X})^2 \qquad (۹\text{ـ}۱۲)$$

این برآوردکننده، به‌طور متوسط، واریانس جامعه (σ_x^2) را کمتر از واقع برآورد خواهد کرد. اما اگر به جای n در مخرج از ۱ − n استفاده کنیم، رابطهٔ ۳ـ۹ به دست می‌آید که برآوردکنندهٔ نااریب برای (σ_x^2) است.

در یک جامعهٔ نرمال، میانگین نمونه و میانهٔ نمونه هر دو برآوردکننده‌های نااریب μ_x هستند. پس، هنگام قضاوت دربارهٔ اینکه کدام یک مرجح است، باید ویژگیهای دیگرشان را بررسی کرد.

۲. حداقل واریانس[1]: کارایی برآوردکننده‌های نااریب

همچنان که مایل‌ایم میانگین $\hat{\theta}$ بر θ منطبق باشد، علاقه‌مندیم که توزیع برآوردکنندهٔ $\hat{\theta}$ به‌شدت متمرکز باشد؛ یعنی واریانس کوچکی داشته باشد. این مفهوم کارایی در شکل ۴ـ۹ آمده است. $\hat{\theta}_1$ را برآوردکننده‌ای کاراتر می‌نامیم، زیرا واریانس کوچک‌تری دارد. کارایی نسبی دو تخمین‌زننده به‌طور رسمی بدین صورت تعریف می‌شود:

اگر $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ دو برآوردکنندهٔ نااریب باشند.

$$\text{کارایی نسبی } \hat{\theta}_1 \text{ در مقایسه با } \hat{\theta}_2 = \frac{\sigma^2_{\hat{\theta}_2}}{\sigma^2_{\hat{\theta}_1}} \qquad (۹\text{ـ}۱۳)$$

برآوردکننده‌ای که کاراتر از هر برآوردکنندهٔ دیگر است به‌طور مطلق کارا یا فقط

1. minimal variance

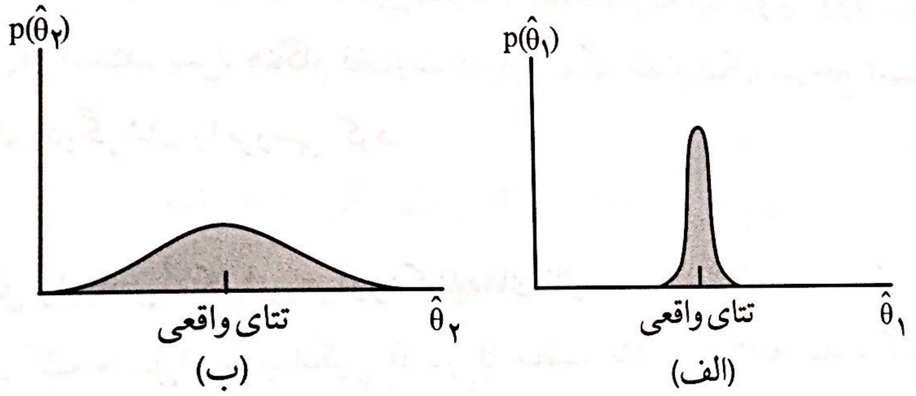
کارا نامیده می‌شود.

با این شاخص می‌توان علت ترجیح $\bar{X}$ را بر md، در بخش قبل، بالابودن کارایی دانست. کارایی $\bar{X}$ نسبت به توزیع نمونه‌گیری md بالاتر است چون:

$$\text{کارایی نسبی } \bar{X} \text{ به md} = \frac{\sigma^2_{md}}{\sigma^2_{\bar{x}}} \quad \text{یعنی} \quad \frac{5/4}{3} = 1/8$$

پس $\bar{X}$، ۱/۸ برابر از md کاراتر است.

همان طور که در شکل ۴ـ۹ ملاحظه می‌شود برآوردکننده الف (θ_1) دارای کشیدگی بیشتری (ارتفاع) نسبت به برآوردکننده ب (θ_2) است در نتیجه میزان پراکندگی θ_1 از θ_2 کمتر است.



شکل ۴ـ۹ مقایسهٔ الف، برآوردکنندهٔ کارا با ب، برآوردکنندهٔ غیرکارا (هر دو نااریب هستند).

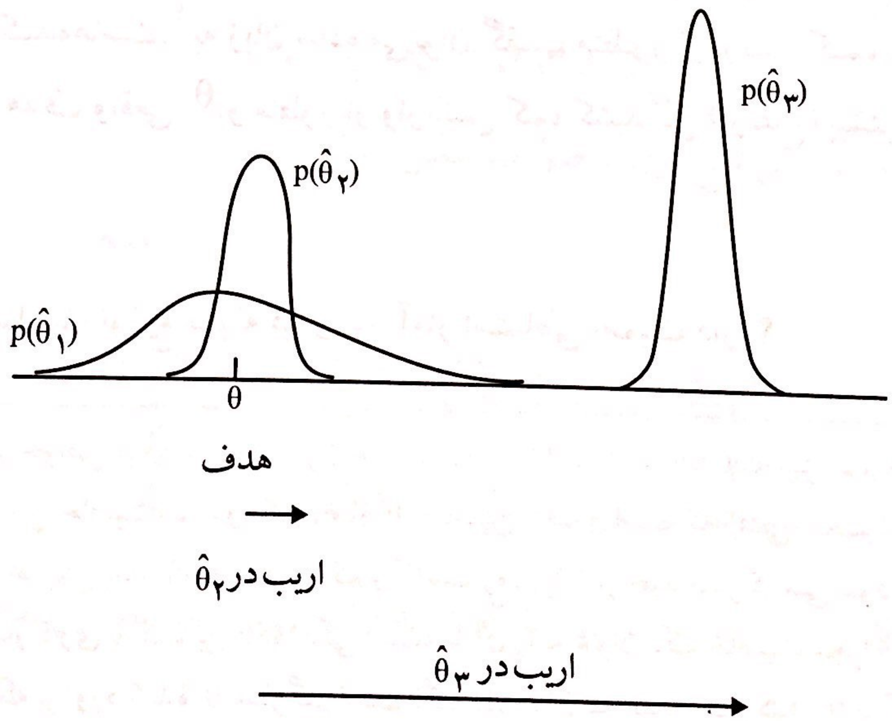
۳. حداقل میانگین مجذور خطا[1] (MSE)

تاکنون بحث شد که هنگام مقایسهٔ برآوردکننده‌های نااریب، آن را که دارای کمترین واریانس است انتخاب می‌کنیم. اما فرض کنید بخواهیم، همان‌طور که در شکل ۵ـ۹ می‌بینید، یک برآوردکننده اریب را با یک برآوردکنندهٔ نااریب مقایسه کنیم؛ اینک دیگر لزوماً برآوردکننده‌ای که دارای کمترین واریانس است،

1. mean square error

برآوردکنندهٔ مناسب نیست؛ $\hat{\theta}_۳$ این امتیاز را دارد امّا رضایت‌بخش نیست، چون به مقدار زیادی اریب است. همچنین لزوماً برآوردکننده‌ای که دارای کمترین اریب است، انتخاب نمی‌شود، $\hat{\theta}_۱$ دارای اریب صفر است اما به دلیل واریانس زیادش رضایت‌بخش به نظر نمی‌رسد. برآوردکننده‌ای که به نظر می‌رسد روی هم رفته بهترین عملکرد را دارد $\hat{\theta}_۲$ است، زیرا دارای بهترین ترکیب از اریب کوچک و واریانس کوچک است.

از این استدلال شهودی چنین برمی‌آید که باید ملاکی را به کار برد که هم اریب و هم واریانس را به‌طور مناسب در نظر گیرد. به دیگر سخن، می‌توان گفت ما تنها به واریانس یک برآوردکننده علاقه‌مند نیستیم، زیرا این شاخص فقط نحوهٔ پراکندگی برآوردکننده را حول میانگین آن نشان می‌دهد، بلکه به شاخص مشابهی برای نحوهٔ پراکندگی برآوردکننده در اطراف هدف واقعی (θ) نیز علاقه‌مندیم. همان‌طور که در شکل ۵ـ۹ ملاحظه می‌شود برآوردکننده $\theta_۳$ از برآوردکننده $\theta_۲$ کشیده‌تر و دارای پراکندگی کمتری است ولی به علت اینکه از هدف واقعی θ دورتر است نسبت به برآوردکننده $\theta_۲$ از ارجحیت کمتری برخوردار است.



شکل ۵ـ۹ $\hat{\theta}_۲$ به عنوان برآوردکننده‌ای که دارای بهترین ترکیب از اریب و واریانس است.

معمول‌ترین شاخص از این نوع عبارت است از:

$$MSE = E(\hat{\theta}-\theta)^۲ \tag{۹-۱۴}$$

رابطهٔ ۹-۱۴ ملاکی است که هم واریانس و هم اریب را اندازه‌گیری می‌کند. به عبارت دیگر ثابت می‌کند که:

$$MSE = \sigma^۲_{\hat{\theta}} + (\text{اریب})^۲ \tag{۹-۱۵}$$

بنابراین با استفاده از مفهوم MSE می‌توان مفهوم کارایی نسبی را برای دو تخمین‌زننده به این صورت تعمیم داد:

برای هر دو برآوردکنندهٔ $\hat{\theta}_۱$ و $\hat{\theta}_۲$ ـ خواه اریب و خواه نااریب ـ داریم:

$$\text{کارایی نسبی } \hat{\theta}_۱ \text{ در مقایسه با } \hat{\theta}_۲ = \frac{MSE(\hat{\theta}_۲)}{MSE(\hat{\theta}_۱)} \tag{۹-۱۶}$$

رابطهٔ ۹-۱۳ حالت خاصی از رابطهٔ ۹-۱۶ است. خلاصه آنکه، مفهوم کارایی آن‌طورکه در رابطهٔ ۹-۱۶ تعریف شد چون ترکیبی از دو خاصیت جالب اریب کم و واریانس کم را دربردارد، مهم‌ترین ملاک برای قضاوت دربارهٔ برآوردکننده‌هاست.[1] به زبان ساده می‌توان گفت منظور از اریب کم، نزدیک‌تر بودن به هدف واقعی θ و منظور از واریانس کم، کشیدگی (ارتفاع) بیشتر است.

تمرین

۱. چرا شناخت توزیع نمونه‌گیری در آمار استنباطی اهمیت دارد؟

---

۱. علاوه بر خواص فوق در برخی متون به خاصیت سازگاری (consistency) نیز اشاره شده است. براساس این خاصیت، برآوردکنندهٔ سازگار، تخمین‌زننده‌ای است که وقتی حجم نمونه به‌طور نامتناهی افزایش یابد $(n \to \infty)$، بی‌کم و کاست روی پارامتر خود متمرکز می‌شود. از آنجا که مفهوم سازگاری با کمترین MSE یکی است، ما آن را به عنوان یک خاصیت مجزا ذکر نکرده‌ایم. نتیجه آنکه برآوردکنندهٔ $\hat{\theta}$ سازگار است اگر MSE آن به صفر میل کند. $\hat{\theta}$ برآوردکننده‌ای سازگار است. اگر وقتی $n \to \infty$ میل می‌کند، اریب و واریانس آن هر دو به صفر میل کنند.

۲. تفاوت بین توزیع نمونه‌گیری و توزیع جامعه را ذکر کنید.

۳. عناصر یک جامعهٔ آماری عبارت‌اند از: ۴، ۷، ۹ و ۱۲:

الف) چه تعداد نمونهٔ دوتایی می‌توان از این جامعه بدون جای‌گذاری انتخاب کرد؟

ب) تابع احتمال $\bar{X}$ را نوشته و $E(\bar{X})$ و $\sigma_{\bar{x}}^2$ را محاسبه کنید.

ج) تابع احتمال md و S^2 را نوشته و میانگین و واریانس هریک را محاسبه کنید.

د) کارایی نسبی $\bar{X}$ را در مقایسه با md محاسبه کنید.

۴. آیا $\bar{X}$ برآوردکننده‌ای سازگار برای μ_x است؟ چرا؟

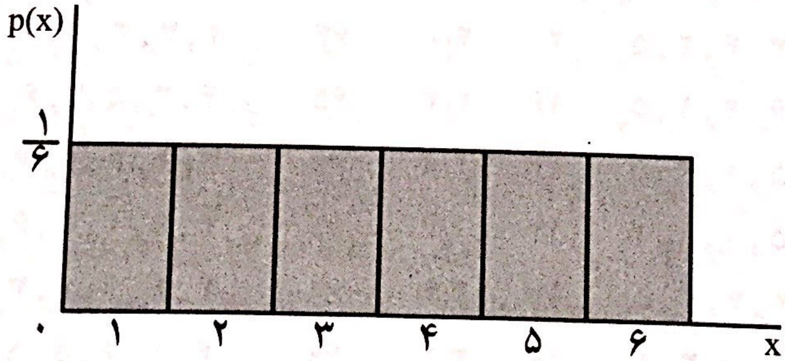
۶ـ۹ قضیهٔ حد مرکزی[1]

براساس قضیهٔ حد مرکزی، مجموع و میانگین مقادیر یک نمونهٔ تصادفی n تایی که از یک جامعهٔ آماری انتخاب می‌شوند، به‌طور تقریبی به یک توزیع نمونه‌گیری قرینه گرایش دارند. اهمیت این گزاره شاید با تشریح یک مثال بیشتر آشکار شود.

مثال ۳ـ۹ تابع احتمال مقادیر یک تاس سالم از یک توزیع یک‌نواخت به صورت ذیل تبعیت می‌کند:

$$f(x)=\frac{1}{6}\ ,\ x = 1,2,3,4,5,6$$

شکل عمومی تابع فوق به صورت شکل ۶ـ۹ است:



شکل ۶ـ۹ تابع احتمال برای X، اگر X اعداد ظاهر شده برای یک تاس باشد.

1. central limit theorem

حال اگر ۵ تاس سالم را به‌طور هم‌زمان به عنوان نمونه $(n = ۵)$ بریزیم و مقادیر را یادداشت کنیم، توزیع آماره $\bar{X}$ در آن به سمت یک توزیع قرینه میل خواهد کرد. این مثال به‌طور عملی انجام گرفته و ۵ تاس در صد نوبت ریخته شده و حاصل مشاهدات در جدول ۵ـ۹ آمده است:

جدول ۵ـ۹ نمونه‌گیری براساس ریختن ۵ تاس $(n = ۵)$

$\bar{X}$	Σx_i	مقادیر نمونه X_i	شمارهٔ نمونه	$\bar{X}$	Σx_i	مقادیر نمونه X_i	شمارهٔ نمونه
۳/۰	۱۵	۲,۳,۵,۳,۲	۵۱	۲/۸	۱۴	۳,۵,۱,۳,۲	۱
۱/۸	۹	۱,۱,۱,۲,۴	۵۲	۳/۰	۱۵	۳,۱,۱,۴,۶	۲
۴/۰	۲۰	۲,۶,۳,۴,۵	۵۳	۲/۴	۱۲	۱,۳,۱,۶,۱	۳
۱/۴	۷	۱,۲,۲,۱,۱	۵۴	۳/۴	۱۷	۴,۵,۳,۳,۲	۴
۳/۶	۱۸	۲,۴,۴,۶,۲	۵۵	۲/۸	۱۴	۳,۱,۳,۵,۲	۵
۳/۸	۱۹	۳,۲,۵,۴,۵	۵۶	۳/۲	۱۶	۲,۴,۴,۲,۴	۶
۳/۴	۱۷	۲,۴,۲,۴,۵	۵۷	۳/۸	۱۹	۴,۲,۵,۵,۳	۷
۳/۸	۱۹	۵,۵,۴,۳,۲	۵۸	۴/۶	۲۳	۳,۵,۵,۵,۵	۸
۴/۴	۲۲	۵,۴,۴,۶,۳	۵۹	۴/۶	۲۳	۶,۵,۵,۱,۶	۹
۲/۸	۱۴	۳,۲,۵,۳,۱	۶۰	۳/۸	۱۹	۵,۱,۶,۱,۶	۱۰
۲/۲	۱۱	۲,۱,۴,۱,۳	۶۱	۲/۲	۱۱	۱,۱,۱,۵,۳	۱۱
۲/۶	۱۳	۴,۱,۱,۵,۲	۶۲	۳/۴	۱۷	۳,۴,۲,۴,۴	۱۲
۲/۲	۱۱	۲,۳,۱,۲,۳	۶۳	۳/۶	۱۸	۲,۶,۱,۵,۴	۱۳
۳/۲	۱۶	۲,۳,۳,۲,۶	۶۴	۴/۰	۲۰	۶,۳,۴,۲,۵	۱۴
۴/۰	۲۰	۴,۳,۵,۲,۶	۶۵	۳/۲	۱۶	۲,۶,۲,۱,۵	۱۵
۲/۸	۱۴	۳,۱,۳,۳,۴	۶۶	۲/۸	۱۴	۱,۵,۱,۲,۵	۱۶
۴/۰	۲۰	۴,۶,۱,۳,۶	۶۷	۲/۴	۱۲	۳,۵,۱,۱,۲	۱۷
۴/۲	۲۱	۲,۴,۶,۶,۳	۶۸	۳/۴	۱۷	۳,۲,۴,۳,۵	۱۸
۴/۲	۲۱	۴,۱,۶,۵,۵	۶۹	۳/۲	۱۶	۵,۱,۶,۳,۱	۱۹
۵/۴	۲۷	۶,۶,۶,۴,۵	۷۰	۳/۲	۱۶	۱,۶,۴,۴,۱	۲۰
۳/۶	۱۸	۲,۲,۵,۶,۳	۷۱	۴/۰	۲۰	۶,۴,۲,۳,۵	۲۱
۵/۰	۲۵	۶,۶,۶,۱,۶	۷۲	۲/۸	۱۴	۱,۳,۵,۴,۱	۲۲
۳/۲	۱۶	۴,۴,۴,۳,۱	۷۳	۴/۲	۲۱	۲,۶,۵,۲,۶	۲۳

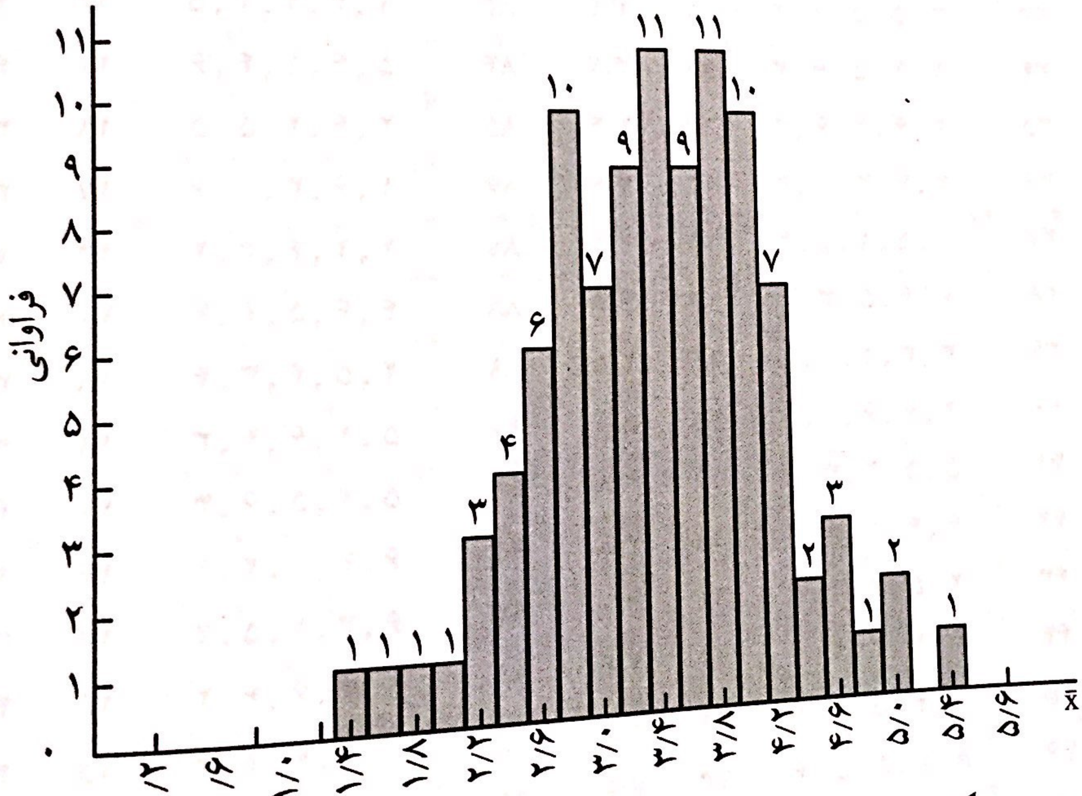
ادامه جدول ۵ـ۹

$\bar{X}$	Σx_i	مقادیر نمونه X_i	شمارهٔ نمونه	$\bar{X}$	Σx_i	مقادیر نمونه X_i	شمارهٔ نمونه
۳/۸	۱۹	۴,۴,۵,۴,۲	۷۴	۳/۴	۱۷	۳,۵,۱,۳,۵	۲۴
۳/۶	۱۸	۴,۵,۴,۱,۴	۷۵	۳/۶	۱۸	۵,۲,۴,۴,۳	۲۵
۳/۴	۱۷	۵,۳,۲,۳,۴	۷۶	۳/۰	۱۵	۶,۱,۱,۱,۶	۲۶
۲/۶	۱۳	۱,۳,۳,۱,۵	۷۷	۲/۸	۱۴	۱,۴,۱,۲,۶	۲۷
۳/۶	۱۸	۴,۱,۵,۵,۳	۷۸	۲/۴	۱۲	۳,۱,۲,۱,۵	۲۸
۴/۸	۲۴	۴,۵,۶,۵,۴	۷۹	۴/۰	۲۰	۱,۵,۵,۴,۵	۲۹
۳/۰	۱۵	۱,۵,۳,۴,۲	۸۰	۳/۸	۱۹	۴,۵,۳,۵,۲	۳۰
۴/۰	۲۰	۴,۳,۴,۶,۳	۸۱	۲/۶	۱۳	۴,۱,۶,۱,۱	۳۱
۳/۶	۱۸	۵,۴,۲,۱,۶	۸۲	۳/۲	۱۶	۳,۶,۴,۱,۲	۳۲
۲/۶	۱۳	۱,۳,۲,۲,۵	۸۳	۳/۴	۱۷	۳,۵,۵,۲,۲	۳۳
۴/۰	۲۰	۵,۴,۱,۴,۶	۸۴	۳/۲	۱۶	۱,۱,۵,۶,۳	۳۴
۳/۶	۱۸	۲,۴,۲,۵,۵	۸۵	۳/۴	۱۷	۲,۶,۱,۶,۲	۳۵
۳/۴	۱۷	۱,۶,۳,۱,۶	۸۶	۲/۶	۱۳	۲,۴,۳,۱,۳	۳۶
۲/۶	۱۳	۲,۲,۴,۳,۲	۸۷	۲/۸	۱۴	۱,۵,۱,۵,۲	۳۷
۴/۲	۲۱	۴,۴,۵,۴,۴	۸۸	۴/۶	۲۳	۶,۶,۵,۳,۳	۳۸
۳/۶	۱۸	۲,۵,۴,۳,۴	۸۹	۲/۸	۱۴	۳,۳,۵,۲,۱	۳۹
۳/۸	۱۹	۵,۱,۶,۴,۳	۹۰	۵/۰	۲۵	۲,۶,۶,۶,۵	۴۰
۴/۲	۲۱	۵,۲,۵,۶,۳	۹۱	۳/۸	۱۹	۵,۵,۲,۳,۴	۴۱
۲/۸	۱۴	۶,۴,۱,۲,۱	۹۲	۳/۸	۱۹	۶,۴,۱,۶,۲	۴۲
۳/۴	۱۷	۶,۳,۱,۵,۲	۹۳	۳/۰	۱۵	۲,۵,۳,۱,۴	۴۳
۳/۲	۱۶	۱,۳,۶,۴,۲	۹۴	۲/۴	۱۲	۴,۲,۳,۲,۱	۴۴
۳/۰	۱۵	۶,۱,۴,۲,۲	۹۵	۴/۲	۲۱	۴,۴,۵,۴,۴	۴۵
۱/۶	۸	۱,۱,۲,۳,۱	۹۶	۴/۶	۲۳	۵,۴,۵,۵,۴	۴۶
۴/۰	۲۰	۶,۲,۵,۱,۶	۹۷	۴/۲	۲۱	۶,۶,۶,۲,۱	۴۷
۲/۰	۱۰	۳,۱,۱,۴,۱	۹۸	۳/۴	۱۷	۲,۱,۵,۵,۴	۴۸
۳/۰	۱۵	۵,۲,۱,۶,۱	۹۹	۳/۸	۱۹	۶,۴,۳,۱,۵	۴۹
۳/۸	۱۹	۲,۴,۳,۴,۶	۱۰۰	۴/۰	۲۰	۴,۴,۴,۴,۴	۵۰

توجه شود که مقادیر مشاهده شده در اولین نمونهٔ ۵ تایی عبارت‌اند از:

$$x = ۳ , ۵ , ۱ , ۳ , ۲$$

آزمایش صد بار تکرار و مقادیر ۵ تاس در هر صد نوبت یادداشت شد که نتایج آن را در جدول ۵ـ۹ مشاهده کردید. این جدول نشان‌دهندهٔ $\sum_{i=1}^{5} x_i$ و $\bar{X}$ هر نمونهٔ ۵ تایی است. یک بافت‌نگار فراوانی نسبی برای $\bar{X}$ (یا برای $\sum_{i=1}^{5} x_i$) ساخته می‌شود که حاصل این عمل در شکل ۷ـ۹ آمده است. حال یک قاعدهٔ دیگر بدون اینکه اثبات شود، حاصل شده است. اگر این آزمایش با ۱۰ تاس انجام پذیرد، به‌خوبی می‌بینیم که توزیع نمونه‌گیری به یک توزیع قرینه بسیار شبیه شده است. به هر حال این قاعده بیانگر همان قضیهٔ حد مرکزی است که در آمار با آمارهٔ $\bar{X}$ بیان می‌شود.



شکل ۷ـ۹ بافت‌نگار میانگین نمونه برای آزمایش ریختن ۵ تاس (n=۵)

در قضیهٔ حد مرکزی اگر یک نمونهٔ تصادفی n تایی از یک جامعهٔ غیرنرمال با میانگین μ_x و انحراف معیار σ_x معین انتخاب شود، وقتی n بزرگ باشد، توزیع نمونه‌گیری میانگین نمونه، $\bar{X}$، تقریباً به صورت نرمال توزیع خواهد شد و این

میانگین و انحراف معیار را خواهد داشت:

$$\mu_{\bar{X}} = \mu_x \quad \text{و} \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

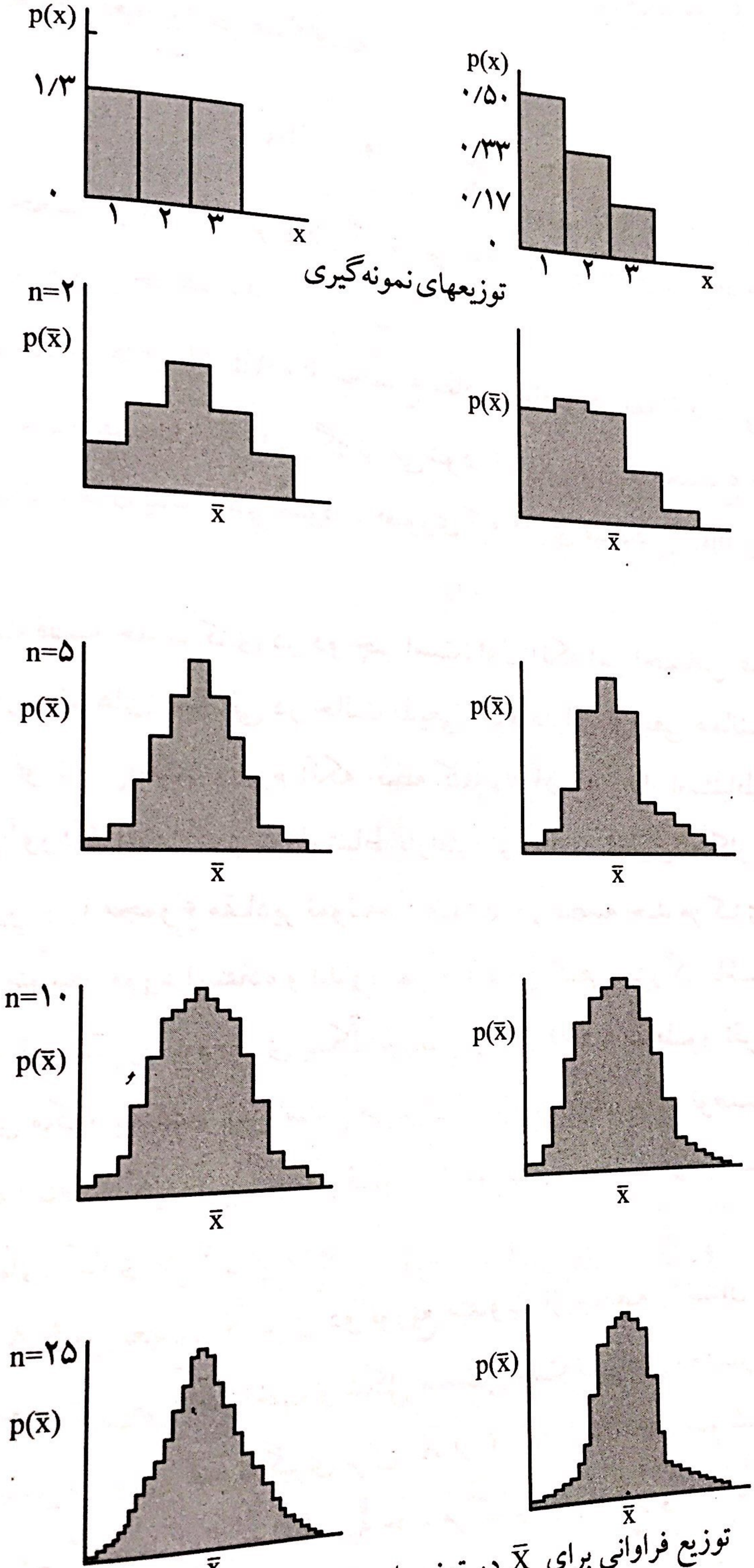
همچنان که حجم نمونه بزرگ‌تر و بزرگ‌تر می‌شود، تقریب بیشتر و بیشتر به نرمال نزدیک شده، دقیق‌تر خواهد شد.

قضیهٔ حد مرکزی با استفاده از مجموع مقادیر عناصر هر نمونهٔ n تایی، $\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i$ نیز قابل بیان است. همچنان که n بزرگ‌تر می‌شود، تمایل توزیع مجموع داده‌های نمونه به سمت نرمال بیشتر می‌شود به‌طوری که دارای میانگین $n\mu_x$ و $\sqrt{n}\,\sigma_x$ خواهد بود.

اهمیت قضیهٔ حد مرکزی در دو چیز است: اول آنکه این احساس عمومی را که بسیاری از متغیرهای تصادفی در حالت طبیعی خود دارای توزیعی همانند توزیع نرمال هستند قوت می‌بخشد و دوم آنکه حیطه کاربرد آن در آمار استنباطی است. بسیاری از برآوردکننده‌ها که برای استنباط پارامترهای جامعهٔ آماری به کار می‌روند از نوع میانگین و یا مجموع مقادیر نمونه‌ها هستند. در قضیه حد مرکزی هرگاه مجموع و یا متوسط مورد استفاده و اندازه نمونه به قدر کافی بزرگ باشد، انتظار می‌رود که تخمین‌زننده دارای یک توزیع نرمال (البته به‌طور تقریبی) در نمونه‌گیریهای مکرر باشد. بر این اساس می‌توان از توزیع نرمال برای توصیف رفتار استنباط‌کننده استفاده کرد. این وجه از قضیهٔ حد مرکزی به وفور در مباحث بعدی برای استنباطهای آماری به کار می‌رود.

شکل ۸ـ۹ توزیعهای $\bar{X}$ برای دو توزیع متفاوت از جامعه را نشان می‌دهد. شکل سمت چپ توزیعی یکنواخت و شکل سمت راست توزیعی نامتقارن[1] است. در ردیفهای پایین‌تر توزیع نمونه‌گیری برای $\bar{X}$ از $n = ۲$ تا $n = ۲۵$ رسم شده است. شکل ۸ـ۹ دو ویژگی قابل توجه قضیهٔ حد مرکزی را به‌خوبی نشان می‌دهد:

1. non symmetric



شکل ۸ـ۹ توزیع فراوانی برای $\bar{X}$ در توزیع احتمال مختلف از X به ازای n=۲ , ۵ , ۱۰ , ۲۵

اول آنکه، قضیهٔ حد مرکزی صرف‌نظر از توزیع جامعه آماری مورد نمونه‌گیری همیشه برقرار است. چنان‌که مشخص است علی‌رغم غیرنرمال بودن توزیعهای X، توزیعهای $\bar{X}$ برای هر دو توزیع با افزایش n به سمت توزیع نرمال میل می‌کنند، به‌طوری که در n = ۲۵ توزیع نمونه‌گیری $\bar{X}$ برای هر دو جامعهٔ آماری تقریباً نرمال است.

دوم آنکه، توزیع نمونه‌گیری $\bar{X}$ برای مورد اول به‌شدت به توزیع نرمال نزدیک می‌شود، به‌طوری که در n = ۱۰ توزیع $\bar{X}$ تقریباً نرمال است. حال آنکه در نمونه‌های بزرگ‌تر توزیع $\bar{X}$ برای مورد دوم به نرمال شبیه می‌شود. این نتیجه بیان‌کنندهٔ این حقیقت است که اگر داده‌ها به‌طور «متقارن»[1] حول میانگین توزیع شده باشند، قضیهٔ حد مرکزی برای نمونه‌های کوچک به‌خوبی به کار خواهد رفت. درحالی که اگر توزیع جامعهٔ آماری دارای چولگی باشد، نمونه‌هایی بزرگ‌تر لازم است تا یک تقریب کارآمد از توزیع $\bar{X}$ به وسیلهٔ توزیع نرمال حاصل شود.

بسیاری از نویسندگان براساس یک قاعده سرانگشتی[2] معتقدند که صرف‌نظر از توزیع جامعهٔ آماری حداقل یک نمونهٔ ۳۰ تایی لازم است تا بتوان گفت توزیع آمارهٔ $\bar{X}$ نرمال است.

مثال ۴ـ۹ توزیع نمره‌های ارزشیابی کارمندان یک سازمان نرمال است؛ متوسط نمره‌های ارزشیابی آنان ۱۵ و انحراف معیارشان ۳ است. احتمال اینکه نمره یکی از کارمندان حداقل ۱۸ باشد چقدر است؟

از آنجا که توزیع X نرمال است، پس می‌توان از تعریف متغیر استاندارد Z استفاده کرد و احتمال مورد نظر را به دست آورد.

$$P(X \geq ۱۸) = P(Z \geq \frac{۱۸ - ۱۵}{۳})$$

$$= P(Z \geq ۱) = ۱ - ۰/۸۴۱۳ = ۰/۱۵۸۷$$

1. symmetric
2. rule of thumb

مثال ۵ـ۹ فرض کنید از جامعهٔ آماری مثال ۴ـ۹ یک نمونهٔ تصادفی ۹ نفره انتخاب کرده‌ایم. احتمال اینکه میانگین نمرهٔ ارزشیابی آنها حداقل ۱۸ باشد، چقدر است؟

چون از یک توزیع نرمال با σ_x مشخص نمونه‌گیری شده پس توزیع $\bar{X}$ حتماً کشیده‌تر از توزیع جامعه است؛ بنابراین می‌توان متغیر تصادفی $\bar{X}$ را با استفاده از این رابطه استاندارد کرد:

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}$$

می‌دانیم که:

$$\mu_{\bar{x}}=\mu_x$$

و:

$$\sigma_{\bar{X}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

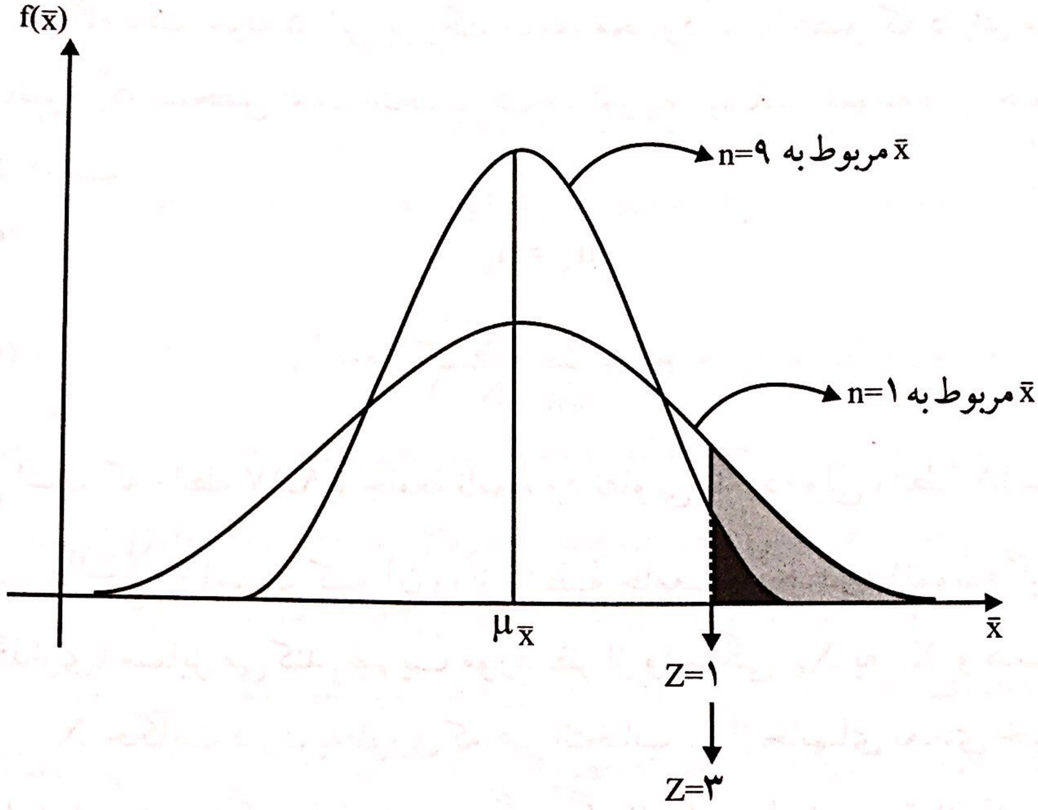
بنابراین می‌توان نوشت:

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu_x}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}}=\frac{۱۸-۱۵}{\frac{۳}{\sqrt{۹}}}=۳$$

$$P(\bar{X}\geq ۱۸)=P(Z\geq ۳)=۱-۰/۹۹۸۷=۰/۰۰۱۳$$

مثال ۶ـ۹ از احتمالات به دست آمده از مثال ۴ـ۹ و ۵ـ۹ چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

اگر توزیع X و $\bar{X}$ در مثال ۴ـ۹ و ۵ـ۹ را در شکل ۹ـ۹ رسم کنیم، به‌راحتی درمی‌یابیم که با افزایش حجم نمونه، توزیع $\bar{X}$ کشیده‌تر می‌شود (این خاصیت مربوط به قضیهٔ حد مرکزی است). تا زمانی که $n=1$ است، احتمال مساوی ۰/۱۵۸۷ است، درحالی که در $n=9$ احتمال مورد نظر به شدت کاهش می‌یابد؛ یعنی اینکه دنبالهٔ توزیع به‌شدت جمع شده است و داده‌های $\bar{X}$ حول میانگین خود، $\mu_{\bar{X}}$، متمرکز شده‌اند.



شکل ۹ـ۹ مقایسهٔ توزیع $\bar{X}$ در n=۱ و n=۹

۹ـ۷ نظریهٔ رفتار $\bar{X}$

مسائل تصمیم گیری در مدیریت اغلب با استنباط مقدار میانگین جامعه همراه است. برای مثال ممکن است متوسط نمره‌های مسئولیت‌پذیری مدیران و یا تأخیر روزانه تولید در خط مونتاژ و یا تقاضای روزانه را در نظر داشته باشیم.

تخمین‌زننده‌های مختلفی همچون میانه، میانگین پیراسته، نیم‌دامنه[1] و نیز میانگین نمونه $(\bar{X})$ برای برآورد میانگین جامعه وجود دارد. هر یک از تخمین‌زننده‌ها در توزیع نمونه گیری خود در مقایسه با هم معایب و محاسنی دارند. براساس خواص مطلوب آماره‌ها مشخص شده که $\bar{X}$ نسبت به تمام آماره‌های دیگر دارای خواص مطلوب‌تری است، بدین جهت در تخمین μ_x، از میانگین نمونه و توزیع آن به نحو وسیعی استفاده می‌شود.

1. midrange .

هرگاه یک نمونه n تایی از یک جامعهٔ محدود[1] با N عضو که دارای میانگین و واریانس σ_x^2 مشخص است انتخاب شود، توزیع میانگین نمونه این خواص را خواهد داشت:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu_x \tag{۹\_۱۷}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{N-n}}{N-1} \tag{۹\_۱۸}$$

واضح است که رابطه ۹_۱۷ با جامعهٔ نامحدود تفاوتی ندارد، ولی رابطهٔ ۹_۱۸ دارای ضریب $\frac{\sqrt{N-n}}{N-1}$ است که آن را از رابطهٔ جامعهٔ نامحدود (نمونه‌گیری با جای‌گذاری) متمایز می‌کند. ضریب مورد نظر از وابستگی X_2 به X_1 و همین طور X_i به X_{i-1} حکایت دارد. به‌طوری‌که هر انتخاب بر انتخابهای بعدی خود تأثیر می‌گذارد. این همبستگی را خودهمبستگی[2] گویند که به‌راحتی می‌توان فهمید یک نوع همبستگی منفی است. پس اگر n = ۲ باشد می‌توان نوشت:

$$V(\bar{X}) = V\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) \tag{۹\_۱۹}$$

$$= \frac{1}{4} V(X_1 + X_2)$$

یعنی:

$$V(\bar{X}) = \frac{1}{4}\left[V(X_1) + V(X_2) + 2\,Cov(X_1, X_2)\right] \tag{۹\_۲۰}$$

ملاحظه می‌کنید که $V(\bar{X})$ به وسیلهٔ کوواریانس منفی، اندکی کاهش می‌یابد. به‌طور مشابه برای نمونه‌ای از n مشاهده استخراج شده از جامعهٔ N عضوی می‌توان ثابت کرد که واریانس $\bar{X}$ طبق این فرمول کاهش می‌یابد:

$$\text{ضریب کاهش} = \frac{N-n}{N-1} \qquad (۹\text{ـ}۲۱)$$

کمیّت رابطه ۲۱ـ۹ یک عامل اصلاح جامعهٔ محدود[1] تلقی می‌شود و بیشتر اوقات در محاسبات بدان توجه نمی‌شود، به‌خصوص زمانی که نسبت n به N حداکثر ۵ درصد باشد.

فرضیات پایه‌ای: فرض ما در مباحث و فصول بعد آن است که اندازهٔ نمونه، بزرگ و یا نمونه‌برداری از جامعه نامحدود است؛ یعنی اینکه ضریب $\frac{N-n}{N-1}$ مساوی یک فرض می‌شود. همچنین انحراف معیار آماره‌ای که به عنوان تخمین‌زننده یک پارامتر از آن استفاده می‌شود، خطای معیار تخمین‌زننده[2] نامیده می‌شود؛ برای مثال از این پس انحراف معیار $\bar{X}$ یعنی $\sigma_{\bar{x}}$ را خطای معیار میانگین نمونه می‌نامیم.

مثال ۷ـ۹ میانگین طول عمر محصولات کارخانه ۱۰۰ ساعت و پراکندگی آن ۱۶ ساعت است. یک نمونهٔ تصادفی ۶۴ تایی از محصولات تولیدی انتخاب شده است. احتمال اینکه میانگین طول عمر آنها دست کم ۹۵ ساعت باشد، چقدر است؟

براساس قضیهٔ حد مرکزی، توزیع $\bar{X}$ برای نمونهٔ ۶۴ تایی صرف‌نظر از توزیع عمر محصولات نرمال است؛ پس:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_x}{\sigma_{\bar{x}}}$$

بنابراین:

$$P(\bar{X} \geq ۹۵) = P\left(Z \geq \frac{۹۵ - ۱۰۰}{\frac{۱۶}{\sqrt{۶۴}}}\right) = P(Z \geq -۲/۵)$$

$$= ۱ - ۰/۰۰۶۲ = ۰/۹۹۳۸$$

یعنی ۰/۹۹۳۸ احتمال دارد که متوسط عمر نمونه‌های ۶۴ تایی از لامپها دست کم ۹۵ ساعت باشد.

---

1. finite population correction factor

تمرین

۱. یک نمونهٔ ۱۰۰ تایی از یک جامعهٔ غیرنرمال با میانگین ۵۰ و انحراف معیار ۱۰ انتخاب شده است محاسبه کنید:

الف) مقدار میانگین و انحراف معیار توزیع نمونه‌گیری $\bar{X}$ چقدر است؟

ب) براساس قضیهٔ حد مرکزی توزیع تقریبی میانگین نمونه‌ها کدام است؟

ج) از قضیهٔ حد مرکزی استفاده کرده، این احتمالات را محاسبه کنید:

$$P(\bar{X} > ۵۲)$$

$$P(\bar{X} \leq ۵۲)$$

۲. در چه صورتی ضریب اصلاح $\frac{N-n}{N-1}$ برای محاسبهٔ انحراف معیار میانگین نمونه در یک جامعه محدود قابل اغماض است؟

۳. آیا استفاده از ضریب اصلاح جامعهٔ محدود باعث کاهش انحراف معیار $\bar{X}$ می‌شود؟ چرا؟

۹ـ۸ توزیع نمونه‌گیری نسبت موفقیت در نمونه $(\bar{p})$

بسیاری از محققان درصدد تخمین نسبت عناصری از جامعه آماری هستند که دارای یک ویژگی مورد نظرند. به علاوه بسیاری از تحقیقها از مقیاس اسمی یا رتبه‌ای برخوردارند که پارامتر توصیف آنها نسبت موفقیت است. مواردی چون درصد کالاهای معیوب، درصد کارکنانی که از کار خود راضی‌اند و درصد مدیرانی که وظیفه‌مدار هستند، همه از مصادیق این نوع تحقیقات‌اند. همچنان که مشاهده می‌شود این تحقیقات و موارد مشابه می‌توانند در قالب توزیع دو جمله‌ای بیان شوند؛ بنابراین روش نمونه‌گیری در راستای ضرورتهای توزیع دو جمله‌ای شکل خواهد گرفت.

در یک آزمایش دو جمله‌ای با n تکرار عمل، تعداد موفقیتها، X، و یا نسبت موفقیت در نمونه، $\frac{X}{n}$، شامل اطلاعاتی است که در راستای نسبت موفقیت در جامعه، p، باشد؛ بنابراین دور از انتظار نیست اگر آمارهٔ مورد نظر به این صورت تعریف شود:

$$\overline{p}=\frac{X}{n} \quad \text{(نسبت موفقیت در نمونه)} \qquad (۹\_۲۲)$$

این آماره دارای یک توزیع نمونه‌گیری است که نقش مهمی در زمینه استنباط پارامتر p (نسبت موفقیت در جامعه، $\frac{X}{n}$) ایفا می‌کند.

هر توزیع دو جمله‌ای از n توزیع برنولی تشکیل شده است. می‌دانیم که هرگاه np و nq بزرگ‌تر یا مساوی ۵ باشد، طبق قضیهٔ حد مرکزی، توزیع دو جمله‌ای از تقریب نرمال برخوردار است.[1] از سوی دیگر آمارهٔ $\overline{p}$ همانند آمارهٔ $\overline{X}$ به‌شدت تحت تأثیر نوع نمونه‌گیری (با جای‌گذاری یا بدون جای‌گذاری) است. درصورتی که نمونه‌گیری از یک جامعهٔ آماری محدود انجام گیرد، گفته می‌شود که $\frac{n}{N}$ بزرگ‌تر از پنج درصد بوده است. در این صورت رابطه‌های زیر برقرار است:

$$E(\overline{p})=\mu_{\overline{p}}=p \qquad (۹\_۲۳)$$

$$\sigma^{۲}_{\overline{p}}=\frac{p(۱-p)}{n}\left(\frac{N-n}{N-۱}\right) \qquad (۹\_۲۴)$$

واضح است که همانند توزیع $\overline{X}$ واریانس آماره باید با ضریب کاهش $\frac{N-n}{N-۱}$ تصحیح شود. از آنجا که اثبات رابطهٔ ۹_۲۴ پیچیده است، صحت روابط را با استفاده از مثال ۹_۸ بررسی خواهیم کرد.

مثال ۹_۸ شرکتی ۵ مدیر دارد که سوابق اجرایی آنها، X، بدین شرح است:

مدیر: A B C D E

تجربه: ۱۰ ۵ ۴ ۱۲ ۸

ویژگی مورد نظر مدیر عامل، مدیران با تجربهٔ کمتر از ۶ سال است. ضمن تهیهٔ توزیع $\overline{p}$ در یک نمونهٔ ۳ تایی از مدیران شرکت، صحت روابط ۹_۲۳ و ۹_۲۴ را بررسی کنید.

---

۱. برای اطلاع بیشتر به فصل هشتم، جلد اول مراجعه کنید.

در یک نمونه‌گیری واقعی (بدون جای‌گذاری) با استفاده از $\binom{5}{3}$ مشخص می‌شود که ۱۰ ترکیب ۳ تایی از جامعهٔ آماری را می‌توان انتخاب کرد. مشخصات و مقادیر نمونه و همچنین تفصیل توزیع $\bar{p}$ در جدول ۶ـ۹ آمده است.

جدول ۶ـ۹ مشخصات نمونه‌های ۳ تایی از مدیران شرکت و توزیع $\bar{p}=\frac{X}{n}$

شماره نمونه	مشخصات نمونه	مقادیر نمونه	$\bar{p}=\frac{X}{n}$	$f(\bar{p})$
۱	A,B,C	۱۰ , ۵ , ۴	$\frac{2}{3}$	۰/۱۰
۲	A,B,D	۱۰ , ۵ , ۱۲	$\frac{1}{3}$	۰/۱۰
۳	A,B,E	۱۰ , ۵ , ۸	$\frac{1}{3}$	۰/۱۰
۴	A,C,D	۱۰ , ۴ , ۱۲	$\frac{1}{3}$	۰/۱۰
۵	A,C,E	۱۰ , ۴ , ۸	$\frac{1}{3}$	۰/۱۰
۶	A,D,E	۱۰ , ۱۲ , ۸	۰	۰/۱۰
۷	B,C,D	۵ , ۴ , ۱۲	$\frac{2}{3}$	۰/۱۰
۸	B,C,E	۵ , ۴ , ۸	$\frac{2}{3}$	۰/۱۰
۹	B,D,E	۵ , ۱۲ , ۸	$\frac{1}{3}$	۰/۱۰
۱۰	C,D,E	۴ , ۱۲ , ۸	$\frac{1}{3}$	۰/۱۰

احتمال رخداد هریک از عناصر $\bar{p}$ مساوی ۰/۱۰ خواهد شد. چون فضای نمونه ۱۰ عضو گسسته با مقادیر ۰، $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ دارد. به اختصار، دو ستون آخر جدول ۶ـ۹ در جدول ۷ـ۹ آمده است؛ مقادیر تکرار $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ یک بار نوشته و احتمالات آنها جمع می‌شود.

جدول ۷ـ۹ تابع توزیع $\bar{p}$ برای جدول ۶ـ۹

$\bar{p}$	۰	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$f(\bar{p})$	۰/۱۰	۰/۶۰	۰/۳۰

تابع فوق یک تابع احتمال است، چون شرایط تابع احتمال ناپیوسته بدین شرح در آن صادق است:

$$0 \leq f(\overline{p}) \leq 1 \qquad (۹\_۲۵)$$

$$\Sigma f(\overline{p}) = 1 \qquad (۹\_۲۶)$$

حال می‌توان صحت روابط ۲۳ـ۹ و ۲۴ـ۹ را به کمک جدول ۸ـ۹ و محاسبات آن مشاهده کرد:

جدول ۸ـ۹ محاسبات میانگین و واریانس $\overline{p}$

$\overline{p}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	مجموع
$f(\overline{p})$	$0/10$	$0/60$	$0/30$	1
$\overline{p}f(\overline{p})$	0	$\frac{6}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{12}{30}=0/40$
$\overline{p}^2 f(\overline{p})$	0	$\frac{6}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{18}{90}=0/20$

حال به بررسی روابط ۲۳ـ۹ و ۲۴ـ۹ می‌پردازیم:

$$E(\overline{p}) = 0/40 \Rightarrow E(\overline{p}) = p \quad \text{یعنی}: 0/40 = \frac{2}{5}$$

و:

$$\sigma^2_{\overline{p}} = E(\overline{p}^2) - \mu^2_{\overline{p}} \quad \text{یا} \quad \sigma^2_{\overline{p}} = \frac{p(1-p)}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

یعنی:

$$\sigma^2_{\overline{p}} = 0/20 - (0/40)^2 = 0/04 \quad \text{یا} \quad 0/04 = \frac{0/40(0/60)}{3}\left(\frac{5-3}{5-1}\right)$$

که صدق روابط به‌خوبی از مقادیر فوق دیده می‌شود.

چنانچه نمونه‌گیری با جای‌گذاری باشد یا نمونه‌گیری از جامعهٔ نامحدود انجام گیرد، به‌راحتی می‌توان از ضریب کاهش $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ در محاسبهٔ واریانس $\overline{p}$ صرف‌نظر کرد. در نتیجه روابط ۲۳ـ۹ و ۲۴ـ۹ بدین صورت تغییر خواهد کرد:

$$E(\overline{p}) = p \qquad (۹\_۲۷)$$

$$\sigma_{\overline{p}}^{۲}=\frac{p(۱-p)}{n} \tag{۹_۲۸}$$

که در این روابط p نسبت موفقیت جامعه است. تنها تفاوت روابط فوق با روابط ۹_۲۳ و ۹_۲۴ حذف ضریب کاهش است.

مثال ۹_۹ مدیر کارخانه‌ای درصدد تولید کالای جدید است. او می‌خواهد یک نمونهٔ تصادفی ۱۰۰ تایی از بین مشتریان بالقوه انتخاب و با آنها مصاحبه کند تا درصد تمایل در نمونه‌های ۱۰۰ تایی برای او مشخص شود. فرض کنید ۵۰ درصد از مشتریان بالقوه به خرید کالا تمایل دارند. احتمال اینکه دست کم ۳۰ درصد نمونهٔ انتخاب شده به مصرف کالا تمایل داشته باشند، چقدر است؟

با توجه به حجم نمونه می‌توان فرض بزرگ بودن را برای اندازه نمونه پذیرفت و براساس قضیهٔ حد مرکزی به شرح زیر از توزیع نرمال برای حل مسئله استفاده کرد:

$$Z=\frac{\overline{p}-p}{\sqrt{\frac{p(۱-p)}{n}}}$$

پس:

$$P(\overline{p}\geq ٪۳۰)=P\left(Z\geq\frac{۰/۳۰-۰/۵۰}{\sqrt{\frac{۰/۵۰\times ۰/۵۰}{۱۰۰}}}\right)$$

$$=P(Z\geq -۴)=۱$$

یعنی ۱۰۰ درصد احتمال دارد که دست کم ۳۰ درصد نمونهٔ ۱۰۰ تایی از کالای جدید مصرف شود.

تمرین

۱. در چه شرایطی می‌توان پذیرفت که توزیع نمونه‌گیری برای $\overline{p}$ تقریباً نرمال است؟

۲. مقادیر pq را به ازای مقادیر ۰/۱۰، ۰/۲۰، ۰/۳۰، ... و ۰/۹۰ برای p پیدا کنید. به

ازای چه مقداری از p، حاصل‌ضرب p و q حداکثر می‌شود؟ در یک نمونهٔ فرضی، در چه حالتی واریانس $\overline{p}$ حداکثر می‌گردد؟

۳. تحقیقات نشان می‌دهد که نسبت مدیران وظیفه‌مدار در سازمانهای کشور ۶۰ درصد است. از بین مدیران کشور یک نمونه تصادفی ۴۰۰ نفره انتخاب شده است. احتمال اینکه کمتر از ۵۵ درصد آنها وظیفه‌مدار باشند، چقدر است؟

۴. گزارشها نشان می‌دهد که ۱۰ درصد تصمیم‌گیرندگان، اطلاعات تولیدی را به‌طور مستقیم از فروشندگان دریافت می‌کنند. اگر این درصد درست باشد، احتمال اینکه در یک نمونه تصادفی ۲۰۰ تایی از تصمیم‌گیرندگان، بیش از ۱۳ درصد، اطلاعات تولیدی خود را به‌طور مستقیم از فروشندگان دریافت کنند، چقدر است؟

۹ـ۹ خلاصه

آمار استنباطی شامل فنونی است که اساس آنها نمونه و توزیعهای نمونه‌گیری است. در این فصل به دلایل نمونه‌گیری و روشهای نمونه‌گیری، مثل تصادفی ساده، منظم، گروهی، خوشه‌ای و مرحله‌ای پرداختیم. تعریف قضیهٔ حد مرکزی و کاربرد آن در تعریف توزیع نمونه‌گیری میانگین نمونه، $\overline{X}$، و نسبت موفقیت نمونه، $\overline{p}$، از دیگر مباحث مطرح شده در این فصل است.

انتخاب آماره‌های مناسب برای استنباط پارامترهای مورد نظر بر پایهٔ خواص مطلوب آماره برقرار است که شاخص اصلی آنها میانگین مجذور خطا (MSE) است. چنانچه حجم نمونه به سمت بی‌نهایت و MSE به سمت صفر میل کند، می‌گوییم که آماره یک آمارهٔ سازگار است. چنین آماره‌ای اریب صفر و کمترین واریانس خواهد بود.

همچنین در این فصل توزیعهای $\overline{X}$ و $\overline{p}$ به‌تفصیل مطرح و خواص هر یک از آنها بررسی شد. $\overline{X}$ را آمارهٔ میانگین جامعه؛ μ_x، md را آمارهٔ میانهٔ جامعه؛ Md، S_x^2 را آمارهٔ واریانس جامعه یا σ_x^2 و $\overline{p}$ را آماره نسبت موفقیت جامعه P می‌نامند.

الف) $n = N$ ب) $n = ۱$

ج) $n = ۳۰$ د) $n > ۳۰$

۱۹. آمارهٔ $\bar{X}$ یک آمارهٔ سازگار است؛ چون وقتی n به سمت بی‌نهایت میل کند، $\bar{X}$ به سمت ... میل می‌کند.

الف) ∞ ب) $N\mu_x$

ج) μ_x د) صفر

۲۰. کدام یک از روشهای نمونه‌گیری زیر مبنای نمونه‌گیری مرحله‌ای است؟

الف) گروهی ب) منظم

ج) خوشه‌ای د) تصادفی ساده

۲۱. در رابطهٔ $\sigma_{\bar{X}}^۲ = \frac{\sigma_X^۲}{n}$ با افزایش حجم نمونه چه اتفاقی می‌افتد؟

الف) کشیدگی توزیع $\bar{X}$ کمتر از توزیع X می‌شود.

ب) کشیدگی توزیع $\bar{X}$ بیشتر از توزیع X می‌شود.

ج) چولگی توزیع $\bar{X}$ بیشتر از توزیع X می‌شود.

د) دنباله‌های توزیع $\bar{X}$ طولانی‌تر می‌شود.

۲۲. اگر امید ریاضی آماره $\left[E(\hat{\theta})\right]$ بزرگ‌تر از پارامتر باشد، کدام یک از این گزینه‌ها درست است؟

الف) آماره دارای اریب است.

ب) آماره دارای کمترین واریانس است.

ج) آماره سازگار است.

د) باید نوع آماره مشخص باشد تا بتوان اظهارنظر کرد.

مسائل

۲۳. در کنفرانس درس آمار، یکی از دانشجویان دربارهٔ قضیهٔ حد مرکزی اظهار کرد: «قضیه تضمین می‌کند که n موجود در نمونه‌ای تصادفی، اگر به قدر کافی بزرگ باشد، تقریباً به صورت نرمال توزیع می‌شود». توضیح دهید آیا این

دانشجو مفهوم قضیهٔ حد مرکزی را فهمیده است؟

۲۴. از یک جامعهٔ آماری به تعداد ۵۰ هزار نفر، یک نمونهٔ تصادفی ۵۰۰ نفره انتخاب می‌شود. اگر ملاک کارایی آمارهٔ $\bar{X}$، MSE باشد از کدام یک از روشهای نمونه‌گیری با جای‌گذاری و بدون جای‌گذاری استفاده خواهید کرد؟ چنانچه تعداد نمونه به ۵ هزار نفر افزایش یابد چه روشی را اعمال خواهید کرد و چرا؟

۲۵. یک کارخانه کفش‌دوزی ماشینی دارد که از تکه‌های ضخیم لاستیک فشرده شده قطعاتی را برای استفاده در تخت یک نوع کفش مردانه برش می‌دهد. اندازه‌های ضخامت این تختهای کفش به‌طور نرمال، با انحراف معیار ۰/۲۰ میلی‌متر، توزیع شده‌اند. گاهی به سبب بعضی دلایل پیش‌بینی نشدنی، میانگین از هدف تعیین شده‌اش (۲۵ میلی‌متر) دورتر است. برای اینکه به‌موقع اندازه‌ها تصحیح شود، لازم است که ضخامت نمونه‌ای تصادفی از تختهای کفش را که به‌طور متناوب از میان کفشهای تولید شده انتخاب می‌شود، اندازه‌گیری کرد. فرض کنید که از روش زیر برای ارزیابی کیفیت تولید استفاده شود.

اندازه‌های ضخامت برای نمونه‌ای تصادفی مرکب از پنج تخت کفش به دست آورده و میانگین نمونه $(\bar{X})$ ثبت می‌شود. اگر $\bar{X} < ۲۴/۸$ یا $\bar{X} > ۲۵/۲$ باشد، ماشین خارج از کنترل به حساب آورده و بعد از آن تولید متوقف می‌گردد و برای استفادهٔ دوباره باید ماشین مجدداً تنظیم شود. محاسبه کنید:

الف) وقتی که میانگین واقعی برابر با ۲۵ میلی‌متر باشد، احتمال اینکه نمونه‌ای، وضعیت را «خارج از کنترل» نشان دهد چقدر است؟

ب) فرض کنید میانگین واقعی به ۲۵/۳ میلی‌متر تغییر کرده است، احتمال اینکه نمونه‌ای، وضعیت را «خارج از کنترل» نشان دهد چقدر است؟

۲۶. نمره‌های دانشجویان مدیریت در یک آزمون استعداد، با میانگین ۲۰۰ و انحراف معیار ۳۶ به صورت نرمال توزیع شده است با توجه به این موارد:

الف) برای $n = ۹$ میانگین و انحراف معیار را محاسبه کنید.

ب) برای $n = ۹$ احتمال اینکه $\bar{X}$ داخل فاصلهٔ $\pm ۰/۲۵$ نمره از μ_x قرار گیرد یعنی $(\mu_x \pm ۰/۲۵\mu_x)$ چقدر است؟

فصل دهم

تخمین آماری

۱ـ۱۰ مقدمه

استنباط در زندگی روزمره افراد، به‌خصوص در تصمیم‌گیری و پیش‌بینی، نقش مهمی دارد. ما هر روز با موقعیتها و شرایطی روبه‌رو می‌شویم که به پیش‌بینی آینده نیاز داریم. دولت به پیش‌بینی واردات و صادرات، سهامداران به شناخت وضعیت بازار سهام و مدیران سازمانها به شناخت رفتار کاری کارمندان نیاز دارند. همهٔ این استنباطها و پیش‌بینیها بر پایهٔ اطلاعات خاصی است که ما آنها را مشاهده[1] یا داده[2] می‌نامیم. اغلب داده‌هایی که برای استنباط استفاده می‌شوند بسیار اندک‌اند. با وجود این تصمیم‌گیران در تلاش‌اند با استفاده از این اطلاعات اندک، تصمیم نسبتاً درست و صحیحی اتخاذ کنند. بدین سبب هدف دانشمندان آماری آن است که روشهای ریاضی‌ای ارائه دهند که استنباط دربارهٔ جامعهٔ آماری بر پایهٔ اطلاعات حاصل از نمونه هرچه مطلوب‌تر و بهتر انجام گیرد.

هدف از تحلیل و توصیف در آمار، جامعه آماری است که به دو طریق توصیف می‌شود: یا با استفاده از سرشماری کلیهٔ عناصر جامعه و محاسبهٔ «پارامتر» که در این صورت فنون آمار توصیفی به کار خواهد رفت و یا با استفاده از

---

1. observation
2. data

آمار را استنباطی گویند که شامل «تخمین‌زننده» برای برآورد پارامتر. شاخه‌ای از آمار را استنباطی گویند که شامل فنون تخمین آماری و آزمون فرضیه‌ها می‌شود. اینکه به کدام طریق (تخمین یا آزمون) استنباط انجام گیرد به نوع تحقیق بستگی دارد. اگر تحقیق از نوع سؤالی و صرفاً حاوی پرسش درباره پارامتر باشد، برای پاسخ به سؤال (سؤالات) از تخمین آماری استفاده می‌شود و اگر حاوی فرضیه‌ها بوده و از مرحلهٔ سؤال گذر کرده باشد، آزمون فرضیه‌ها و فنون آماری آن به کار می‌رود. در این فصل نظریه تخمین[1] و در فصل بعد مبانی آزمونهای آماری را شرح می‌دهیم.

هر نوع تخمینی از آمارهٔ انتخاب شده و توزیع نمونه‌گیری آن آغاز می‌شود. به‌طور کلی تخمین دو نوع است: الف) تخمین فاصله‌ای[2] و ب) تخمین نقطه‌ای[3].

۲ـ۱۰ تخمین فاصله‌ای میانگین جامعهٔ آماری (μ_x)

بسیاری از تحقیقات مدیریتی با تخمین میانگین جامعهٔ آماری ارتباط پیدا می‌کند. برای مثال مدیریت یک سازمان ممکن است علاقه‌مند باشد میانگین نمره‌های ارزشیابی ماهانه کارکنان خود و یا میانگین رشد کاری و تولیدی آنها را بداند. بنابراین تخمین میانگین جامعه (μ_x) یکی از مهم‌ترین موارد کاربرد آمار استنباطی است.

وقتی که از یک جامعهٔ نامحدود نمونه‌گیری می‌شود، توزیع میانگین نمونه $(\bar{X})$، میانگینی برابر (μ_x) و انحراف معیاری مساوی با $\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ خواهد داشت. اگر جامعهٔ مورد نمونه‌گیری نرمال باشد، بدون توجه به اندازهٔ نمونه، $\bar{X}$ همیشه دارای توزیع نرمال است. از سوی دیگر، براساس قضیهٔ حد مرکزی وقتی ما از یک جامعهٔ غیرنرمال نمونه‌گیری می کنیم اگر نمونه بزرگ باشد، توزیع $\bar{X}$ با میانگین μ_x و

1. estimation theory
2. interval estimation
3. point estimation

انحراف معیاری که با افزایش حجم نمونه به‌شدت کاهش پیدا می‌کند تقریب نرمالی دارد.

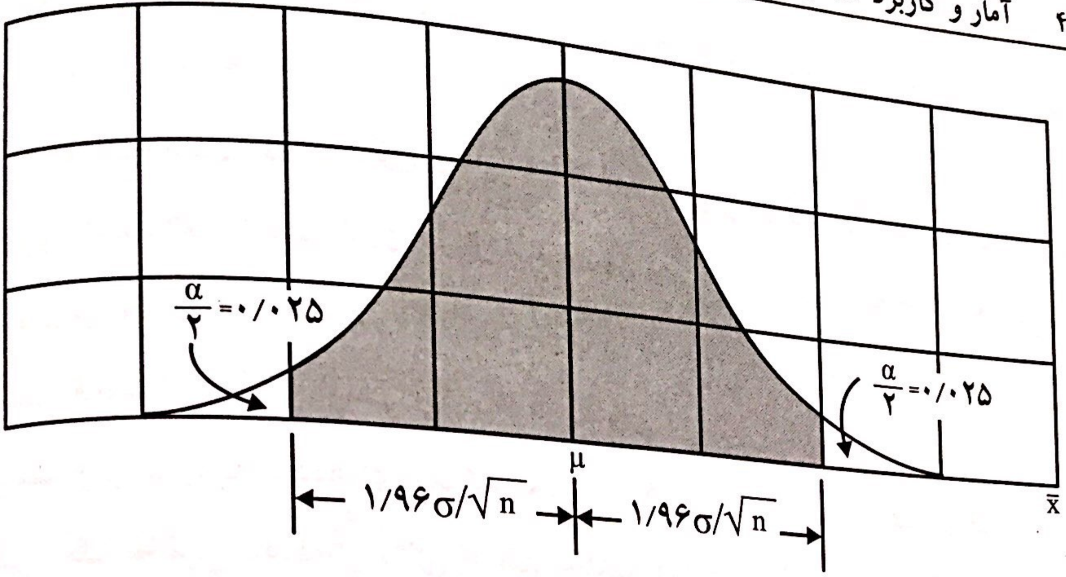
واضح است که در یک توزیع پیوسته، احتمال اینکه $\bar{X}$ با میانگین جامعه مساوی باشد، تقریباً صفر است. حال این سؤال مطرح می‌شود که چگونه می‌توان احتمال برآورد μ_x را بالا برد؟ این سؤال را با تخمین فاصله‌ای پاسخ می‌دهیم. تخمین فاصله‌ای یک پارامتر جامعه، قاعده‌ای است که به ما می‌گوید چگونه دو مقدار را بر پایهٔ داده‌های نمونه محاسبه کنیم تا $\bar{X}$ در وسط آن قرار گیرد. وقتی یک تخمین فاصله‌ای برای پارامتر جامعهٔ آماری به کار رود یک جفت عدد از تخمین‌زننده به دست می‌آید که آن را تخمین فاصله‌ای یا «فاصله اطمینان»[1] برای پارامتر گویند. عدد بزرگی که حد بالای فاصله را می‌سازد، «حد بالای اطمینان»[2] (UCL) و عدد کوچکی که حد پایین فاصله را می‌سازد «حد پایین اطمینان»[3] (LCL) گفته می‌شود. بر این اساس، تخمین فاصله‌ای μ_x به این صورت تعریف می‌شود:

$$\bar{X} \pm \varepsilon \qquad (۱۰\text{-}۱)$$

ε مقدار ثابتی است که می‌توان به کمک آن UCL و LCL را تعریف کرد و آن را «دقت برآورد» نامید. سطح دلخواه در یک توزیع آماری که μ_x، در آن قرار می‌گیرد همان فاصله اطمینان است که احتمال آن را می‌توان با P نشان داد؛ این سطح را «سطح اطمینان محقق» می‌گویند. واضح است که فاصلهٔ اطمینان براساس سطح اطمینانی که محقق را راضی می‌کند، تعریف می‌شود. حال با فرض پذیرفتن سطح اطمینان ۹۵ درصد و نرمال بودن توزیع $\bar{X}$، فاصلهٔ اطمینان برای μ_x را در شکل ۱۰ـ۱ ببینید.

---

1. confidence interval
2. upper confidence limit
3. lower confidence limit



شکل ۱ـ۱۰ تخمین فاصله‌ای μ_X در سطح اطمینان ۹۵ درصد

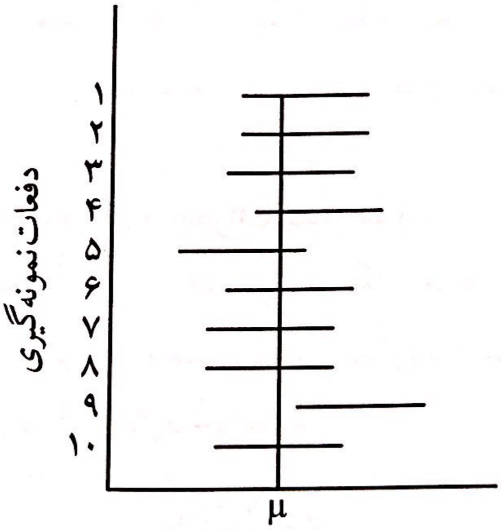
فضای خارج از $\bar{X}\pm۱/۹۶\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ را «سطح خطا» گویند و آن را با α نشان می‌دهند؛ بنابراین:

$$\alpha = ۱- \text{سطح اطمینان} \qquad (۲ـ۱۰)$$

پس در سطح اطمینان ۹۵ درصد، سطح خطا ۵ درصد خواهد بود. واضح است که خطا می‌تواند در حد بالای UCL و یا حد پایین LCL رخ دهد و در اینجا مساوی ۲۵ درصد پایین‌تر از LCL و ۲۵ درصد بالاتر از UCL است.

سطح اطمینان نسبتی از فاصله‌های اطمینان است که توسط نمونه‌های n تایی (هم‌حجم) ایجاد شده و در برگیرندهٔ پارامتر جامعه باشد. برای مثال فرض کنید محققی به تخمین میانگین سود هفتگی یک شرکت کوچک تمایل دارد. اگر نمونه شامل ۲۰ مشاهده هفتگی باشد و n = ۲۰ ده بار تکرار شود و هر بار تخمین فاصله‌ای μ_x به عمل آید، می‌توان نتایج تخمینها را در شکل ۲ـ۱۰ مشاهده کرد.

در این شکل محور عمودی، فاصلهٔ اطمینان برای هر بار تکرار نمونهٔ ۲۰ تایی و محور افقی، عرض فواصل اطمینان را نشان می‌دهد. توجه شود که به استثنای یک مورد تمام فواصل شامل پارامتر μ_x هستند. در اینجا می‌توان گفت، سطح اطمینان ۹۰ درصد است؛ چون $\frac{۹}{۱۰}$ فواصل دربرگیرندهٔ پارامتر مجهول‌اند.



شکل ۲ـ۱۰ فواصل اطمینان برای میانگین سود هفتگی در یک نمونه ۲۰ تایی

یک فاصلهٔ اطمینان خوب، فاصله‌ای است که با کوچک‌ترین عرض برآورد دربرگیرندهٔ پارامتر باشد. واضح است که فاصله‌ها از نظر مکان متفاوت‌اند؛ زیرا $\bar{X}$ از نمونه‌ای به نمونه دیگر تغییر می‌کند. همچنین طول فاصله‌ها نیز متفاوت‌اند، زیرا S_x از نمونه‌ای به نمونهٔ دیگر تغییر می‌کند. بدین‌سبب می‌گوییم که در سطح اطمینان ثابت، فاصلهٔ اطمینان خوب، فاصله‌ای است که با کوچک‌ترین عرض از «صحت» برخوردار باشد (صحت یعنی تخمین به عمل آمده و دربرگیرندهٔ پارامتر مجهول باشد)؛ هرچه تخمین حاوی پارامتر دارای عرض کوچک‌تری باشد از «دقت» بالاتری برخوردار است. آنچه باعث بالا رفتن صحت و دقت در یک فاصلهٔ اطمینان می‌شود، نمونهٔ بزرگ‌تر است. این خاصیت همچنین در روابط ریاضی تخمین پارامترها به گونه‌ای مشهود است.

تخمین فاصله‌ای μ_X و یا مقدار ε تحت تأثیر سطح اطمینان و توزیع $\bar{X}$ است. توزیع $\bar{X}$ با این شرایط تعیین می‌شود:

۱. نوع توزیع جامعهٔ آماری (نرمال یا غیرنرمال)،

۲. کیفیت انحراف معیار جامعه (معلوم یا نامعلوم)،

۳. اندازه نمونه (کوچک یا بزرگ).

ترکیبات شرایط فوق، توابع احتمال گوناگونی برای $\bar{X}$ پدید می‌آورد و در

نتیجه مقدار ε و حدود اطمینان μ_X را در یک سطح اطمینان مشخص تحت تأثیر قرار می‌دهد. حال تخمین μ_X را با توجه به ترکیبات مورد نظر شرح می‌دهیم.

۱-۲-۱۰ توزیع جامعهٔ آماری نرمال با انحراف معیار معلوم

فرض اساسی در این حالت آن است که نمونه از یک جامعه نرمال با انحراف معیار معلوم انتخاب شده است؛ بنابراین حجم نمونه هر اندازه باشد، توزیع $\bar{X}$ یک توزیع نرمال است و به این صورت استاندارد خواهد شد:

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} \qquad (۱۰\text{-}۳)$$

داشتیم که $\mu_{\bar{x}}=\mu_x$ و $\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$. از سوی دیگر، بسته به مقدار $\bar{X}$ ممکن است علامت Z مثبت یا منفی و یا صفر باشد. همچنین مقدار Z در یک توزیع قرینه مساوی با $\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}$ است. پس می‌توان رابطه ۳-۱۰ را چنین بیان کرد:

$$\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}=\frac{\bar{X}-\mu_x}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}} \qquad (۱۰\text{-}۴)$$

بنابراین برای تخمین فاصله‌ای μ_x می‌توان به این صورت عمل کرد:

$$P(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\le Z\le +Z_{\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha \qquad (۱۰\text{-}۵)$$

حال اگر به جای Z تعریف آن را قرار دهیم، رابطه ۵-۱۰ به رابطه ۶-۱۰ تبدیل خواهد شد:

$$P(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\le \frac{\bar{X}-\mu_x}{\sigma_{\bar{x}}}\le Z_{\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha \qquad (۱۰\text{-}۶)$$

حال برحسب مجهول، μ_X، رابطه را مرتب می‌کنیم:

$$P(-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{x}}\le \bar{X}-\mu_x\le Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{x}})=1-\alpha$$

$$P(-\bar{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{x}}\le -\mu_x\le -\bar{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{x}})=1-\alpha$$

داخل پرانتز در علامت منفی (-) ضرب می‌شود. رابطهٔ حاصل تخمین فاصله‌ای μ_x

در این حالت است:

$$P(\bar{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{x}} \le \mu_x \le \bar{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{x}})=1-\alpha \qquad (۱۰\text{-}۷)$$

رابطهٔ ۷ـ۱۰ نشان می‌دهد که مقدار $\varepsilon=Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{x}}$ است. به عبارت دیگر، با احتمال $(1-\alpha)$۱۰۰ درصد میانگین جامعه در فاصلهٔ برآورد شده قرار می‌گیرد و با 100α درصد خطا، μ_x خارج از دامنهٔ فوق قرار خواهد گرفت.

مثال ۱ـ۱۰ بررسیها نشان می‌دهد که توزیع وزن محصولات تولید شدهٔ یک کارخانهٔ بزرگ، نرمال و انحراف معیار آن ۲۱ تن است. از آنجا که اندازه‌گیری وزن محصولات به‌طور روزانه امکان‌پذیر نیست، یک نمونهٔ ۵۰ روزه از تولیدات انتخاب شده که میانگین وزن آن ۸۷۱ تن است. در سطح اطمینان ۹۰ درصد میانگین واقعی وزن محصولات تولید شده طی یک روز را محاسبه کنید.

توزیع جامعه، نرمال و σ_x آن معلوم است. پس توزیع نمونه‌گیری $\bar{X}$ صرف‌نظر از حجم نمونه نرمال خواهد بود و تخمین میانگین واقعی وزن محصولات روزانه کارخانه براساس رابطه ۷ـ۱۰ انجام خواهد گرفت. در این مسئله $n=۵۰$، $\bar{X}=۸۷۱$ و $\sigma_x=۲۱$ است.

$$Z_{\frac{\alpha}{2}}=Z_{\frac{۰/۱۰}{۲}}=Z_{۰/۰۵}=\pm۱/۶۴۵$$

در نتیجه:

$$(۸۶۶/۱۱\le\mu_x\le۸۷۵/۸۹)$$

تحلیل: با ۹۰ درصد اطمینان می‌توان گفت که میانگین وزن محصولات روزانه کارخانه، میانگینی بین ۸۶۶/۱۱ تا ۸۷۵/۸۹ تن دارد و فقط ۱۰ درصد احتمال دارد که میانگین وزن تولیدات، خارج از این دامنه باشد. به عبارت دیگر، میانگین وزن آنها ۵ درصد احتمال دارد کمتر از ۸۶۶/۱۱ تن و ۵ درصد ممکن است بالاتر از ۸۷۵/۸۹ تن باشد.

۲-۲-۱۰ توزیع جامعهٔ آماری نرمال و انحراف معیار نامعلوم

هرگاه انحراف معیار جامعه نامعلوم باشد در تخمین فاصله‌ای μ_x ناچار $S_{\bar{x}}$ جایگزین σ_x خواهد شد. $S_{\bar{x}}$ برآورد نقطه‌ای انحراف معیار توزیع $\bar{X}$ است. به عبارت دیگر، علاوه بر برآورد نقطه‌ای μ_x یعنی $\bar{X}$ باید از آماره دیگری به جای σ_x یعنی $S_{\bar{x}}$ استفاده کرد. این عمل موجب خواهد شد که رابطهٔ $\frac{\bar{X}-\mu_x}{S_{\bar{x}}}$ جایگزین رابطهٔ $\frac{\bar{X}-\mu_x}{S_{\bar{x}}}$ شود. بدیهی است رابطه اوّل که دو آماره دارد، دارای دقتی کمتر از رابطهٔ بعدی است؛ یعنی ریسک آن بیشتر است. از سوی دیگر، چون از یک جامعهٔ نرمال نمونه‌گیری شده است می‌توان متقارن بودن را برای توزیع $\bar{X}$ تصور کرد. پس در این حالت توزیع $\bar{X}$ یک توزیع متقارن است که دارای پراکندگی (ریسک) بیشتری به واسطهٔ نامعلوم بودن σ_x است. ثابت می‌شود آمارهٔ $\frac{\bar{X}-\mu_x}{S_{\bar{x}}}$ دارای توزیع t استیودنت است که t توزیعی قرینه است و از توزیع نرمال دقت کمتری (پراکندگی بیشتری) دارد. بنابراین می‌توان رابطهٔ ۸-۱۰ را جایگزین رابطهٔ ۳-۱۰ کرد.

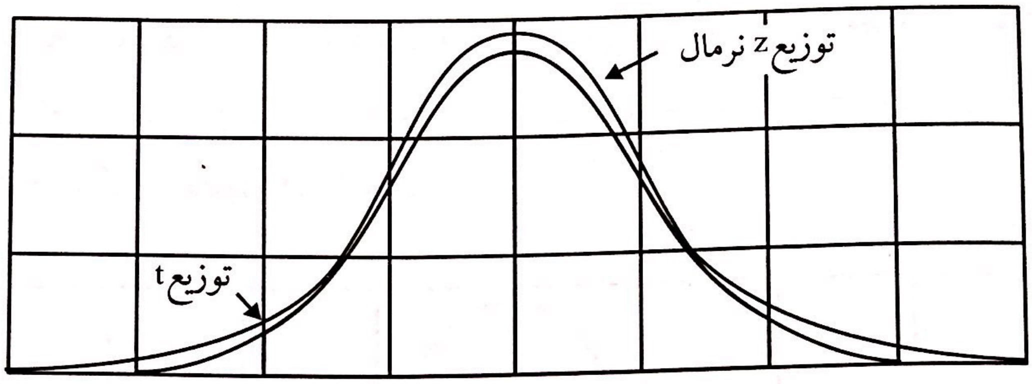
$$t=\frac{\bar{X}-\mu_x}{S_{\bar{x}}} \qquad (۱۰-۸)$$

یا:

$$t=\frac{\bar{X}-\mu_x}{S_{\bar{x}}} \qquad (۱۰-۹)$$

شکل ۳-۱۰ رابطهٔ بین توزیع t و Z را به‌خوبی مشخص می‌کند. واضح است که ضریب چولگی توزیع t صفر، ولی ضریب کشیدگی آن منفی است.[1]

۱. برای یادآوری به مباحث پارامترهای تعیین انحراف از قرینگی و کشیدگی در فصل چهارم، جلد اول مراجعه شود.



شکل ۳ـ۱۰ مقایسهٔ نرمال استاندارد Z و توزیع t براساس n=۳

گاست[1]، واضع توزیع t، کشف کرد که توزیع t شدیداً تحت تأثیر حجم نمونه است. آمارهٔ $\overline{X}$ ناآریب بوده، مخرج $n-1$ که در فرمول S_x^2 مشاهده می‌شود، درجهٔ آزادی[2] نامیده می‌شود که با S_x^2 ارتباط دارد. مبنای اصطلاح درجهٔ آزادی به تعداد انحرافات مستقلی که در توزیع آمارهٔ S_x^2 برای تخمین σ_x^2 به کار می‌روند، اشاره دارد. در اینجا مخرج انحراف معیار نمونه را که $n-1$ است درجهٔ آزادی می‌خوانیم.

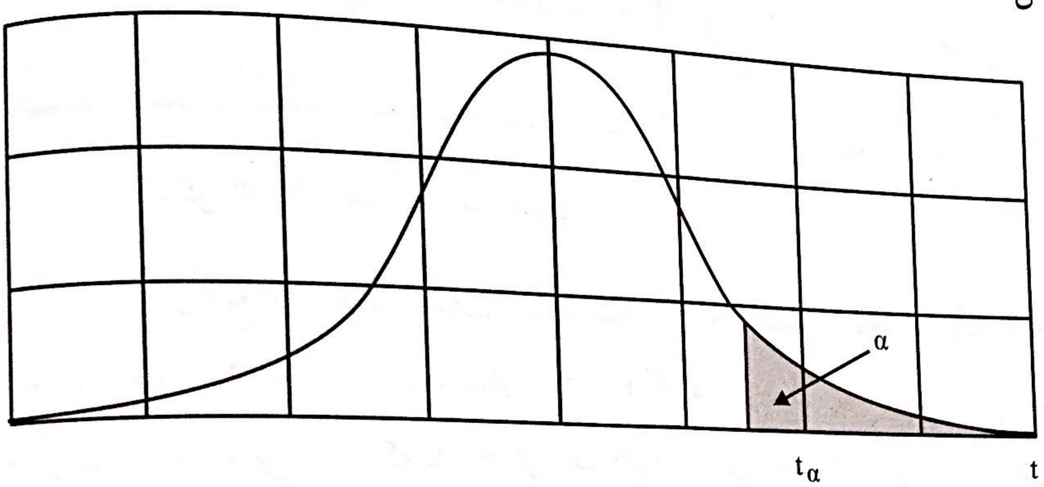
توزیع t استیودنت جداولی دارد که برحسب α و درجهٔ آزادی نوشته شده است. چهارچوب جدول t استیودنت براساس شکل ۴ـ۱۰ ایجاد شده است،

1. Gosset

۲. degree of freedom: چنانچه به منظور برآورد یک عدد مشاهداتی صورت گیرد و عدد برآورد شده موجب استخراج نتایجی شود، دستیابی به این عدد سبب می‌شود که آن مشاهدات مقداری از آزادی خود را از دست بدهند. برای مثال فرض کنید می‌خواهیم ۵ عدد را انتخاب کنیم و در این انتخابها آزادی عمل برای انتخاب هر نوع عددی را هم داریم، یعنی در اینجا درجهٔ آزادی ۵ است. حال فرض کنید که مجموع این ۵ عدد باید ۲۵ باشد، در این صورت با آزادی عمل کامل می‌توان چهار عدد را انتخاب کرد ولی انتخاب عدد پنجم به مجموع چهار عدد انتخاب شده بستگی دارد. در این صورت $d.f = ۵ - ۱ = ۴$ خواهد بود.

توجه داشته باشید که درجه‌های آزادی قابل قبول همیشه $n-1$ نیست و مقدار آن به پارامتری بستگی دارد که می‌خواهیم آن را برآورد کنیم. گفتنی است که در هر روش آماری، شیوهٔ خاصی برای محاسبهٔ درجهٔ آزادی مناسب وجود دارد.

به‌طوری که با تعریف درجهٔ آزادی و مقدار $\frac{\alpha}{۲}$ می‌توان مقدار t دلخواه را با علامت ± استخراج کرد. جدول ۱۰ـ۱ بخشی از جدول t استیودنت در جدول ۳ پیوست و شکل ۱۰ـ۴ مکمل جدول ۱۰ـ۱ است.



شکل ۱۰ـ۴ جدول مقادیر t استیودنت

جدول ۱۰ـ۱ چهارچوب جدول t استیودنت (بخشی از جدول ۳ پیوست)

d.f	t ۰/۱۰۰	t ۰/۰۵۰	t ۰/۰۲۵	t ۰/۰۱۰	t ۰/۰۰۵	d.f
۱	۳/۰۷۸	۶/۳۱۴	۱۲/۷۰۶	۳۱/۸۲۱	۶۳/۶۵۷	۱
۲	۱/۸۸۶	۲/۹۲۰	۴/۳۰۳	۶/۹۶۵	۹/۹۲۵	۲
۳	۱/۶۳۸	۲/۳۵۳	۳/۱۸۲	۴/۵۴۱	۵/۸۴۱	۳
۴	۱/۵۳۳	۲/۱۳۲	۲/۷۷۶	۳/۷۴۷	۴/۶۰۴	۴
۵	۱/۴۷۶	۲/۰۱۵	۲/۵۷۱	۳/۳۶۵	۴/۰۳۲	۵
۶	۱/۴۴۰	۱/۹۴۳	۲/۴۴۷	۳/۱۴۳	۳/۷۰۷	۶
۷	۱/۴۱۵	۱/۸۹۵	۲/۳۶۵	۲/۹۹۸	۳/۴۹۹	۷
۸	۱/۳۹۷	۱/۸۶۰	۲/۳۰۶	۲/۸۹۶	۳/۳۵۵	۸
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
۲۷	۱/۳۱۴	۱/۷۰۳	۲/۰۵۲	۲/۴۷۳	۲/۷۷۱	۲۷
۲۸	۱/۳۱۳	۱/۷۰۱	۲/۰۴۸	۲/۴۶۷	۲/۷۶۳	۲۸
۲۹	۱/۳۱۱	۱/۶۹۹	۲/۰۴۵	۲/۴۶۲	۲/۷۵۶	۲۹
inf.	۱/۲۸۲	۱/۶۴۵	۱/۹۶۰	۲/۳۲۶	۲/۵۷۶	inf.

توجه: درصورتی که درجه آزادی ۳۰ یا بیشتر باشد از سطر آخر جدول t یعنی سطر (.inf) استفاده می‌کنیم که مقادیر این سطر با مقادیر جدول Z مشابه است.

براساس توضیحات فوق می‌توان نوشت:

$$P(-t_{\frac{\alpha}{2},d.f} \le t \le t_{\frac{\alpha}{2},d.f}) = 1-\alpha \qquad (10\text{-}10)$$

حال اگر t را براساس رابطهٔ ۹ـ۱۰ تعریف کنیم خواهیم داشت:

$$P(-t_{\frac{\alpha}{2},d.f} \le \frac{\bar{X}-\mu_x}{S_{\bar{x}}} \le t_{\frac{\alpha}{2},d.f}) = 1-\alpha \qquad (10\text{-}11)$$

حال برحسب مجهول مسئله، یعنی μ_x، رابطهٔ داخل پرانتز مرتب می‌شود:

$$P(-t_{\frac{\alpha}{2},d.f}.S_{\bar{x}} \le \bar{X}-\mu_x \le t_{\frac{\alpha}{2},d.f}.S_{\bar{x}}) = 1-\alpha$$

$$P(-\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2},d.f}.S_{\bar{x}} \le -\mu_x \le -\bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2},d.f}.S_{\bar{x}}) = 1-\alpha$$

و بدین ترتیب:

$$P(\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2},d.f}.S_{\bar{X}} \le -\mu_X \le \bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2},d.f}.S_{\bar{X}}) = 1-\alpha \qquad (10\text{-}12)$$

رابطهٔ ۱۲ـ۱۰ نشان‌دهندهٔ تخمین μ_x است در حالتی که حجم نمونه کوچک و σ_x نامعلوم است؛ در این رابطه $S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}}$ است.

براساس قضیهٔ حد مرکزی همچنان‌که حجم نمونه بزرگ می‌شود، توزیع t استیودنت همچون دیگر توزیعها به سمت توزیع نرمال میل می‌کند، به‌طوری‌که در $n>30$ می‌توان به جای توزیع t استیودنت از توزیع Z برای تخمین μ_x استفاده کرد. به عبارت دیگر، متغیر تصادفی نرمال استاندارد Z جایگزین t می‌شود، به‌طوری‌که رابطه زیر تقریباً برقرار است:

$$Z \approx \frac{\bar{X}-\mu_x}{S_{\bar{x}}} = t \qquad (10\text{-}13)$$

یعنی اینکه برای تخمین فاصله‌ای μ_x هم رابطه ۱۲ـ۱۰ کارساز است هم رابطه ۱۴ـ۱۰.

$$P(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.S_{\bar{x}} \le \mu_x \le \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.S_{\bar{x}}) = 1 - \alpha \qquad (۱۰\text{-}۱۴)$$

مثال ۲ـ۱۰ بازاریابی درصدد بررسی و برآورد قدرت خرید ساکنان یک محله در تهران است. او ناچار باید یک نمونهٔ تصادفی ۱۰تایی از بین خریداران انتخاب و قدرت خرید هر یک را اندازه‌گیری کند. قدرت خرید نمونهٔ فوق برحسب ده هزار تومان چنین است:

$$x_i : ۸, ۷, ۵, ۴, ۱۲, ۱۵, ۱۰, ۱۳, ۱۴, ۱۲$$

قدرت خرید ساکنان محله از توزیع نرمال برخوردار است. در سطح اطمینان ۹۵ درصد میانگین قدرت خرید آنها را برآورد کنید.

توزیع جامعه نرمال، ولی انحراف معیار جامعه نامعلوم است. همچنین حجم نمونه کمتر از ۳۰ است. پس لزوماً باید از توزیع t استیودنت برای تخمین مورد نظر استفاده کرد. بنابراین رابطهٔ ۱۲ـ۱۰ را مجدداً تکرار کرده، محاسبات لازم را انجام می‌دهیم:

$$P(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2},d.f}.S_{\bar{x}} \le \mu_x \le \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2},d.f}.S_{\bar{x}}) = 1 - \alpha$$

در این رابطه لازم است $\bar{X}$ و $S_{\bar{x}}$ را براساس داده‌های مسئله محاسبه کنیم.

x_i	۸	۷	۵	۴	۱۲	۱۵	۱۰	۱۳	۱۴	۱۲	$\Sigma x_i = ۱۰۰$
$(x_i - \bar{X})^۲$	۴	۹	۲۵	۳۶	۴	۲۵	۰	۹	۱۶	۴	$\Sigma (x_i - \bar{X})^۲ = ۱۳۲$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{۱۰۰}{۱۰} = ۱۰$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\Sigma (x_i - \bar{X})^۲}{n-۱}} = \sqrt{\frac{۱۳۲}{۱۰-۱}} = \sqrt{۱۴/۶۶۷} = ۳/۸۳۰$$

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{۲} = \frac{۰/۰۵}{۲} = ۰/۰۲۵ \\ d.f = n-۱ = ۱۰-۱ = ۹ \end{cases} \Rightarrow t_{۰/۰۲۵,۹} = \pm ۲/۲۶۲$$

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \frac{۳/۸۳۰}{\sqrt{۱۰}} = ۱/۲۱۱$$

Scanned with CamScanner

بنابراین مقادیر به دست آمده را در رابطهٔ ۱۲ـ۱۰ جای‌گذاری می‌کنیم.

$$۷/۲۶۱ \le \mu_x \le ۱۲/۷۳۹$$

تحلیل: با ۹۵ درصد اطمینان، می‌توان گفت میانگین قدرت خرید مشتریان بالقوه بین ۷/۲۶۱ تا ۱۲/۷۳۹ تومان خواهد بود.

۳ـ۲ـ۱۰ توزیع جامعه غیرنرمال

در صورتی که توزیع جامعه غیرنرمال و حجم نمونه بزرگ‌تر از ۳۰ باشد، می‌توان برحسب مورد از رابطه‌های ۷ـ۱۰ و ۱۴ـ۱۰ استفاده کرد. برای تخمین μ_x، در حالتی که انحراف معیار نامعلوم باشد از رابطه ۷ـ۱۰ و چنانچه σ_x نامعلوم باشد از رابطهٔ ۱۴ـ۱۰ استفاده می‌کنیم.

چنانچه حجم نمونه کوچک ($n < ۳۰$) و جامعه به‌طور نرمال توزیع نشده باشد برای تنظیم فاصلهٔ اطمینان نمی‌توان از توزیع نرمال و t استیودنت استفاده کرد. در این حالت از قضیهٔ «چی‌بی‌شف» که در فصل چهارم مبحث ۴ـ۴ خواهد آمد، استفاده می‌شود. براساس این قضیه، احتمال قرار گرفتن میانگین نمونه در بین K انحراف استاندارد، $\sigma_{\bar{x}}$، برابر است با:

$$P(|\bar{X}-\mu_x| \le K\sigma_{\bar{x}}) \ge ۱-\frac{۱}{K^۲} \tag{۱۰ـ۱۵}$$

در این عبارت، σ_x معلوم تلقی شده است. اگر σ_x نامعلوم باشد از $S_{\bar{x}}$ استفاده می‌شود. برای ساختن فاصلهٔ اطمینان، ابتدا $۱-\frac{۱}{K^۲}$ برابر درجهٔ مطلوب اطمینان قرار می‌گیرد و K به دست می‌آید. سپس در فاصله اطمینان بر این اساس که σ_x معلوم یا نامعلوم باشد از روابط زیر استفاده می‌شود:

$$P(\bar{X}-K\sigma_{\bar{x}} \le \mu_x \le \bar{X}+K\sigma_{\bar{x}}) \ge ۱-\alpha \tag{۱۰ـ۱۶}$$

یا:

$$P(\overline{X}-KS_{\overline{x}}\leq\mu_x\leq\overline{X}+KS_{\overline{x}})\geq ۱-\alpha$$

مثال ۳ـ۱۰ از شیشه‌هایی که با یک دستگاه پر شده است، یک نمونهٔ تصادفی ۲۵ تایی انتخاب می‌کنیم؛ میانگین آن ۲۵۰ میلی‌لیتر و انحراف معیار آن ۱۰ میلی‌لیتر است. هیچ دلیلی بر نرمال بودن توزیع مایع ریخته‌شده در شیشه‌ها وجود ندارد. در سطح اطمینان ۹۵ درصد، میانگین کل مایع ریخته شده در شیشه‌ها را برآورد کنید.

مقدار K عبارت است از:

$$۱-\frac{۱}{K^{۲}}=۱-\alpha\Rightarrow K=\pm\sqrt{\frac{۱}{\alpha}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{۱}{۰/۰۵}}=\pm۴/۴۷$$

بنابراین:

$$(۲۴۱/۰۶\leq\mu_x\leq۲۵۸/۹۴)$$

تحلیل: با حداقل ۹۵ درصد اطمینان می‌توان گفت که میانگین کل مایع بین ۲۴۱/۰۶ تا ۲۵۸/۹۴ میلی‌لیتر است.

تمرین

۱. رابطهٔ بین عرض فاصلهٔ اطمینان با سطح خطا را وقتی که یک فاصلهٔ اطمینان ساخته می‌شود توضیح دهید.

۲. فرض کنید که مقدار α ثابت باشد، رابطهٔ بین عرض فاصلهٔ اطمینان با اندازه نمونه (n) را توضیح دهید.

۳. یک نمونهٔ تصادفی n تایی از جامعه‌ای با میانگین μ_x و انحراف معیار σ_x انتخاب شده است. میانگین و انحراف معیار نمونه به ترتیب $\overline{X}=۴۵$ و $S_x=۵/۸$ است. سطح اطمینان ۹۵ درصد را در نظر گرفته، فاصلهٔ اطمینان را در حالت $n=۳۰$، $n=۶۰$ و $n=۹۰$ محاسبه کنید و توضیح دهید کدام یک از فاصله‌ها عرض کمتر و کدام عرض بیشتری دارند؟ چرا؟

۴. مدیر یک سازمان بزرگ درصدد تعیین میانگین حقوق ماهانه کارمندان خود است. از آنجا که دسترسی به تمامی کارمندان سازمان امکان‌پذیر نیست، یک نمونهٔ تصادفی ۱۰۰ نفره انتخاب شده که میانگین حقوق ماهانه آنان ۲۵ هزار تومان و انحراف معیارشان ۹۰۰ تومان است. چنانچه توزیع دستمزد کارمندان نرمال باشد، میانگین واقعی حقوق ماهانه آنان را در سطح اطمینان ۹۵ درصد برآورد کنید.

۵. رئیس دانشکده‌ای درصدد تعیین کیفیت تحصیلی دانشجویان خود است. او معتقد است که معدل کل دانشجویان نشان‌دهندهٔ این مهم است. در این راستا از بین دانشجویان دانشکده یک نمونهٔ تصادفی ۱۲ نفره انتخاب شده‌اند که معدل هریک به این شرح است:

x_i : ۱۵ , ۱۷ , ۱۳ , ۱۲ , ۱۰ , ۹ , ۱۴ , ۱۵ , ۱۶ , ۱۴ , ۱۲ , ۱۳

الف) فرض کنید توزیع معدل دانشجویان دانشکده نرمال است؛ تخمین لازم را در سطح خطای ۵ درصد به عمل آورید.

ب) فرض نرمال بودن توزیع معدل دانشجویان، یک فرض غیرواقعی جلوه می‌کند، چون ظاهراً نمره‌های دانشجویان چولگی دارد؛ مجدداً تخمین مناسب را به عمل آورید.

ج) از مقایسهٔ نتایج بند الف و ب چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت، آن را توضیح دهید؟

۳ـ۱۰ تخمین فاصله‌ای تفاضل میانگین دو جامعه $(\mu_1-\mu_2)$

همچنان که برآورد میانگین واقعی یک جامعهٔ آماری اهمیت دارد، به همان نسبت و شاید هم بیشتر، مقایسهٔ دو جامعهٔ آماری با استفاده از میانگین آنها نیز برای تصمیم‌گیری اهمیت دارد. همچون آمار توصیفی اولین شاخص مقایسهٔ جوامع آماری از نظر سودآوری، دستمزد، کیفیت، هزینه و غیره میانگین آنهاست. ولی

آنچه اهمیت دارد اینکه به جای میانگین جوامع آماری، میانگین نمونه‌ای n تایی از آنها در دسترس است. بنابراین مقایسهٔ دو جامعهٔ آماری باید با استفاده از میانگینهای نمونه‌ها صورت گیرد.

اگر μ_1 و σ_1^2 به ترتیب میانگین و واریانس جامعهٔ اول و μ_2 و σ_2^2 به ترتیب میانگین و واریانس جامعهٔ دوم باشند، پس n_1 و n_2 به ترتیب دو نمونهٔ تصادفی از جامعه اول و دوم هستند که فرض می‌شود از یکدیگر مستقل‌اند. این نمونه‌ها هر یک آماره‌های $\bar{X}_1$ و S_1^2 برای جامعهٔ اول، و $\bar{X}_2$ و S_2^2 برای جامعهٔ دوم دارند.

برای مقایسهٔ میانگین دو جامعه، اولین روشی که به ذهن هر تصمیم گیرنده‌ای می‌رسد استفاده از تخمین فاصله‌ای است که در مبحث ۲ـ۱۰ آمد، ولی به‌خوبی می‌دانیم شناخت علامت تفاضل میانگینها ما را از دو تخمین جداگانه رها می‌سازد. پس بدین ترتیب، پارامتر $\mu_1-\mu_2$ شکل می گیرد. به‌خوبی می‌توان فهمید که $\bar{X}_1-\bar{X}_2$، یک آمارهٔ نااریب برای $\mu_1-\mu_2$ با کمترین واریانس خواهد بود. پس با شناخت توزیع نمونه گیری $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ می‌توان به تخمین فاصله‌ای $\mu_1-\mu_2$ پرداخت. تخمین فاصله‌ای به عمل آمده به ما کمک می کند که به‌راحتی جوامع آماری را با یکدیگر مقایسه کنیم.

اگر $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند، پس:

(۱۰ـ۱۷)

$$\mu_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\mu_{\bar{x}_1}-\mu_{\bar{x}_2}$$

یعنی:

$$\mu_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\mu_1-\mu_2$$

و:

(۱۰ـ۱۸)

$$\sigma^2_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\sigma^2_{\bar{x}_1}+\sigma^2_{\bar{x}_2}$$

یعنی:

$$\sigma^2_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

و به عبارت دیگر:

$$\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \qquad (۱۰\_۱۹)$$

همچنین داشتیم «ترکیب خطی دو متغیر تصادفی مستقل نرمال است، اگر توزیع هریک از آنها نرمال باشد».

حاصل قضایای فوق ما را به این اصل می‌رساند که تمامی مفاهیم بیان شده در مبحث تخمین فاصله‌ای μ_x به تخمین تفاضل $\mu_1-\mu_2$ نیز قابل تعمیم است. حال تخمین فاصله‌ای $\mu_1-\mu_2$ را می‌توان بدین صورت تعریف عمومی کرد:

$$(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\pm\varepsilon \qquad (۱۰\_۲۰)$$

مقدار ε صرف‌نظر از سطح اطمینان به این شرایط بستگی دارد:

۱. نوع توزیع آماری دو جامعهٔ مورد نمونه‌گیری (نرمال یا غیرنرمال).

۲. کیفیت انحراف معیار دو جامعهٔ مورد نمونه‌گیری (معلوم یا نامعلوم، مساوی یا نامساوی).

۳. مقدار درجهٔ آزادی، $d.f=n_1+n_2-2$ (بزرگ یا کوچک).

ترکیبات شرایط فوق روابط مختلفی برای تخمین فاصله‌ای $\mu_1-\mu_2$ پدید خواهد آورد که هریک را توضیح می‌دهیم.

۱۰_۳_۱ توزیع دو جامعهٔ آماری نرمال و σ_1 و σ_2 معلوم

چون توزیع جامعه نرمال و σ_1 و σ_2 معلوم است، پس توزیع $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ نیز نرمال است؛ بنابراین براساس قضایای ۱۰_۱۷ و ۱۰_۱۸ می‌توان متغیر استاندارد Z را به این صورت تعریف کرد:

$$Z=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}} \qquad (۱۰\_۲۱)$$

با جای‌گذاری این مقدار برای Z در رابطهٔ:

$$P[-Z_{\frac{\alpha}{2}}\leq Z\leq Z_{\frac{\alpha}{2}}]=1-\alpha \qquad (۱۰\_۲۲)$$

داریم:

$$P\left[-Z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}} \le Z_{\frac{\alpha}{2}}\right]=1-\alpha$$

که از آن این فاصلهٔ اطمینان نتیجه می‌شود:

(۱۰-۲۳)

$$P\left[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} \le \mu_1-\mu_2 \le (\bar{X}_1-\bar{X}_2)+Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}\right]=1-\alpha$$

مثال ۴-۱۰ هدف از تحقیقی، مقایسهٔ عملکرد کارمندان در دو سازمان است و ملاک مقایسه میانگین دو جامعهٔ آماری است. البته به دلیل در دسترس نبودن عملکرد کلیهٔ کارمندان، محققان ناچارند به نمونه‌هایی از هر جامعه اکتفا کنند. از سازمان الف یک نمونهٔ تصادفی ۲۵ نفره با میانگین ۶۰ و از سازمان ب یک نمونهٔ تصادفی ۲۰ نفره با میانگین ۵۵ انتخاب شده است. توزیع نمره‌های عملکرد هر دو سازمان نرمال و انحراف معیار عملکرد در هر دو جامعه به ترتیب ۱۰ و ۱۲ است. در سطح احتمال خطای یک درصد میانگین عملکرد دو جامعه را با یکدیگر مقایسه کنید.

چون توزیعها برای هر دو جامعه نرمال بوده، یعنی $\sigma_1=10$ و $\sigma_2=12$ است، از رابطهٔ ۲۳-۱۰ برای تخمین $\mu_1-\mu_2$ استفاده می کنیم:

سازمان الف	سازمان ب
$n_1=25$	$n_2=20$
$\bar{X}_1=60$	$\bar{X}_2=55$
$\sigma_1=10$	$\sigma_2=12$
توزیع نرمال	توزیع نرمال

بنابراین:

$$Z_{\frac{\alpha}{2}}=Z_{0/005}=\pm 2/58$$

خواهد بود؛ یعنی:

$$\varepsilon=2/58\times\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$\varepsilon = ۲/۵۸ \times \sqrt{\frac{۱۰۰}{۲۵} + \frac{۱۴۴}{۲۰}} = ۸/۶۳۴$$

$$(-۳/۶۳۴ \le \mu_۱ - \mu_۲ \le ۱۳/۶۳۴)$$

تحلیل: به‌طور کلی برآورد فاصله‌ای $\mu_۱ - \mu_۲$ براساس علامت عرض برآورد تفسیر می‌شود؛ به طوری که:

الف) اگر هر دو دامنه مثبت باشد در سطح اطمینان مورد نظر $\mu_۱$ بزرگ‌تر از $\mu_۲$ است $(\mu_۱ - \mu_۲ > ۰)$.

ب) اگر هر دو دامنه منفی باشد در سطح اطمینان مورد نظر $\mu_۱$ کوچک‌تر از $\mu_۲$ است $(\mu_۱ - \mu_۲ < ۰)$.

ج) در غیر این صورت (موارد الف و ب) بین $\mu_۱$ و $\mu_۲$ اختلاف معناداری دیده نمی‌شود، چون تخمین به عمل آمده از نقطهٔ صفر می‌گذرد $(\mu_۱ - \mu_۲ = ۰)$.

مثال فوق بر مورد ج منطبق است. حد پایین فاصله، LCL، منفی و حد بالای آن، UCL، مثبت است. پس می‌توان گفت در سطح اطمینان ۹۹ درصد بین میانگین عملکرد کارمندان دو سازمان اختلاف معناداری دیده نمی‌شود، بلکه این اختلاف ناشی از خطای نمونه‌گیری است.

این نکته مهم است که هرچه قدر مطلق LCL و UCL در حالتهای الف و ب بیشتر باشد از شدت اختلاف $\mu_۱$ و $\mu_۲$ ناشی می‌شود.

۱۰-۳-۲ توزیع دو جامعهٔ آماری نرمال و انحراف معیارها نامعلوم

در بیشتر تحقیقات فرض معلوم بودن $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ تقریباً امری نامعقول است؛ زیرا اغلب آنها نامعلوم‌اند. بر این اساس، توزیع آمارهٔ $\bar{X}_۱$ و $\bar{X}_۲$ به‌طور جداگانه نرمال است. پس ترکیب خطی $(\bar{X}_۱ - \bar{X}_۲)$ آنها نیز دارای توزیع نرمال خواهد بود؛ یعنی اینکه متغیر استاندارد عبارت است از:

$$t = \frac{(\bar{X}_۱ - \bar{X}_۲) - (\mu_۱ - \mu_۲)}{S_{\bar{x}_۱ - \bar{x}_۲}} \qquad (۱۰\text{-}۲۴)$$

تعریف $S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}$ به کیفیت واریانسهای دو جامعه در مقایسه با یکدیگر بستگی دارد، به‌طوری که اگر «فرض تساوی واریانس دو جامعه، $\sigma_1^2=\sigma_2^2$» پذیرفته شود، می‌توان گفت هر دو جامعه در نظر یک جامعه تلقی می‌شوند؛ بنابراین واریانس مشترک آنها (σ_x^2) باید براساس S_1^2 و S_2^2 برآورد شود. حال به ادغام واریانس نمونه‌های به دست آمده به این شرح می‌پردازیم:

$$S_p^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} \tag{۱۰_۲۵}$$

و بنابراین:

$$S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

خواهد بود. با این توصیف متغیر استاندارد در رابطهٔ ۲۴ــ۱۰ به این صورت تغییر خواهد کرد:

$$t=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \tag{۱۰_۲۶}$$

که درجهٔ آزادی آن $d.f=n_1+n_2-2$ است. بنابراین اگر متغیر استاندارد t را در رابطهٔ زیر جای‌گذاری کنیم:

$$P[-t_{\frac{\alpha}{2},d.f}\le t\le t_{\frac{\alpha}{2},d.f}]=1-\alpha \tag{۱۰_۲۷}$$

تخمین فاصله‌ای چنین به دست می‌آید:

(۱۰_۲۸)

$$P[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-t_{\frac{\alpha}{2},d.f}.S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\le\mu_1-\mu_2\le(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+t_{\frac{\alpha}{2},d.f}.S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}]=1-\alpha$$

حال آنکه اگر فرض $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ پدید آید، $S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}$ به این صورت تعریف می‌شود:

$$S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} \tag{۱۰_۲۹}$$

Scanned with CamScanner

به عبارت دیگر، از برآورد نقطه‌ای $\sigma^2_{\bar{x}_1}$ و $\sigma^2_{\bar{x}_2}$ استفاده خواهد شد. اگرچه مجدداً توزیع $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ از توزیع t برخوردار است، به لحاظ تعریف آن را با t' نشان می‌دهیم که عبارت است از:

$$t'=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} \qquad (۱۰\text{-}۳۰)$$

بر این اساس تخمین فاصله‌ای عبارت خواهد بود از:

(۱۰-۳۱)

$$P[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-t'_{\frac{\alpha}{2},d.f'}\cdot\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\le\mu_1-\mu_2\le(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+t'_{\frac{\alpha}{2},d.f'}\cdot\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}]=1-\alpha$$

که در رابطهٔ ۳۱-۱۰، t' دارای درجهٔ آزادی زیر است:

$$d.f'=\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}} \qquad (۱۰\text{-}۳۲)$$

واضح است که هم t و هم t' با افزایش حجم نمونه‌ها، n_1 و n_2، براساس قضیهٔ حد مرکزی از تقریب Z برخوردار خواهند بود؛ بنابراین چنانچه $d.f=n_1+n_2-2$ دست کم ۳۰ باشد می‌توان از هر یک از رابطه‌های ۲۸-۱۰ و ۳۱-۱۰ و یا رابطهٔ عمومی ۳۳-۱۰ برای تخمین فاصله‌ای $\mu_1-\mu_2$ استفاده کرد:

(۱۰-۳۳)

$$P[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_1}}\le\mu_1-\mu_2\le(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}]=1-\alpha$$

مثال ۵-۱۰ هدف از این تحقیق، مقایسهٔ سطح آمادگی کارمندان در سازمان

الف با سازمان ب است. در این تحقیق از سازمان الف یک نمونهٔ ۹ نفره انتخاب شده که میانگین آن ۴۵ و انحراف معیارش ۱۲ است، درحالی که میانگین و انحراف معیار سطح آمادگی کارمندان سازمان ب در یک نمونهٔ ۱۵ نفره به ترتیب ۵۵ و ۱۴ است. فرض کنید توزیع نمره‌های سطح آمادگی در دو سازمان نرمال و $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ است. در سطح اطمینان ۹۰ درصد تخمین لازم را برای مقایسهٔ میانگین دو جامعه به عمل آورید.

از آنجا که فرض تساوی واریانسها پذیرفته شده است می‌توان از فرمول ۱۰ـ۲۸ برای تخمین فاصله‌ای $\mu_1 - \mu_2$ استفاده کرد.

$$S_p = \sqrt{\frac{(۸)(۱۲)^۲ + (۱۴)(۱۴)^۲}{۹+۱۵-۲}} = ۱۳/۳۱$$

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{۲} = ۰/۰۵ \\ d.f = n_1 + n_2 - ۲ = ۹+۱۵-۲ = ۲۲ \end{cases} \Rightarrow t_{۰/۰۵,۲۲} = \pm ۱/۷۱۷$$

$$(۴۵-۵۵) \pm ۱/۷۱۷ (۱۳/۳۱ \times \sqrt{\frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۱۵}}) = (-۱۹/۶۳۵, -۰/۳۶۴)$$

$$-۱۹/۶۳۵ \le \mu_1 - \mu_2 \le -۰/۳۶۴$$

تحلیل: چون هر دو دامنه منفی است، پس در سطح احتمال خطای ۱۰ درصد می‌توان گفت که μ_1 کوچک‌تر از μ_2 است.

۱۰ـ۳ـ۳ توزیع دو جامعهٔ مورد نمونه‌گیری غیرنرمال

در این حالت با فرض نامعلوم بودن پراکندگی دو جامعه، توزیع $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ تحت تأثیر مقدار درجهٔ آزادی است. اگر $d.f > ۳۰$ باشد، توزیع آمارهٔ $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ نرمال می‌شود که می‌توان با استفاده از رابطهٔ ۱۰ـ۳۳ تخمین لازم را به عمل آورد. در غیر این صورت، باید از قاعدهٔ چی‌بی‌شف استفاده کرد که به دلیل کم اهمیت بودن آن در برآورد $\mu_1 - \mu_2$ از ذکر آن صرف‌نظر می کنیم.

تمرین

۱. در چه شرایطی پذیرش فرض نرمال برای توزیع $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ منطقی است؟

۲. نمونه‌های تصادفی مستقل از هم به حجم n_1 و n_2 از دو جامعهٔ آماری مختلف استخراج شده و این اطلاعات به دست آمده است:

نمونهٔ اول	نمونهٔ دوم
n_1 = ۱۰۰	n_2 = ۱۵۰
$\bar{X}_1$ = ۴۰	$\bar{X}_2$ = ۳۲
S_1 = ۱۳	S_2 = ۱۶

فاصله‌های اطمینان ۹۹ درصد و ۹۵ درصد را محاسبه و با یکدیگر مقایسه کنید؛ چه نتیجه‌ای حاصل می‌شود؟

۳. هدف تحقیقی، مقایسهٔ هزینه سوخت دو منطقه تهران با اطمینان ۰/۹۵ در فصل زمستان است. توزیع هزینه سوخت در هر دو منطقهٔ مورد نظر نرمال است. در این تحقیق از منطقه اول، ۵ خانوار و از منطقه دوم، ۸ خانوار به‌طور تصادفی انتخاب شده و هزینه سوخت آنها بدین شرح است:

هزینه سوخت منطقه اول	۱۰۰۰	۱۱۰	۹۰۰	۸۱۰	۸۵۰			
هزینه سوخت منطقه دوم	۵۵۰	۴۵۰	۱۰۰۰	۸۵۰	۳۶۰	۳۵۰	۴۰۰	۴۵۰

الف) با فرض تساوی واریانسهای دو منطقه، میانگین هزینه سوخت را در دو منطقه مقایسه کنید.

ب) با فرض عدم تساوی واریانسهای دو منطقه، میانگین هزینه سوخت را مقایسه کنید.

ج) با مقایسهٔ فواصل به دست آمده در دو حالت چه نتیجه‌ای حاصل می‌شود؟ چرا؟

۴ـ۱۰ تخمین فاصله‌ای نسبت موفقیت جامعه (p)

محققان اغلب از نمونه برای تخمین نسبت موفقیت در جامعهٔ آماری استفاده می‌کنند. برای مثال، دولتمردان با استفاده از نمونه می‌توانند به نرخ بیکاری یا نسبت افراد شاغل به کل واجدین شرایط کار پی ببرند. یک مدیر با استفاده از نمونه می‌تواند درصد افراد راضی از شغل خود را مشخص کند. به‌طور کلی، نسبت موفقیت یکی از مهم‌ترین پارامترهای توصیف مشاهده‌ها با مقیاس اسمی یا رتبه‌ای است. از آنجا که بسیاری از تحقیقات در مدیریت از مقیاس کیفی برخوردارند، استنباط نسبت موفقیت در جامعهٔ آماری (p) با استفاده از یک نمونه n تایی اهمیت ویژه‌ای دارد.

در فصل نهم اشاره کردیم که برای پارامتر $p=\frac{X}{N}$ آمارهٔ $\overline{p}$ وجود دارد. توزیع نمونه‌گیری $\overline{p}$ در نمونه‌های بزرگ از تقریب نرمال برخوردار است و متغیر استاندارد آن چنین است:

$$Z=\frac{\overline{p}-p}{\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}} \qquad (۱۰\text{ـ}۳۴)$$

که در آن $p=\mu_{\overline{p}}$ و $S'_{\overline{p}}=\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$ است. حال برای تخمین فاصله‌ای p می‌توان مقدار Z را در رابطهٔ ۳۵ـ۱۰ جای‌گذاری کرد:

$$P(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\le Z\le Z_{\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha \qquad (۱۰\text{ـ}۳۵)$$

$$P(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\le \frac{\overline{p}-p}{\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}}\le Z_{\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha$$

براین اساس، تخمین فاصله‌ای p چنین به دست می‌آید:

$$P(\overline{p}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\le p\le \overline{p}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}})=1-\alpha \qquad (۱۰\text{ـ}۳۶)$$

واضح است که عبارت $Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$ همان مقدار ε است که در رابطهٔ $\overline{p}\pm\varepsilon$ تعریف می‌شود.

مثال ۶ـ۱۰ هدف از این تحقیق تعیین نسبت افراد ناراضی در سازمان است. از آنجا که دسترسی به تمام افراد سازمان میسر نیست، محققان ۴۰۰ نفر از کارمندان را به‌طور تصادفی انتخاب کرده‌اند که فقط ۳۲ نفر از آنها از کار خود ناراضی‌اند. نسبت افراد ناراضی را در سازمان در سطح خطای یک درصد برآورد کنید.

$$n = ۴۰۰$$

$$X = ۳۲$$

$$\bar{p} = \frac{X}{n} = \frac{۳۲}{۴۰۰} = ۰/۰۸$$

$$Z_{\frac{\alpha}{۲}} = Z_{۰/۰۰۵} = \pm ۲/۵۸$$

بنابراین:

$$\varepsilon = ۲/۵۸ \sqrt{\frac{۰/۰۸ \times ۰/۹۲}{۴۰۰}} = ۰/۰۳۵$$

پس:

$$۰/۰۴۵ \leq p \leq ۰/۱۱۵$$

در نتیجه، با اطمینان ۹۹ درصد می‌توان گفت که نسبت افراد ناراضی در سازمان بین ۴/۵ تا ۱۱/۵ درصد کل کارمندان سازمان است. به عبارت دیگر، نسبت افراد ناراضی در سازمان با ۹۹ درصد احتمال، حداکثر ۱۱/۵ درصد است.

۵ـ۱۰ تخمین فاصله‌ای تفاضل نسبت موفقیت در دو جامعه $(p_۱ - p_۲)$

چنانچه داده‌های جمع‌آوری شده از دو جامعهٔ آماری میانگین‌پذیر باشند،[1] از تخمین فاصله‌ای $\mu_۱ - \mu_۲$ برای مقایسهٔ آنها استفاده می‌شود. ولی چنانچه داده‌ها از نوع کیفی باشند، به ناچار، باید از مقایسهٔ نسبت موفقیت دو جامعهٔ آماری استفاده کرد. اگر $p_۱$

۱. داده‌هایی که از نوع کمّی یا دارای مقیاس نسبی یا فاصله‌ای باشند داده‌های میانگین‌پذیرند.

را نسبت موفقیت در جامعه اول و p_2 را نسبت موفقیت در جامعهٔ دوم بدانیم، $\bar{p}_1=\frac{X_1}{n_1}$ و $\bar{p}_2=\frac{X_2}{n_2}$ به ترتیب آماره‌های آنها محسوب می‌شوند. حال براساس این فرضیات که:

الف) نمونه‌های تصادفی مستقل از دو جامعهٔ آماری انتخاب می‌شوند و

ب) دو نمونهٔ تصادفی هر کدام به گونه‌ای معقول بزرگ هستند

می‌توان پذیرفت که آمارهٔ $\bar{p}_1-\bar{p}_2$، برآوردکنندهٔ ناااریب از p_1-p_2 با کمترین واریانس خواهد بود. ویژگیهای آماره $\bar{p}_1-\bar{p}_2$ عبارت‌اند از:

$$\mu_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}=\mu_{\bar{p}_1}-\mu_{\bar{p}_2}=p_1-p_2 \tag{10-37}$$

$$\sigma^2_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}=\sigma^2_{\bar{p}_1}+\sigma^2_{\bar{p}_2}=\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2} \tag{10-38}$$

بنابراین، می‌توان دریافت که آمارهٔ $\bar{p}_1-\bar{p}_2$ دارای توزیع نرمال است که به این صورت استاندارد می‌شود:

$$Z=\frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sigma_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}} \tag{10-39}$$

ولی برای برآورد فاصله‌ای p_1-p_2 ناچار باید یک آمارهٔ ناااریب برای $\sigma^2_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}$ تعریف کرد که عبارت است از:

$$S_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}=\sqrt{\frac{\bar{p}_1(1-\bar{p}_1)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2(1-\bar{p}_2)}{n_2}} \tag{10-40}$$

حال متغیر استاندارد را با استفاده از $S_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}$ تعریف می‌کنیم:

$$Z=\frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{S_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}} \tag{10-41}$$

بدین ترتیب برآورد فاصله‌ای p_1-p_2 که عبارت است از:

$$(\bar{p}_1-\bar{p}_2)\pm\varepsilon \tag{10-42}$$

در سطح اطمینان $100(1-\alpha)$ درصد به این صورت تعریف می‌شود:

$$P\left[(\bar{p}_۱-\bar{p}_۲)-Z_{\frac{\alpha}{۲}}.S_{\bar{p}_۱-\bar{p}_۲}\leq p_۱-p_۲\leq(\bar{p}_۱-\bar{p}_۲)+Z_{\frac{\alpha}{۲}}.S_{\bar{p}_۱-\bar{p}_۲}\right]=۱-\alpha \qquad (۱۰\text{-}۴۳)$$

مثال ۷ـ۱۰ تحقیقی در ارتباط با مقایسهٔ درصد مدیران برخوردار از روش $S_۱$ در سازمانهای دولتی با مدیران سازمانهای خصوصی برنامه‌ریزی شده است. بدین منظور از میان مدیران دولتی یک نمونهٔ ۵۰۰ تایی و از مدیران خصوصی یک نمونهٔ ۴۰۰ تایی انتخاب شده است. ۱۰۰ نفر از مدیران دولتی و ۵۰ نفر از مدیران سازمانهای خصوصی روش $S_۱$ دارند. با درنظرگرفتن سطح اطمینان ۹۵ درصد نسبت واقعی مدیران برخوردار از روش $S_۱$ را در دو جامعه آماری مقایسه کنید.

سازمانهای خصوصی	سازمانهای دولتی
$n_۲=۴۰۰$	$n_۱=۵۰۰$
$X_۲=۵۰$	$X_۱=۱۰۰$
$\bar{p}_۲=\frac{۵۰}{۴۰۰}=۰/۱۲۵$	$\bar{p}_۱=\frac{۱۰۰}{۵۰۰}=۰/۲۰$

$$Z_{\frac{\alpha}{۲}}=Z_{۰/۰۲۵}=\pm۱/۹۶$$

بنابراین، براساس رابطهٔ ۴۳ـ۱۰ تخمین فاصله‌ای $p_۱-p_۲$ عبارت است از:

$$(۰/۲۰-۰/۱۲۵)\pm۱/۹۶\sqrt{\frac{۰/۲۰(۰/۸۰)}{۵۰۰}+\frac{(۰/۱۲۵)(۰/۸۷۵)}{۴۰۰}}=(۰/۰۲۷,۰/۱۲۳)$$

$$(۰/۰۲۷\leq p_۱-p_۲\leq ۰/۱۲۳)$$

بدین ترتیب، چون هر دو دامنهٔ عرض برآورد تفاضل $p_۱$ و $p_۲$ مثبت است، پس در سطح اطمینان ۹۵ درصد نسبت واقعی مدیران برخوردار از روش $S_۱$ در سازمانهای دولتی بیشتر از نسبت مدیران برخوردار از روش $S_۱$ در سازمانهای خصوصی است.

تمرین

۱. از میان دارندگان مدرک دیپلم یک نمونهٔ تصادفی ۴۰۰ تایی انتخاب شده است که ۳۰ نفر از آنها بیکارند. در سطح اطمینان ۹۰ درصد نسبت واقعی افراد بیکار

را در میان دارندگان مدرک دیپلم برآورد کنید. اگر کل جامعهٔ مورد نظر یک میلیون نفر باشد، تعداد بیکارهای آنها در سطح خطای ده درصد چقدر است؟

۲. مدیر کنترل کیفیت کارخانهٔ تولید لامپ درصدد مقایسه درصد ضایعات کارخانهٔ خود با کارخانهٔ مشابه است. در این زمینه از تولیدات کارخانه خود یک نمونهٔ تصادفی ۲ هزار واحدی انتخاب کرده که ۲۰۰ واحد آن سوخته است، درحالی که از میان هزار لامپ انتخاب شده از کارخانهٔ مشابه فقط ۱۵۰ لامپ سوخته است. در سطح اطمینان ۹۵ درصد ضایعات را در دو کارخانه مقایسه کنید و توضیح دهید مدیر کنترل کیفیت چه نتیجه‌ای خواهد گرفت؟

۱۰ـ۶ تعیین اندازه نمونه

در صدر برنامه‌ریزی هر مطالعه یا تحقیقی این سؤال مطرح است که اندازه نمونه چقدر باشد. این سؤال موضوع مهمی است و هرگز نباید آن را کوچک شمرد. انتخاب نمونه‌ای بزرگ‌تر از حد نیاز برای حصول نتایج مورد نظر سبب اتلاف منابع می‌شود، درحالی که انتخاب نمونه‌های خیلی کوچک، اغلب پژوهشگر را به نتایجی سوق می‌دهد که فاقد استفاده عملی است. از این رو، در این مبحث چگونگی تعیین اندازه نمونه مورد نیاز را بررسی می کنیم. فرمول تعیین اندازه نمونه به نوع نیاز بستگی دارد. به‌طور کلی، فرمولهای اندازه نمونه به مقیاس داده‌هایی مربوط‌اند که ما آنها را برحسب کمّی و کیفی تقسیم و به کمک تخمین میانگین و نسبت موفقیت، روشهایی برای تعیین اندازه نمونه ارائه می کنیم.

۱ـ۶ـ۱۰ تعیین اندازه نمونه برای تخمین میانگین جامعه (μ_x)

داده‌هایی که دارای مقیاس نسبی و فاصله‌ای‌اند از نوع داده‌های میانگین‌پذیرند. در این نوع داده‌ها برای تعیین اندازه نمونه از تخمین فاصله‌ای میانگین استفاده می‌شود. یعنی:

$$\bar{X} \pm \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_{\bar{x}} \quad (۱۰ـ۴۴)$$

$$\varepsilon = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \qquad (۱۰\text{-}۴۵)$$

چون تمام عرض حدود اطمینان دو برابر این مقدار است اگر ضریب انحراف استاندارد مقداری ثابت در نظر گرفته شود، تنها راهی که برای کم کردن عرض حدود می‌ماند این است که انحراف معیار را کاهش دهیم. از این رو، چون انحراف معیار $\bar{X}$ برابر $\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ و σ_x عدد ثابتی است، تنها راه دستیابی به انحراف معیار کوچک‌تر این است که نمونه بزرگ‌تری انتخاب شود. اما این نمونه تا چه اندازه باید بزرگ باشد؟ بزرگی اندازه نمونه به مقدار σ_x، سطح اطمینان و عرض مطلوب حدود اطمینان بستگی دارد.

هنگامی که نمونه‌گیری با جای‌گذاری از یک جامعهٔ محدود و یا نمونه‌گیری بدون جای‌گذاری از یک جامعه نامحدود انجام گیرد - به نحوی که اغماض اصلاح جامعهٔ محدود را تضمین کند - در این صورت اگر معادله ۴۵-۱۰ برحسب مجهول n حل شود خواهیم داشت:

$$n = \frac{Z^2_{\frac{\alpha}{2}} \sigma^2_x}{\varepsilon^2} \qquad (۱۰\text{-}۴۶)$$

هرگاه نمونه‌برداری بدون جای‌گذاری از یک جامعهٔ محدود انجام شود، اصلاح جمعیت محدود لازم می‌آید. در نتیجه مقدار ε با عامل تصحیح $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ باید تعریف شود؛ یعنی:

$$\varepsilon = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \qquad (۱۰\text{-}۴۷)$$

که وقتی برای n حل شود، به این صورت درمی‌آید:

$$n = \frac{N Z^2_{\frac{\alpha}{2}} \sigma^2_x}{\varepsilon^2 (N-1) + Z^2_{\frac{\alpha}{2}} \sigma^2_x} \qquad (۱۰\text{-}۴۸)$$

اگر بتوان از اصلاح جمعیت محدود صرف‌نظر کرد، معادله ۴۸-۱۰ به ۴۶-۱۰ تقلیل می‌یابد.

آگاهی از مقدار σ_x^2 برای استفاده از فرمولهای بالا، به منظور تعیین اندازه نمونه ضروری است. ولی چنان‌که پیش از این نیز یادآوری شد، انحراف معیار جامعه قاعدتاً برای تخمین μ_x نامعلوم است. در نتیجه σ_x^2 را باید برآورد کرد. معمول‌ترین روشهای برآورد σ_x^2 عبارت‌اند از:

۱. می‌توان نمونهٔ مقدماتی را از جامعهٔ آماری انتخاب و با استفاده از آن انحراف معیار جامعه را محاسبه کرد و به عنوان برآورد σ_x^2 به کار برد. مشاهداتی را که در نمونهٔ مقدماتی به کار می‌روند می‌توان بخشی از نمونه نهایی شمرد، به طوری که:

$$n_1 = \text{(اندازه نمونه مقدماتی)} \quad n - \text{(اندازه نمونه محاسبه شده)} \qquad (۱۰\text{-}۴۹)$$
$$n_2 \ \text{(تعداد مشاهدات لازم برای تکمیل نمونه)}$$

۲. ممکن است برآوردهای σ_x^2 از مطالعهٔ مشابه در دسترس باشد.

۳. اگر شواهدی وجود داشته باشد که جامعه مورد نمونه‌گیری به‌طور تقریبی از توزیع نرمال برخوردار است، می‌توان این حقیقت را به کار برد که عرض دامنه، تقریباً معادل ۴ یا ۶ انحراف معیار است و $\sigma_x \approx \frac{R}{۴}$ یا $\sigma_x \approx \frac{R}{۶}$ خواهد بود. R دامنه تغییرات است که محاسبهٔ آن مستلزم در دسترس بودن کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین مقدار متغیر در جامعهٔ آماری است.

مثال ۱۰ـ۸ یکی از محققان مدیریت مایل است مطالعه‌ای به منظور تعیین میانگین رشد کاری کارمندان سازمانی انجام دهد. در این مطالعه او دقت برآورد را ۵ نمره در نظر گرفته و تصور می‌کند که انحراف معیار نمره‌های رشد کاری کارمندان ۲۰ نمره باشد. اندازه نمونه لازم را برای بررسی نهایی در سطح خطای ۵ درصد محاسبه کنید.

چون اشاره‌ای به تعداد عناصر جامعهٔ آماری نشده است، نمونه‌گیری از جامعهٔ نامحدود فرض شده و حجم نمونه با استفاده از رابطه ۴۶ـ۱۰ محاسبه می‌شود:

$$n = \frac{(۱/۹۶)^۲(۲۰)^۲}{(۵)^۲} = ۶۱/۵$$

محقق مذکور باید ۶۲ نفر را به عنوان نمونه در بررسی خود انتخاب کند.

نامعلوم بودن انحراف معیار جامعه موجب می‌شود که اگر $n \leq ۳۰$ باشد، توزیع $\bar{X}$ یک توزیع t استیودنت شود. حال آنکه روابط ۴۶ـ۱۰ و ۴۸ـ۱۰ بر فرض نرمال بودن توزیع $\bar{X}$ بنا شده‌اند. پس اگر $\bar{X}$ دارای توزیع t باشد باید n براساس رابطهٔ:

$$n = \left(\frac{t_{\frac{\alpha}{۲}, d.f}\,\sigma_{\circ}}{\varepsilon}\right)^{۲} \qquad (۱۰\text{ـ}۵۰)$$

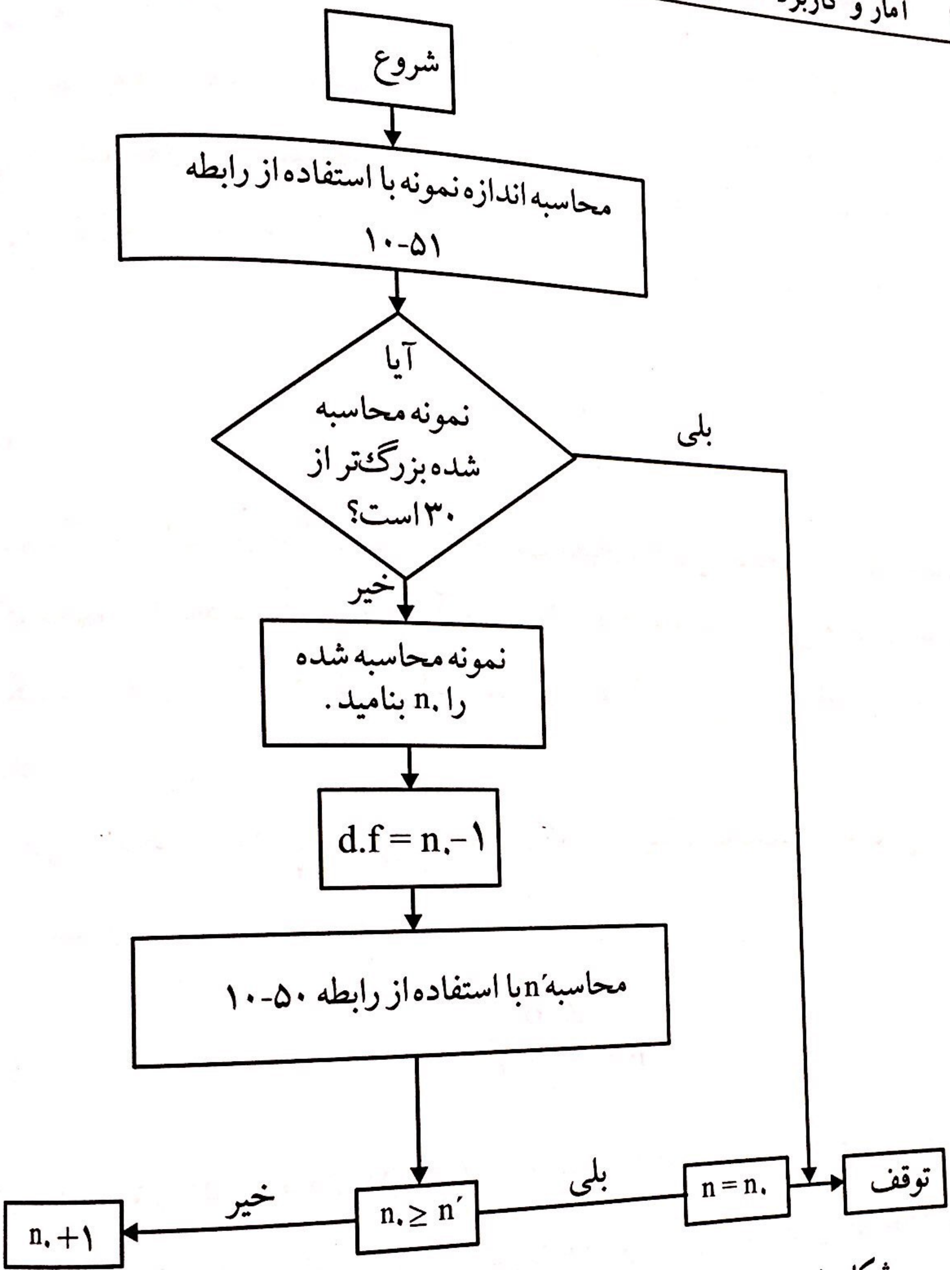
تعیین شود که در آن $\sigma_{\circ}$ برآوردی از انحراف معیار واقعی جامعهٔ آماری است. از آنجا که مجهول n تحت تأثیر درجه آزادی $(d.f = n - ۱)$ است پس فرمول محاسبهٔ n در یک دور قرار می‌گیرد که با استفاده از رابطهٔ توزیع Z و t باید به این دور پایان داد.

نظر به اینکه رابطهٔ $t_{\frac{\alpha}{۲}, d.f} \geq Z_{\frac{\alpha}{۲}}$ برقرار است، یک تخمین مقدماتی برای n عبارت است از:

$$n \geq \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{۲}}\,\sigma_{\circ}}{\varepsilon}\right)^{۲} \qquad (۱۰\text{ـ}۵۱)$$

به ازای مقادیر بزرگ n (مثلاً: $n \geq ۵۰$)، $t_{\frac{\alpha}{۲}, d.f} \approx Z_{\frac{\alpha}{۲}}$ است. در مواردی که n بزرگ است، استفاده از نامساوی ۵۱ـ۱۰ ضرورتی ندارد؛ ولی در نمونه‌های کوچک باید به اندازهٔ مابه‌التفاوت رابطه‌های ۵۰ـ۱۰ و ۵۱ـ۱۰ دوباره نمونه را انتخاب کرد. حال فلوچارت محاسبهٔ تعداد نمونه را با استفاده از توزیع t استیودنت در شکل ۵ـ۱۰ نشان می‌دهیم.

مثال ۹ـ۱۰ بررسیهای مقدماتی حاصل از ۴ مشتری نشان می‌دهد که انحراف معیار زمان اشتغال یک فروشنده در مغازه‌ای ۰/۰۷۲ است. هدف از این تحقیق، تخمین درصد زمان اشتغال فروشنده با دقت ۰/۰۴± و با احتمال ۹۵ درصد است. حجم نمونه مورد نظر را برآورد کنید.



شکل ۵ـ۱۰ فلوچارت محاسبهٔ نمونهٔ کوچک با استفاده از رابطهٔ Z و t

ابتدا با استفاده از رابطهٔ ۵۱ـ۱۰ به محاسبه n می‌پردازیم:

$$n=\left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{.}}{\varepsilon}\right)^{۲}=\left(\frac{۱/۹۶\times ۰/۰۷۲}{۰/۰۴}\right)^{۲}=۱۲/۴۴$$

چون $n<۳۰$ و σ_x جامعه هم نامعلوم است، پس آن را n. نامیده، براساس فلوچارت شکل ۵ـ۱۰ برای تعیین نمونه واقعی اقدام می‌کنیم. حاصل عملیات فلوچارت در جدول ۲ـ۱۰ آمده است:

جدول ۲ـ۱۰ محاسبهٔ نمونهٔ کوچک برای مثال ۹ـ۱۰

$n_\circ$	۱۳	۱۴	۱۵
$t_{\circ/\circ۲۵,d.f}$	۲/۱۸	۲/۱۶	۲/۱۴
$\left(\frac{t_{\circ/\circ۲۵,d.f}\sigma_\circ}{\varepsilon}\right)^۲$	۱۵/۳۹	۱۵/۱۰	۱۴/۸۳

عدد ۱۲/۴۴ را به ۱۳ گرد کرده، آن را به عنوان اولین $n_\circ$ در نظر می‌گیریم. این مقدار به عنوان ملاک محاسبهٔ درجهٔ آزادی قرار گرفته، با استفاده از رابطهٔ ۵۰ـ۱۰ حجم نمونهٔ ۱۵/۳۹ به دست می‌آید. چون هنوز رابطه $n_\circ \geq n'$ برقرار نشده است یکی به ۱۳ اضافه و مجدداً فلوچارت را تکرار می‌کنیم. سرانجام $n_\circ = ۱۵$ بزرگ‌تر از $n' = ۱۴/۸۳$ شده، فلوچارت به مرحلهٔ توقف می‌رسد؛ بنابراین حجم نمونه مساوی ۱۵ می‌شود.

در تمام روابط فوق فرض نرمال بودن جامعهٔ آماری یک فرض اساسی است؛ بنابراین حجم نمونه یا براساس Z و یا t به دست می‌آید. درصورتی‌که نرمال بودن توزیع $\overline{X}$ و یا برخورداری آن از توزیع t استیودنت بر ما معلوم نباشد، می‌توان به کمک قضیهٔ چی‌بی‌شف به راه حلی محافظه‌کارانه دست یافت. داریم:

$$P[|\overline{X}-\mu_x| \leq d] = ۱-\frac{\sigma_{\overline{X}}^۲}{\varepsilon^۲} = ۱-\frac{\sigma_x^۲}{n\varepsilon^۲} \qquad (۱۰\text{ـ}۵۲)$$

$۱-\frac{\sigma_x^۲}{n\varepsilon^۲}$ را با سطح اطمینان $۱-\alpha$ مساوی قرار می‌دهیم و حجم نمونه به این صورت به دست می‌آید:

$$۱-\frac{\sigma_x^۲}{n\varepsilon^۲} = ۱-\alpha \Rightarrow \sigma_x^۲ = \alpha n\varepsilon^۲ \qquad (۱۰\text{ـ}۵۳)$$

$$n = \frac{\sigma_x^۲}{\alpha\varepsilon^۲}$$

۲ـ۶ـ۱۰ تعیین اندازه نمونه برای تخمین نسبت موفقیت

در روش تعیین اندازه نمونه، درصورتی‌که قرار باشد نسبت موفقیت را برآورد کنیم، اصولاً با همان شیوه‌ای که قبلاً به منظور تخمین میانگین جامعه توضیح داده شد دنبال

می‌شود و از رابطهٔ $\overline{p}\pm\varepsilon$ می‌توان بهره‌برداری کرد؛ با این فرض که نمونه‌گیری از جامعه به‌طور تصادفی صورت می‌گیرد و توزیع $\overline{p}$ از توزیع نرمال برخوردار است. از فرمولهای ۱۰ـ۵۴ و ۱۰ـ۵۵ در صورتی استفاده می‌شود که نمونه‌گیری با جای‌گذاری از جامعهٔ محدود صورت گیرد و یا جامعهٔ مورد نظر به حد کافی بزرگ باشد که بتوان استفاده از اصلاح جامعهٔ محدود را غیرلازم شمرد.

$$\varepsilon=Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \qquad (۱۰ـ۵۴)$$

حال رابطه برحسب مجهول n مرتب می‌شود:

$$n=\frac{Z^2_{\frac{\alpha}{2}}\,p(1-p)}{\varepsilon^2} \qquad (۱۰ـ۵۵)$$

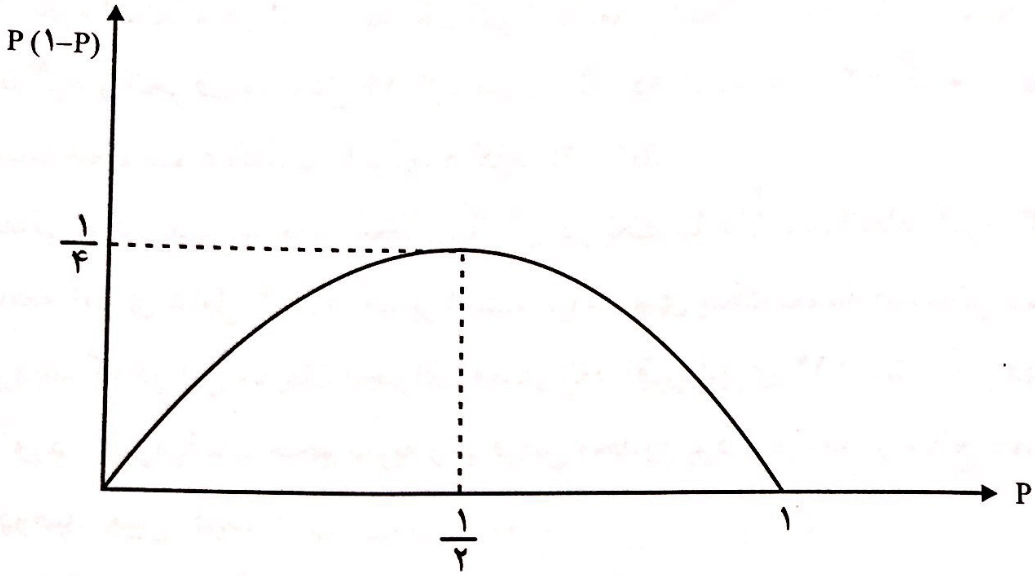
اگر اصلاح جامعهٔ محدود را نتوان نادیده گرفت، در آن صورت فرمول مناسب برای n چنین خواهد شد:

$$n=\frac{NZ^2_{\frac{\alpha}{2}}\,p(1-p)}{\varepsilon^2(N-1)+Z^2_{\frac{\alpha}{2}}\,p(1-p)} \qquad (۱۰ـ۵۶)$$

درصورتی‌که N نسبت به n بزرگ باشد (یعنی $\frac{n}{N}\leq ۰/۰۵$)، اصلاح جامعهٔ محدود را می‌توان نادیده گرفت.

چنان‌که مشاهده می‌شود، آگاهی از p ـ که ویژگی مورد نظر را دارد ـ در هر دو فرمول لازم است. برای رفع این مشکل یکی از راه‌حلهای مسئله این است که نمونه‌ای مقدماتی را انتخاب و برآوردی که به جای p در فرمول n به کار می‌رود، محاسبه کرد. گاهی پژوهشگر تصوری از یکی از حدود بالایی p دارد که می‌توان آن را در فرمول به کار برد. برای مثال ممکن است بزرگ‌ترین مقدار p، ۶۰ درصد باشد. از این رو به جای p در فرمول محاسبهٔ n مقدار ۶۰ درصد قرار می‌گیرد. اگر پژوهشگر نتواند به برآورد بهتری برای p دست یابد، می‌تواند آن را مساوی ۵۰ درصد گرفته و n را محاسبه کند. چون اگر $p=\frac{1}{2}$ در فرمول بالا گذاشته شود، n

حداکثر مقدار ممکن خود را پیدا خواهد کرد. این خاصیت در شکل ۶ـ۱۰ به‌خوبی دیده می‌شود.



شکل ۶ـ۱۰ مقادیر $p(1-p)$ در تعیین اندازه نمونه

استفاده از این شیوه سبب می‌شود که نمونه به حد کافی بزرگ باشد. در عین حال این نمونه ممکن است بزرگ‌تر از حد نیاز باشد و گران‌تر از زمانی تمام شود که برآورد بهتری از p در دسترس قرار دارد. این شیوه را تنها زمانی به کار می‌برند که پژوهشگر قادر نیست به برآورد بهتری از p دسترسی پیدا کرد.

مثال ۱۰ـ۱۰ مطالعه‌ای برای تعیین نسبت مدیران وظیفه‌مدار در سطح سازمانهای دولتی کشور برنامه‌ریزی شده است. این تصور وجود دارد که نسبت مزبور بزرگ‌تر از ۰/۴۵ نیست. حدود اطمینان ۹۵ درصد با $\varepsilon=\pm 0/08$ مورد نظر است. چند مدیر برای این مطالعه باید انتخاب شوند؟

با فرض نامحدود بودن جامعه از رابطهٔ ۵۵ـ۱۰ برای تعیین اندازه نمونه استفاده می‌شود:

$$n=\frac{(1/96)^2(0/45)(0/55)}{(0/08)^2}=148/6$$

بنابراین اندازه نمونه مورد نیاز، ۱۴۹ مدیر است.

تمرین

۱. مدیر کنترل کیفی کارخانه‌ای درصدد برآورد میانگین وزن محصولات تولید شده کارخانه است. او در این زمینه یک نمونهٔ مقدماتی انتخاب کرده که میانگین آن ۵۰ گرم و انحراف معیارش ۱۲ گرم است. اگر دقت برآورد ۲± گرم در نظر باشد، حجم نمونه مناسب را برآورد کنید ($\alpha = \%1$).

۲. تحقیقی برای تعیین شاخص انعطاف‌پذیری در یک سازمان باید انجام گیرد. کل جامعهٔ آماری شامل ۲ هزار مدیر است. بررسیهای یک نمونه مقدماتی نشان می‌دهد که در این سازمان انحراف معیار انعطاف‌پذیری ۱۲ است. اگر دقت برآورد ۱ نمره باشد، حجم نمونه را با فرض محدود بودن جامعه در سطح خطای ۵ درصد تعیین کنید.

۳. برای برآورد نسبت آن عده از صاحبان اتومبیل که ماشین خود را به مبلغی بیش از یک مقدار معین بیمه کرده‌اند، نمونه‌ای تصادفی مرکب از ۴۰۰ صاحب اتومبیل برگزیده شده است. اگر حق بیمهٔ اتومبیل ۵۶ نفر از آنها بیش از این مقدار معین باشد:

الف) یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای نسبتی که برآورد می‌شود، محاسبه کنید.

ب) چه حجمی برای نمونه باید اختیار شود تا حد بالای فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصد برابر با ۰/۱۸ باشد؟

۴. مدیر شرکت الف در نظر دارد شرکت ب را که سماور برقی تولید می‌کند خریداری کند. شرکت ب ادعا می‌کند که ۳۰ درصد کل بازار سماور برقی را در اختیار دارد. مدیر شرکت بزرگ الف می‌خواهد به وسیلهٔ نمونه‌گیری صحت این ادعا را بررسی کند. اگر مدیر شرکت الف بخواهد سهم شرکت ب را تا ۰/۰۲۵± اختلاف با ۹۸ درصد اطمینان برآورد کند، حجم نمونه انتخابی چقدر باید باشد؟

۷ـ۱۰ تخمین فاصله‌ای واریانس جامعه (σ_x^2)

در بسیاری از تحقیقات، واریانس جامعه مورد سؤال قرار می‌گیرد. می‌دانیم که S_x^2 واریانس نمونه و برآورد نقطه‌ای واریانس جامعه است. حال که برآورد نقطه‌ای σ_x^2 در دسترس قرار دارد، منطقی است که حدود اطمینان را برای واریانس جامعه تعیین کنیم. موفقیت در تعیین حدود اطمینان برای واریانس جامعه به میزان توانایی ما در دسترسی به یک توزیع نمونه‌گیری مناسب بستگی خواهد داشت.

معمولاً حدود اطمینان برای σ_x^2 بر مبنای توزیع نمونه‌گیری $\frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_x^2}$ قرار دارد، اگر نمونه‌ای n تایی از جامعهٔ برخوردار از توزیع نرمال انتخاب شود، مقدار مزبور از توزیعی موسوم به «توزیع کای - مربع»[1] با $n-1$ درجهٔ آزادی برخوردار است.[2] در فصل پانزدهم دربارهٔ این توزیع به‌طور مفصل بحث خواهد شد. در اینجا فقط این نکته را بازگو می‌کنیم که $\frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_x^2}$ از توزیع کای - مربع پیروی می‌کند و وقتی که فرض برخورداری جامعه از توزیع نرمال حاصل آید، تعیین حدود اطمینان برای σ_x^2 مفید خواهد بود.

در شکل ۷ـ۱۰ تعدادی توزیع کای - مربع برای چندین مقدار درجهٔ آزادی نشان داده شده؛ همچنین درصدهای توزیع کای - مربع که با حرف یونانی χ^2 نشان داده می‌شود در جدول ۴ پیوست ارائه شده است. عناوین سطری نشان‌دهنده درجهٔ آزادی و عناوین ستونی نشان‌دهنده درصد خطا (α) است. مقادیر کای - مربع با توجه به درجهٔ آزادی و دنبالهٔ سمت راست توزیع به دست خواهند آمد.

- بیان شد که

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_x^2} \qquad (۱۰ـ۵۷)$$

پس باید:

---

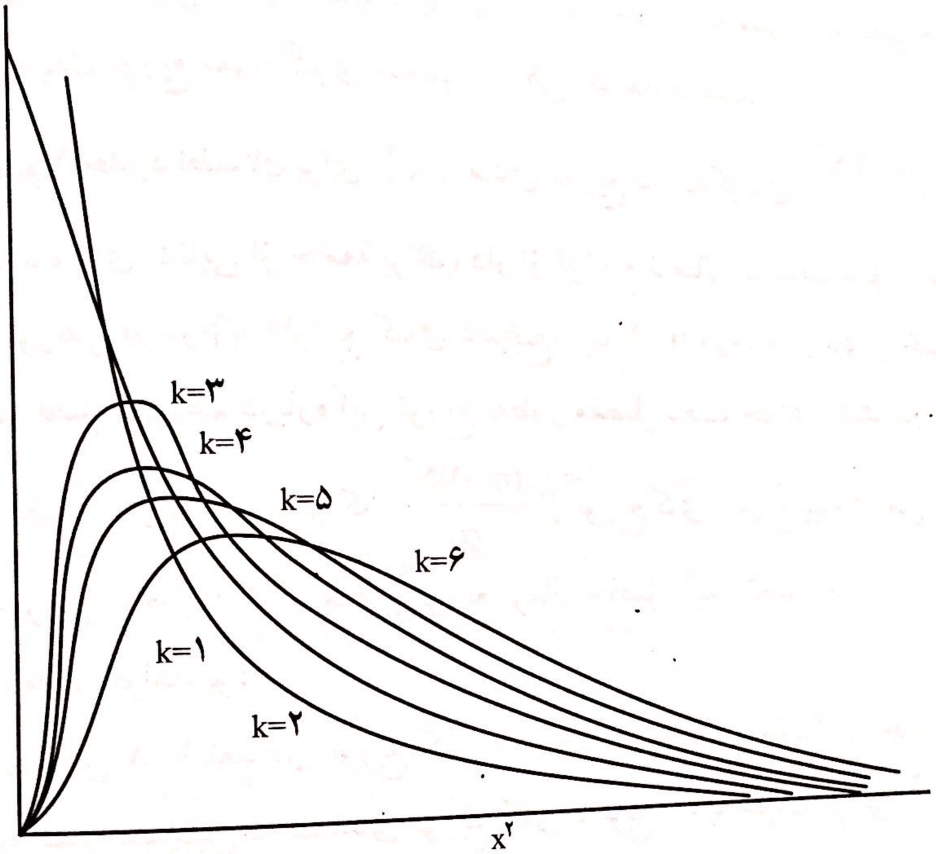
1. chi-square distribution

۲. به توزیع کای - مربع در بعضی متون توزیع کای - دو، کای اسکویر، خی‌دو نیز گفته می‌شود.

$$P[\chi^{۲}_{۱-\frac{\alpha}{۲},d.f} \leq \chi^{۲} \leq \chi^{۲}_{\frac{\alpha}{۲},d.f}]=۱-\alpha \qquad (۱۰\text{ـ}۵۸)$$

حال مقدار $\chi^{۲}$ را در رابطهٔ ۱۰ـ۵۸ تعریف کرده، آن را به این صورت می‌نویسیم:

$$P\ [\chi^{۲}_{۱-\frac{\alpha}{۲},d.f} \leq \frac{(n-۱)S^{۲}_{x}}{\sigma^{۲}_{x}} \leq \chi^{۲}_{\frac{\alpha}{۲},d.f}]=۱-\alpha \qquad (۱۰\text{ـ}۵۹)$$



شکل ۷ـ۱۰ توزیعهای کای ـ مربع برای مقادیر مختلف درجه‌های آزادی

رابطهٔ ۵۹ـ۱۰ باید به گونه‌ای مرتب شود که تنها نشان‌دهندهٔ سطح اطمینان $\sigma^{۲}_{x}$ باشد. اگر رابطه مذکور را بر $(n-۱)S^{۲}_{x}$ تقسیم و آن را معکوس کنیم رابطهٔ ۶۰ـ۱۰ حاصل می‌شود:

$$P[\frac{(n-۱)S^{۲}_{x}}{x^{۲}_{\frac{\alpha}{۲},d.f}} \leq \sigma^{۲}_{x} \leq \frac{(n-۱)S^{۲}_{x}}{x^{۲}_{۱-\frac{\alpha}{۲},d.f}}]=۱-\alpha \qquad (۱۰\text{ـ}۶۰)$$

رابطهٔ ۶۰ـ۱۰ حدود اطمینان $۱۰۰(۱-\alpha)$ درصد برای $\sigma^{۲}_{x}$ خواهد بود. اگر از هریک از جملات نامساوی فوق جذر بگیریم، حدود اطمینان برای σ_{x} نیز به دست خواهد آمد.

مثال ۱۱ـ۱۰ یکی از کارگزاران بازار بورس تهران درصدد تعیین ریسک شرکتهایی است که سهام خود را عرضه می‌کنند. در این زمینه یک نمونهٔ تصادفی ۱۵ تایی از بین شرکتها انتخاب کرده که میانگین و واریانس سود سالانه آنها به ترتیب ۲۵ هزار و ۱۲۲۵ است. توزیع سود سالانه شرکتها از تقریب نرمال برخوردار است. در سطح خطای ۵ درصد، حدود اطمینان ریسک شرکتها را به دست آورید.

ملاک ریسک، پراکندگی سود است. پس باید حدود اطمینان σ_x را برای کل شرکتهای عرضه‌کننده سهام پیدا کرد. چون توزیع آمارهٔ $S_x^۲$ مشخص است ابتدا $\sigma_x^۲$ را برآورد کرده، سپس از آن جذر می‌گیریم تا نتیجهٔ مطلوب حاصل شود.

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{۲} = ۰/۰۲۵ \\ d.f = n - ۱ = ۱۵ - ۱ = ۱۴ \end{cases} \Rightarrow \chi^۲_{۰/۰۲۵,۱۴} = ۲۶/۱۱۹$$

و:

$$\chi^۲_{۰/۹۷۵,۱۴} = ۵/۶۲۹$$

حال براساس رابطهٔ ۶۰ـ۱۰ برآورد فاصله‌ای $\sigma_x^۲$ عبارت است از:

$$(۶۵۶/۶۱ \leq \sigma_x^۲ \leq ۳۰۴۶/۷۲)$$

و:

$$(۲۵/۶۲ \leq \sigma_x \leq ۵۵/۲۰)$$

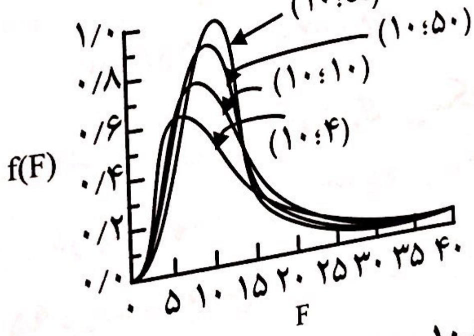
تحلیل: با ۹۵ درصد اطمینان می‌توان گفت که ریسک سودآوری شرکتهای عرضه‌کننده سهام در بازار بورس تهران بین ۲۵/۶۲ تا ۵۵/۲۰ قرار دارد؛ زیرا در نمونه‌گیریهای مکرر ۹۵ درصد، فاصله‌های برآورد شده پارامتر مربوط را دربرخواهند داشت.

۱۰ـ۸ تخمین فاصله‌ای نسبت واریانس دو جامعه آماری $(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2})$

در مقایسهٔ دو جامعهٔ آماری تنها به میانگینها و نسبتها اکتفا نمی‌شود. مقایسهٔ دو واریانس بارها مدنظر بوده و یکی از راههای انجام دادن چنین مقایسه‌ای تشکیل نسبت آنها یعنی $(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2})$ است. اگر دو واریانس با هم مساوی باشند، نسبت آنها مساوی یک خواهد بود.

واریانسهای دو جامعه معمولاً معلوم نیستند، در نتیجه هر گونه مقایسه‌ای برمبنای واریانسهای نمونه قرار می گیرد؛ بنابراین برای مقایسهٔ دو واریانس جامعه، چاره‌ای نیست جز آنکه از آماره‌ها و توزیع نمونه گیری آنها استفاده شود. این بار از توزیع $(\frac{S_1^2}{\sigma_1^2})/(\frac{S_2^2}{\sigma_2^2})$ تحت شرایط و فرضیاتی استفاده می‌شود. این فرضیات به ترتیب عبارت‌اند از S_1^2 و S_2^2 و از نمونه‌های مستقل از هم با اندازه‌های n_1 و n_2 که از دو جامعه برخوردار از توزیع نرمال محاسبه می‌شوند. اگر فرضیات مذکور تأمین شوند آمارهٔ $(\frac{S_1^2}{\sigma_1^2})/(\frac{S_2^2}{\sigma_2^2})$ از توزیعی موسوم به توزیع F برخوردار خواهد بود. توزیع F به دو درجهٔ آزادی بستگی دارد: یکی به مقدار n_1-1 که در محاسبهٔ S_1^2 و دیگری به مقدار n_2-1 که در محاسبهٔ S_2^2 به کار می‌رود. معمولاً این دو را به ترتیب درجهٔ آزادی صورت و درجهٔ آزادی مخرج گویند.

شکل ۱۰ـ۸ توزیع F را برای چندین درجهٔ آزادی صورت و مخرج نشان می‌دهد. جدول ۵ پیوست برای مقادیر معین درجه‌های آزادی و α مقادیر F که در دنباله راست آن $\frac{\alpha}{2}$ سطح زیر منحنی F قرار دارد، ارائه شده است.



شکل ۱۰ـ۸ توزیع F برای درجه‌های آزادی مختلف

تعیین حدود اطمینان برای $(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2})$ را با متغیر استاندارد F شروع خواهیم کرد که چنین تعریف می‌شود:

$$F=\frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}}=\frac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2} \qquad (۱۰\text{-}۶۱)$$

حال حدود اطمینان را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$P[F_{(1-\frac{\alpha}{2}),d.f_1,d.f_2} \le F \le F_{\frac{\alpha}{2},d.f_1,d.f_2}]=1-\alpha \qquad (۱۰\text{-}۶۲)$$

که در آن $d.f_1=n_1-1$ و $d.f_2=n_2-1$ بوده، ترتیب نوشتن آنها از چپ به راست نشان‌دهنده درجه‌های آزادی صورت و مخرج است. حال فرمول ۶۱ـ۱۰ را در رابطهٔ ۶۲ـ۱۰ جای‌گذاری می‌کنیم. بدین ترتیب رابطهٔ ۶۳ـ۱۰ به دست می‌آید که مبنای تخمین فاصله‌ای نسبت دو واریانس خواهد بود:

$$P[F_{(1-\frac{\alpha}{2}),d.f_1,d.f_2} \le \frac{S_1^2\sigma_2^2}{S_2^2\sigma_1^2} \le F_{\frac{\alpha}{2},d.f_1,d.f_2}]=1-\alpha \qquad (۱۰\text{-}۶۳)$$

رابطهٔ فوق را باید به گونه‌ای مرتب کرد که تخمین نشان‌دهنده $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ باشد. حال عملیات ریاضی در رابطهٔ ۶۴ـ۱۰ را ببینید:

$$P[\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{\frac{\alpha}{2},d.f_1,d.f_2}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{(1-\frac{\alpha}{2}),d.f_1,d.f_2}}]=1-\alpha \qquad (۱۰\text{-}۶۴)$$

برای پیدا کردن $F_{\frac{\alpha}{2},d.f_1,d.f_2}$ می‌توان از جدول ۵ پیوست استفاده کرد؛ ولی برای پیدا کردن $F_{(1-\frac{\alpha}{2}),d.f_1,d.f_2}$ باید قاعدهٔ ذیل را به کار گرفت:

«ابتدا جای درجه‌های آزادی صورت و مخرج را با هم عوض کرده و مقدار متناسب F را با توجه به $\frac{\alpha}{2}$ در جدول مذکور پیدا کنید؛ مقدار حاصل $F_{\frac{\alpha}{2},d.f_1,d.f_2}$

خواهد بود». بنابراین می‌توانید برای به دست آوردن $F_{(1-\frac{\alpha}{2}),d.f_1,d.f_2}$ از رابطه ۶۵ـ۱۰ استفاده کنید:

$$F_{(1-\frac{\alpha}{2}),d.f_1,d.f_2}=\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2},d.f_1,d.f_2}} \qquad (۱۰\text{ـ}۶۵)$$

پس رابطهٔ ۶۴ـ۱۰ باید به این صورت تغییر کند:

$$P\left[\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{\frac{\alpha}{2},d.f_1,d.f_2}}\leq\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\leq\frac{S_1^2}{S_2^2}.F_{\frac{\alpha}{2},d.f_2,d.f_1}\right]=1-\alpha \qquad (۱۰\text{ـ}۶۶)$$

رابطهٔ ۶۶ـ۱۰ ملاک تخمین فاصله‌ای نسبت واریانس دو جامعه است.

مثال ۱۲ـ۱۰ هدف از این تحقیق مقایسهٔ پراکندگی نمره‌های دانشجویان در دو دانشکده الف و ب است. در این تحقیق از دانشکدهٔ الف یک نمونهٔ تصادفی ۱۶ تایی انتخاب شده که میانگین آن ۱۴ و واریانس آن ۱۶ است. درحالی که میانگین و واریانس یک نمونهٔ تصادفی ۱۰ تایی از دانشجویان دانشکدهٔ ب به ترتیب ۱۵ و ۱۲ بوده است. در سطح اطمینان ۹۰ درصد، پراکندگی نمره‌ها را در دو دانشکده مقایسه کنید.

بنابراین:

$$\begin{cases} d.f_1=n_1-1=16-1=15 \\ d.f_2=n_2-1=10-1=9 \\ \frac{\alpha}{2}=\frac{0/10}{2}=0/05 \end{cases}$$

$$F_{0/05,15,9}=3/01$$

$$F_{0/05,9,15}=2/59$$

$$\left(0/443\leq\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\leq3/453\right)$$

تحلیل: به‌طور کلی تحلیل فاصلهٔ اطمینان نسبت واریانس در یکی از این موارد

امکان‌پذیر است:

الف) اگر هر دو دامنه، UCL و LCL، بزرگ‌تر از یک باشد در سطح اطمینان مورد نظر می‌توان گفت σ_1^2 بزرگ‌تر از σ_2^2 است.

ب) اگر UCL و LCL هر دو کوچک‌تر از یک باشد در سطح اطمینان مورد نظر می‌توان گفت σ_1^2 کوچک‌تر از σ_2^2 است.

ج) در حالتی غیر از موارد الف و ب، یعنی در حالتی که فاصلهٔ به دست آمده دربرگیرندهٔ یک است نمی‌توان ادعا کرد که تفاوت معناداری بین واریانس دو جامعه وجود دارد.

بنابراین چون فاصلهٔ به دست آمده در مثال ۱۲ـ۱۰ دربرگیرندهٔ یک است، نمی‌توان گفت در سطح اطمینان ۹۰ درصد، اختلاف معناداری بین پراکندگی نمره‌های دانشجویان دو دانشکده وجود دارد.

تمرین

۱. نرخ بازده‌های سه ماههٔ یک سرمایه‌گذاری سهام عادی (سود سهام به‌علاوهٔ تغییر ارزش به عنوان درصدی از ارزش در شروع سرمایه‌گذاری) برای یک دورهٔ دوساله را به این ترتیب در نظر بگیرید:

سه ماهه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
نرخ بازده	۴/۸	۲/۸	۹/۹	۷/۶	۹/۵	۶	۸/۴	۵ -

فرض کنید که این هشت مشاهده را می‌توان به عنوان یک نمونهٔ تصادفی از جامعهٔ نامتناهی تمام نرخهای سه ماههٔ مربوط به بازده سهام در نظر گرفت؛ فرض کنید این جامعه تقریباً توزیع نرمال دارد، واریانس نرخ بازدهی سهام عادی سرمایه‌گذاری را در سطح اطمینان ۹۹ درصد برآورد کنید.

۲. معاون اداری و مالی یک دانشکده درصدد مقایسهٔ پراکندگی نمره‌های طرح تلاش و بهره‌وری کارکنان دو قسمت پژوهشی و آموزشی است. بدین جهت نمونه‌ای ۵ تایی از واحد پژوهشی و ۶ تایی از واحد آموزشی را انتخاب کرده که

نتایج آن به قرار زیر است:

نمره‌های کارکنان معاونت پژوهشی	۴	۳/۹	۲/۷	۳/۱	۳/۵	
نمره‌های کارکنان معاونت آموزشی	۲	۳/۱	۲/۵	۴	۳/۹	۳/۱

توزیع نمره‌های کارمندانِ تحت نظارت هر دو معاون دانشکده نرمال است. پراکندگی نمره‌ها را در سطح اطمینان ۹۰ درصد مقایسه کنید.

۳. اگر برای نمونه‌ای به حجم $n = 20$ از بسته‌های پودر لباسشویی کارخانه‌ای $\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 200$ باشد، در سطح اطمینان ۹۵ درصد، فاصله اطمینان برای واریانس و انحراف معیار بسته‌های پودر لباسشویی پر شده را در کارخانه تشکیل دهید.

۹ـ۱۰ خلاصه

در این فصل، فنون تخمین پارامترهای یک جامعه آماری (به‌خصوص تخمین فاصله‌ای) به تفصیل بحث و بررسی شد. تخمین فاصله‌ای μ_x و $\mu_1 - \mu_2$ در شرایط مختلف از مهم‌ترین مباحث فصل بودند. علاوه بر تخمین فاصله‌ای نسبت موفقیت جامعه (p) و تخمین تفاضل نسبت دو جامعه $(p_1 - p_2)$ براساس آماره $\bar{p}_1 - \bar{p}_2$ نیز برای مقایسهٔ دو جامعهٔ آماری استفاده شد.

قسمت دیگر فصل شامل فنون تعیین اندازه نمونه بود. گفتیم چنانچه داده‌ها از مقیاس کمّی برخوردار باشند از مفاهیم تخمین فاصله‌ای μ_x برای تعیین اندازه نمونه و همچنین اگر داده‌ها کیفی باشند از مفاهیم تخمین فاصله‌ای p استفاده می‌شود.

تخمین فاصله‌ای واریانس جامعه و مقایسهٔ دو جامعهٔ آماری با استفاده از تخمین فاصله‌ای نسبت دو واریانس از دیگر مباحثی بود که از آن صحبت شد.

معرفی توزیعهای جدید t استیودنت، کای ـ مربع (χ^2) و فیشر (F) از نکات قابل توجه است. توزیع t استیودنت یک توزیع قرینه است که برحسب α و d.f تعریف می‌شود؛ این توزیع کوتاه‌تر از توزیع نرمال است. توزیع کای ـ مربع یک

توزیع نامتقارن است که برای تخمین فاصله‌ای واریانس جامعه به کار می‌رود. توزیع F نیز یک توزیع نامتقارن است که چولگی به راست دارد. این توزیع برحسب α، درجهٔ آزادی صورت $(d.f_1)$ و درجهٔ آزادی مخرج $(d.f_2)$ تعریف و برای تخمین فاصله‌ای نسبت واریانس دو جامعهٔ آماری از آن استفاده می‌شود.

۱۰ـ۱۰ سؤالات و مسائل

سؤالات دو گزینه‌ای

۱. استفاده از رابطهٔ $\sigma_{\bar{x}} \approx \frac{\text{دامنه تغییرات}}{4}$ در جامعه‌ای که از توزیع نرمال برخوردار است، امکان‌پذیر است. ص□ غ□

۲. اگر $p=\frac{1}{2}$ باشد، حاصل‌ضرب $p(1-p)$ حداقل است. ص□ غ□

۳. از توزیع t فقط درصورتی که حجم نمونه کمتر از ۳۰ باشد استفاده می‌شود. ص□ غ□

۴. در تخمین نسبت موفقیت جامعه، p می‌توان هم از $\sigma_{\bar{p}}$ و هم از $S_{\bar{p}}$ استفاده کرد. ص□ غ□

۵. آمارهٔ S_x^2 از توزیع کای - مربع (χ^2) برخوردار است. ص□ غ□

۶. برای تخمین $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ به کمک رابطه‌های این فصل، شرط نرمال بودن هر دو جامعهٔ آماری ضروری است. ص□ غ□

۷. درصورتی که UCL و LCL هر دو منفی باشد، p_1 و p_2 با هم اختلاف معناداری ندارند. ص□ غ□

۸. درصورتی که UCL و LCL هر دو مثبت باشد، μ_1 بزرگ‌تر از μ_2 است. ص□ غ□

۹. رابطهٔ $S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$ یک نوع میانگین وزنی از واریانس نمونه‌هاست. ص□ غ□

۱۰. توزیع t استیودنت همواره کشیده‌تر از توزیع نرمال است. ص□ غ□

۱۷. اگر $\bar{X}$ دارای توزیع نرمال باشد، چند درصد $\bar{X}$ ها در فاصلهٔ $\bar{X}\pm 2\sigma_{\bar{x}}$ قرار می‌گیرند؟

الف) ۶۸/۳ درصد　　ب) ۹۹/۷۳ درصد

ج) ۹۵/۴۵ درصد　　د) ۹۰ درصد

۱۸. اگر $n=10$، $S_x^2=80$ و $\sigma_x^2=65$ باشد، مقدار متغیر استاندارد کای - مربع کدام است؟

الف) ۱۱/۰۸　　ب) ۱۵/۳۲

ج) ۱/۲۳　　د) ۸/۱۲۵

۱۹. حد بالا و پایین تخمین فاصله‌ای $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ در سطح اطمینان ۹۹ درصد کوچک‌تر از ۱ است. کدام گزینه صحیح است؟

الف) σ_1^2 بزرگ‌تر از σ_2^2 است.

ب) σ_1^2 کوچک‌تر از σ_2^2 است.

ج) σ_2^2 کوچک‌تر از σ_1^2 است.

د) σ_1^2 و σ_2^2 با هم اختلاف معناداری ندارند.

۲۰. از قاعدهٔ چی‌بی‌شف در کدام یک از موارد زیر برای تخمین μ_x استفاده می‌شود.

الف) توزیع $\bar{X}$ نرمال باشد.　　ب) توزیع $\bar{X}$، t باشد.

ج) توزیع جامعهٔ آماری نرمال باشد.　　د) توزیع $\bar{X}$، غیرنرمال یا نامشخص باشد.

مسائل

۲۱. مدت زمان ماندن مشتریان در یک فروشگاه بزرگ از توزیع نرمال برخوردار است. از مشتریان فروشگاه ۱۰ نفر به‌طور تصادفی انتخاب و مدت زمان ماندن آنها به این ترتیب یادداشت شده است:

۲۰، ۲۷، ۲۸، ۳۵، ۳۰، ۲۷، ۲۴، ۲۲، ۲۵، ۲۰: مدت زمان ماندن برحسب دقیقه

سطح اطمینان ۹۵ درصد را در نظر گرفته و این تخمینها را محاسبه کنید:

الف) میانگین زمان ماندن کل مشتریان

ب) پراکندگی زمان ماندن کل مشتریان

اگر این نمونه یک نمونهٔ مقدماتی و دقت برآورد ۳± دقیقه باشد، حجم نمونهٔ مناسب را برآورد کنید.

۲۲. فرض کنید مدت زمان ماندن برای یک نمونهٔ تصادفی ۸ تایی از یک فروشگاه مشابه فروشگاه مسئله ۲۱ به این شرح به دست آمده است:

۱۳، ۱۴، ۱۲، ۱۰، ۲۲، ۲۰، ۱۷، ۱۵ : مدت زمان ماندن برحسب دقیقه

با توجه به اینکه فرض نرمال بودن توزیع زمان ماندن مشتریان این فروشگاه قابل قبول است:

الف) در سطح اطمینان ۹۰ درصد پراکندگی زمان تأخیر مشتریان این فروشگاه را با فروشگاه مسئله ۲۱ مقایسه کنید.

ب) در سطح اطمینان ۹۰ درصد میانگین زمان تأخیر مشتریان این فروشگاه را با فروشگاه مسئله ۲۱ مقایسه کنید.

۲۳. پنج مدیر و چهار مأمور بازاریابی، سهم بازار را در صنعت برای شرکت خود به این ترتیب تعیین کرده‌اند:

مدیران	۲۲/۵	۲۵	۳۰	۲۷/۵	۲۰
بازاریابان	۲۱	۱۷/۵	۱۷	۲۰	

بررسیها نشان می‌دهد که فرض نرمال بودن برای نمره‌های ارزیابی قابل قبول است. در سطح خطای یک درصد ارزیابی مدیران را با بازاریابان مقایسه کنید.

۲۴. در بررسی دقیق نقاط قوت و ضعف عوامل محیطی در یک صنعت، امتیازات زیر به وسیلهٔ ۵ کارشناس برای فناوری به دست آمده است:

x_i : ۵۵، ۶۰، ۶۷، ۵۸، ۵۰

اگر این ۵ نفر نشان‌دهندهٔ یک نمونهٔ تصادفی از کل محققان باشند، میانگین و واریانس نمره‌های فناوری را در سطح خطای یک درصد برآورد کنید.

۲۵. هدف یک تحقیق مقایسهٔ کیفیت دو نوع کالا با یکدیگر است. ملاک کیفیت نرخ اثربخشی هر یک از کالاهاست. نرخ اثربخشی نمونه‌هایی از کالای نوع الف و ب در این جدول نشان داده شده است:

نوع الف	۷۲	۷۸	۷۳	۶۹	۷۵	۷۴	۷۵
نوع ب	۷۸	۷۶	۸۱	۷۴	۸۲		

توزیع نرخ اثربخشی برای هر دو کالا نرمال است. در سطح اطمینان ۹۰ درصد موارد ذیل را حساب کنید:

الف) آیا می‌توان گفت پراکندگی کیفیت دو کالا مساوی است؟ چرا؟

ب) میانگین کیفیت دو کالا را با یکدیگر مقایسه کنید.

ج) فرض کنید نمونه حاصل از نوع ب یک نمونهٔ مقدماتی است؛ دوباره اندازه نمونه مناسب را محاسبه کنید و دقت برآورد را ۱ در نظر بگیرید.

د) فاصله اطمینان را برای میانگین کیفیت کالای نوع الف برآورد کنید.

۲۶. هدف یک تحقیق برآورد میانگین تجربه دبیران دبیرستانی یک شهر بزرگ است. بدین منظور یک نمونهٔ تصادفی ۱۰ نفره از بین دبیران دبیرستانهای شهر انتخاب شده که میانگین تجربه آنها ۶ سال و پراکندگی تجربه‌شان ۲/۵ سال است. در سطح اطمینان ۹۹ درصد به این سؤالات پاسخ دهید:

الف) با فرض نرمال بودن توزیع تجربه دبیران، میانگین تجربه آنان را برآورد کنید.

ب) فرض کنید توزیع تجربه در میان دبیران غیرنرمال است. با فرض اینکه نمونه انتخاب شده یک نمونهٔ مقدماتی است و دقت برآورد یک سال است، حجم نمونهٔ لازم را تعیین کنید.

ج) فرض کنید نمونه انتخاب شده یک نمونهٔ مقدماتی است و فرض نرمال بودن تجربه پذیرفتنی است. اگر دقت برآورد یک سال باشد، حجم نمونه را تعیین کنید.

د) ذکر کنید علت اختلاف حجم نمونه در بند ب و ج چیست؟

۲۷. مطالعهٔ وسیعی در زمینهٔ مخارج زندگی خانواده‌ها در شهریور ماه گذشته نشان داد که میانگین مخارج هفتگی خواربار برای خانواده‌هایی که یک یا دو فرزند دارند ۷۰۰ تومان و انحراف معیار آن ۱۵۰ تومان است. برای تحقیق در وضعیت جاری مخارج، قرار است نمونه‌ای تصادفی از خانواده‌هایی که یک یا دو فرزند دارند انتخاب و مخارج خواربار آخرین هفته آنها را یادداشت کنند. اگر بخواهیم ۹۵ درصد مطمئن باشیم که دقت برآورد میانگین جامعهٔ مخارج خواربار هفتگی برای این گونه خانواده‌ها بیشتر از ۲۰ تومان نیست، چه حجمی برای نمونه باید در نظر بگیریم؟

۲۸. مطالعه‌ای به منظور تعیین نوع تصمیم‌گیری مشارکتی مدیران در دست برنامه‌ریزی است. تحقیقات مشابه نشان می‌دهد که این نسبت بزرگ‌تر از ۰/۶۰ نیست. دقت برآورد را ۰/۰۴ در نظر بگیرید و حجم نمونه را در سطح خطای یک درصد تعیین کنید.

۲۹. مطالعه‌ای در منطقه معینی به منظور تعیین نسبت خانواده‌هایی که از نظر بهداشتی در وضع نامناسبی هستند برنامه‌ریزی می‌شود. این تصور وجود دارد که نسبت مزبور بزرگ‌تر از ۰/۳۵ نمی‌تواند باشد. حدود اطمینان ۰/۹۵ و $\varepsilon = ۰/۰۵$ مورد نظر است. چند خانواده برای این مطالعه باید انتخاب شوند؟

۳۰. تحلیل گری می‌خواهد سهم کفش گام را در بازار فروش کفشها تعیین کند؛ یعنی نسبت فروش کفش گام را به فروش کلیهٔ کفشها به دست آورد. از روی داده‌هایی که از فروشگاههای مختلف به دست آمده است، تحلیل گر درمی‌یابد که از کل ۱۰ هزار جفت کفش فروخته شده، ۱۲۰۰ جفت از نوع کفش گام بوده‌اند.

الف) سهم کفش گام را در بازار به صورت نقطه‌ای برآورد کنید.

ب) سطح اطمینان ۹۸ درصد را برای سهم کفش گام در بازار محاسبه کنید.

۳۱. مدیر فروش شرکتی می‌خواهد بداند که آیا بوی اسانس لیمو و توت‌فرنگی در یک مایع ظرفشویی برای مصرف کنندگان یکسان است یا خیر. با ۲۵۰

مصرف کننده مصاحبه شده است؛ ۱۴۵ نفر بوی لیمو و ۱۰۵ نفر بوی توت‌فرنگی را ترجیح داده‌اند. یک فاصلهٔ اطمینان ۹۹ درصد برای نسبتی از مصرف کنندگان که بوی توت‌فرنگی را ترجیح می‌دهند، بسازید.

۳۲. از سازمان الف یک نمونهٔ ۲۰۰ تایی انتخاب شده است که ۱۲۰ نفر از آنها از کار خود راضی‌اند؛ درحالی که از یک نمونهٔ تصادفی ۳۰۰ تایی از سازمان ب فقط ۱۵۰ نفر از کار خود راضی هستند. در سطح خطای ۵ درصد نسبت افراد راضی را در دو سازمان با یکدیگر مقایسه کنید.

۳۳. دانشجویی در پایان‌نامهٔ خود درصدد مقایسهٔ میزان مهارتهای انسانی مدیران در دو سطح عملیاتی و میانی است. بدین منظور از بین مدیران سطح میانی یک نمونهٔ ۱۰تایی انتخاب کرده که میانگین مهارت انسانی آنها ۴۵ و انحراف معیار آن ۱۵ است. میانگین و انحراف معیار یک نمونهٔ ۱۵ نفره از مدیران سطح عملیاتی به ترتیب ۵۲ و ۱۴ است. توزیع مهارت انسانی در هر دو سطح نرمال است. در سطح خطای ۲ درصد میانگین مهارت انسانی را در دو سطح میانی و عملیاتی مقایسه کنید.

۳۴. جدول زیر نشان‌دهندهٔ روند نرخ بهره‌وری نیروی کار تولیدی امریکا، انگلستان و کانادا از سال ۱۹۷۵ تا ۱۹۸۶ است.

سال	امریکا	کانادا	انگلستان	سال	امریکا	کانادا	انگلستان
۱۹۷۵	۲/۵	۲/۹	۲/۵	۱۹۸۱	۲/۲	۱/۴	۲/۴
۱۹۷۶	۴/۶	۴/۵	۲/۹	۱۹۸۲	۲/۲	۲/۹	۵/۳
۱۹۷۷	۳	۳/۲	۱/۹	۱۹۸۳	۵/۸	۲/۹	۶/۱
۱۹۷۸	۱/۵	۱/۲	۰/۵۰	۱۹۸۴	۵/۵	۲/۳	۴/۴
۱۹۷۹	-۰/۱۰	-۰/۳۰	-۰/۲۰	۱۹۸۵	۵/۱	۲/۵	۳/۸
۱۹۸۰	۰	۰/۴۰	۱/۳	۱۹۸۶	۳/۷	-۰/۲۰	۳/۶

اگر این ۱۲ سال نمونه تلقی شود و فرض نرمال بودن را برای نرخ بهره‌وری بپذیریم به این سؤالات پاسخ دهید:

الف) فاصله اطمینان ۹۰ درصدی اختلاف میانگین بهره‌وری برای دو کشور امریکا و کانادا تشکیل دهید.

ب) در سطح اطمینان ۹۹ درصد حدود اطمینان واریانس بهره‌وری را در کشور انگلستان محاسبه کنید.

ج) فاصله اطمینان میانگین نرخ بهره‌وری را در کشور امریکا برآورد کنید (α=۰/۰۱).

د) میزان واریانس بهره‌وری را در دو کشور کانادا و انگلیس مقایسه کنید (α=۰/۰۲).

پاسخ‌نامهٔ سؤالات

۱) ص	۲) غ	۳) غ	۴) غ
۵) ص	۶) ص	۷) غ	۸) ص
۹) ص	۱۰) غ	۱۱) الف	۱۲) الف
۱۳) د	۱۴) ب	۱۵) ج	۱۶) د
۷) ج	۱۸) الف	۱۹) ب	۲۰) د

فصل یازدهم

آزمون فرض آماری

۱ـ۱۱ مقدمه

در مدیریت، تحقیقات اغلب با سؤال و فرضیه شروع می‌شوند. فنون آمار استنباطی برای پاسخ به سؤالات تحقیق، همان فنون تخمین آماری‌اند که در فصل دهم به تفصیل بیان شد. بسیاری از تحقیقات مدیریتی از مرحلهٔ سؤال گذر کرده، به مرحلهٔ فرضیه می‌رسند. فرضیه حدسی زیرکانه در خصوص پارامتر یا توزیع آماری جامعه است. فنون آماری مناسب برای بررسی صحت یا سقم فرضیه‌ها، فنون «آزمون فرض آماری»[1] هستند که در این فصل مبانی آنها بیان خواهد شد.

به‌طور کلی هدف آزمون فرض آماری، تعیین این موضوع است که با توجه به اطلاعات به دست آمده از داده‌های نمونه، حدسی که دربارهٔ خصوصیتی از جامعه می‌زنیم به‌طور قوی تأیید می‌شود یا خیر. این حدس بنا به هدف تحقیق، نوعاً شامل ادعایی دربارهٔ مقدار یک پارامتر جامعه است. «در واقع هر حکمی دربارهٔ جامعه را یک فرض آماری می‌نامند که قابل قبول بودن آن باید بر مبنای اطلاعات حاصل از نمونه‌گیری از جامعه بررسی شود».

چون ادعا ممکن است صحیح یا غلط باشد، بنابراین دو فرض مکمل در ذهن به وجود می‌آید: فرض $\dot{H}$ (ادعا صحیح است) و فرض H' (ادعا غلط است).

1. hypothesis testing

که از مشاهدات نمونه به دست می‌آید، تصمیم گیرنده با به کاربردن اطلاعاتی باید یکی از این دو تصمیم یا استنباط را انتخاب کند:

H' را رد کند و نتیجه بگیرد که H به وسیلهٔ داده‌ها قویاً تأیید می‌شود.

H' را رد نکند و نتیجه بگیرد که داده‌ها H را قویاً تأیید نمی‌کنند.

فرایند انتخاب یکی از دو تصمیم فوق را آزمون فرض آماری می‌نامند. پذیرش یا عدم پذیرش یک فرض آماری تا حدودی با اثبات یا رد یک گزارهٔ ریاضی متفاوت است. یک گزارهٔ ریاضی را یا اثبات می‌کنند یا اینکه با ارائه مثال ناقض، آن را رد می‌کنند. در هر حالت، نتیجه‌ای که به دست می‌آید بدون هیچ شکی برقرار است؛ ولی در مقابل، نتیجهٔ حاصل از آزمون فرض آماری به وسیلهٔ تحلیل داده‌های تجربی حتمی و قطعی نیست.

شیوهٔ مناسب برای آزمون فرض دارای مراحل منطقی است. قبل از ذکر مراحل مورد نظر به بیان مفاهیم و اصطلاحات استفاده شده در آزمون فرض می‌پردازیم. واقعیت آن است که مهم‌ترین مرحله در آزمون فرض آماری تبدیل «فرضیه پژوهشی» و نقیض آن به «فرضیه‌های آماری» است. به‌طوری که اندیشمندان از این مرحله با عنوان «گلوگاه» یاد می‌کنند؛ بنابراین مرحله فوق به‌طور مبسوط با عنوان فرض صفر و فرض مقابل تشریح می‌شود.

۱۱ـ۲ فرض صفر[1] و فرض مقابل[2]

برای بحث دربارهٔ فرمول‌بندی مسئلهٔ آزمون فرض آماری و مراحل حل آن، به معرفی برخی از تعاریف و مفاهیم نیاز داریم. قبل از آنکه به این مبحث به‌طور کلی بپردازیم، مفاهیم پایه‌ای را از طریق ارائه مسئله خاصی بررسی می‌کنیم که در آن رفتار آزمایش از توزیع دو جمله‌ای پیروی می‌کند.

1. null hypothesis
2. alternative hypothesis

فرضیهٔ پژوهشی: نسبت مدیران برخوردار از شیوهٔ S_1 در کشور بیش از ۰/۶۰ است. فرض کنید یک نمونه مرکب از ۲۰ مدیر انتخاب و تعداد افراد برخوردار از شیوهٔ S_1، X، ثبت شود. از داده‌های به دست آمدهٔ این آزمایش برای پاسخ به این سؤال چگونه می‌توان استفاده کرد: «آیا گواه قانع کننده‌ای بر این مدعا وجود دارد که نسبت مدیران برخوردار از شیوهٔ S_1، بیش از ۰/۶۰ است؟»

نسبت مدیران برخوردار از شیوهٔ S_1، همان p است که مقدار آن را تنها وقتی می‌توان به‌طور صحیح تعیین کرد که آزمایش تعیین شیوه روی کلیهٔ مدیران کشور انجام گیرد. اما اطلاعات ما محدود به نتایج حاصل از ۲۰ مدیر است، با فرض اینکه بتوانیم ۲۰ مدیر را به عنوان مشاهدات مستقلی از جامعهٔ تمام مدیران کشور در نظر بگیریم، مدل احتمال X عبارت است از یک توزیع دو جمله‌ای با $n = ۲۰$ و پارامتر نامعلوم p. با توجه به فرضیه‌ای که در صورت مسئله بیان شد دو فرض آماری ذیل مطرح می‌شود:

نسبت مدیران برخوردار از شیوهٔ S_1 بیش از ۰/۶۰ است: $p>۰/۶۰$

نسبت مدیران برخوردار از شیوهٔ S_1 حداکثر ۰/۶۰ است: $p\leq ۰/۶۰$

کمیّت نامعلوم، درصد مدیران برخوردار از شیوهٔ S_1 است. از دو حکمی که دربارهٔ این کمیّت نامعلوم وجود دارند، یکی را فرض صفر (H_0) و دیگری را فرض مقابل (H_1) می‌نامند. برای اینکه معلوم شود کدام فرض را باید فرض صفر نامید لازم است که تفاوت اساسی بین نقش و مفهوم این دو اصطلاح به‌روشنی درک شود.

قبل از اینکه ادعا کنیم حکمی معتبر است، باید شواهد کافی در تأیید آن به دست آوریم. در نتیجه، شخص تحلیل گر باید حکم را غلط بداند مگر اینکه داده‌های به دست آمده خلاف آن را قویاً تأیید کنند. به عبارت دیگر باید فرض صفر (H_0) را صحیح دانستِ و فقط وقتی آن را رد کرد که داده‌ها قویاً برخلاف آن حکم کنند. تشابه زیادی بین این امر و محاکمه در دادگاه وجود دارد که در آن هیئت منصفه فرض صفر «مجرم نبودن» را اتخاذ می‌کنند مگر اینکه شواهد

قانع‌کننده‌ای مجرم بودن متهم را ثابت کنند و نه اینکه در اثبات بی‌گناهی او بکوشند.

با توجه به نکات فوق، می‌توان نتیجه گرفت که هرگاه بخواهیم یک ادعا را از طریق تأیید آن به وسیلهٔ اطلاعات حاصل از نمونه آزمون کنیم، نفی آن ادعا را فرض صفر (H_0) و خود آن را فرض مقابل (H_1) در نظر می‌گیریم؛ بنابراین تشخیص فرض صفر و فرض مقابل در فرضیهٔ ما باید به این صورت باشد:

$$\begin{cases} H_0 : p \leq 0/60 & \text{نقیض ادعا:} \\ H_1 : p > 0/60 & \text{ادعا:} \end{cases}$$

حال به تعریف فرضیهٔ دیگری می‌پردازیم:

فرضیه پژوهشی: میانگین نمرهٔ مسئولیت‌پذیری مدیران سازمان دست‌کم ۵۰ است. فرضیه‌های آماری این فرضیه براساس روش فوق عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_\chi < 50 \\ H_1 : \mu_\chi \geq 50 \end{cases}$$

(میانگین نمرهٔ مسئولیت‌پذیری مدیران سازمان کمتر از ۵۰ است)
(میانگین نمرهٔ مسئولیت‌پذیری مدیران سازمان دست کم ۵۰ است)

قاعدهٔ پذیرفته شده در آمار این است که محقق فرض H_0 را آزمون کند و براساس تأیید یا رد فرض H_0 به تحلیل فرضیهٔ پژوهشی بپردازد. واضح است که فرض H_0 در مثال فوق آزمون‌پذیر نیست، چرا که تعریف آماری آن فاقد مرز شناخته شده است. میانگین کمتر از ۵۰، یک فرض بدون حد مشخص است که هر مقداری را می‌توان برای آن متصور شد. مشخص است که آزمون چنین فرضیه‌ای از نظر ریاضی امکان‌پذیر نیست؛ پس اگر H_0 آزمون‌پذیر نیست، ناچار باید از نقیض آن یعنی H_1 استفاده کرد. از آنجا که H_1 دارای تساوی (=) است، پس آزمون‌پذیر است؛ بنابراین به منظور رعایت اصول آزمون فرض، جای H_0 و H_1 را تغییر داده، به آزمون H_0 به شرح ذیل می‌پردازیم:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_\chi \geq 50 & \text{ادعا:} \\ H_1 : \mu_\chi < 50 & \text{نقیض ادعا:} \end{cases}$$

تعریف H_0 و H_1 در این فرضیهٔ پژوهشی با فرضیهٔ شیوهٔ مدیران در ابتدای بحث کاملاً متفاوت است. در فرضیهٔ شیوهٔ مدیران H_0 نشان‌دهنده نقیض فرضیهٔ پژوهشی است و در این فرضیه H_0 نشان‌دهنده ادعاست. علی‌رغم مقدمهٔ ابتدای فصل آنچه ما را به تعریف H_0 سوق می‌دهد، قاعدهٔ آزمون‌پذیر بودن آن است. «قاعده این است که همواره باید فرض صفر دربرگیرندهٔ تساوی باشد. در زمینهٔ نظریهٔ اخیر می‌توان پذیرفت که H_0 گاهی بیان‌کنندهٔ ادعا و گاهی بیان‌کنندهٔ نقیض ادعاست. آنچه تعریف H_0 را شکل می‌دهد آزمون‌پذیر بودن آن است و آن چیزی نیست جز آنکه برای H_0 باید تساوی (=) وجود داشته باشد».

۱۱ـ۳ سطح معنی‌دار و خطاهای آماری

وقتی که فرضیه‌های آماری تعریف شدند، قدم بعدی مشخص کردن درجه‌ای برای معنی‌دار بودن تفاوتها (α) و حجمی برای نمونه مورد تحقیق (n) است.

روش کار این است که فرض H_0 را به نفع فرض H_1 رد کنیم به شرط اینکه از یک آزمون آماری مقداری به دست آوریم که احتمال وقوع آن مقدار با توجه به H_0 برابر یا کمتر از یک احتمال بسیار کوچک باشد که با α نشان داده می‌شود. این احتمال وقوع کوچک را «سطح معنی‌دار»[1] می‌گویند. مقادیر مرسوم برای α، ۰/۰۱ و ۰/۰۵ است. از آنجا که مقدار α در تعیین اینکه H_0 باید رد شود یا نه دخالت مستقیم دارد، الزام رعایت عینیت در تحقیق ایجاب می‌کند که α را پیش از شروع به جمع‌آوری داده‌ها مشخص کنیم.

سطح معنی‌داری که محقق برای تعیین α در تحقیق انتخاب می‌کند بر تخمین او از اهمیت و یا درجهٔ قابلیت کاربرد یافته‌هایش مبتنی است. طبیعی است که اگر تحقیق مثلاً دربارهٔ آثار درمانی عمل جراحی روی مغز باشد، محقق باید مقدار α را بسیار کمتر در نظر بگیرد؛ زیرا خطرهای رد کردن نادرست فرضیه صفر ـ

1. significant level

پذیرفتن نابجای فرضیهٔ مقابل آن که احتمالاً بـه توصیهٔ یـک تکنیـک درمانی غلط منجر خواهد شد- زیاد است.

هنگام اتخاذ تصمیم دربارهٔ H_0 ممکـن است دو نـوع خطا پیش آید: یکی «خطای نوع اول»[1] که عبارت است از رد کردن H_0 درحالی که فرض درست است و دیگری «خطای نوع دوم»[2] که در آن H_0 پذیرفته می‌شود درحالی که فرض غلط است.

احتمال وقوع خطای نوع اول بـا α ارتبـاط دارد؛ هرچـه α بـزرگ‌تر شود، احتمال اینکه H_0 را به غلط رد کنیم یا به عبارت دیگر احتمال اینکه مرتکب خطای نوع اول شویم، افـزایش مـی‌یابـد. خطـای نـوع دوم معمـولاً بـا β (بتـا) نمـایش داده می‌شود. α و β در اینجا، هم برای نشان‌دادن نوع خطاها و هم احتمـال ارتکـاب آن خطاها به کار می‌روند؛ یعنی:

$$\alpha = P\ (\text{خطای نوع اول}) = P\ [\text{رد کردن } H_0 \text{ وقتی } H_0 \text{ درست است}]$$

$$\beta = P\ (\text{خطای نوع دوم}) = P\ [\text{رد نکردن } H_0 \text{ وقتی } H_0 \text{ نادرست است}]$$

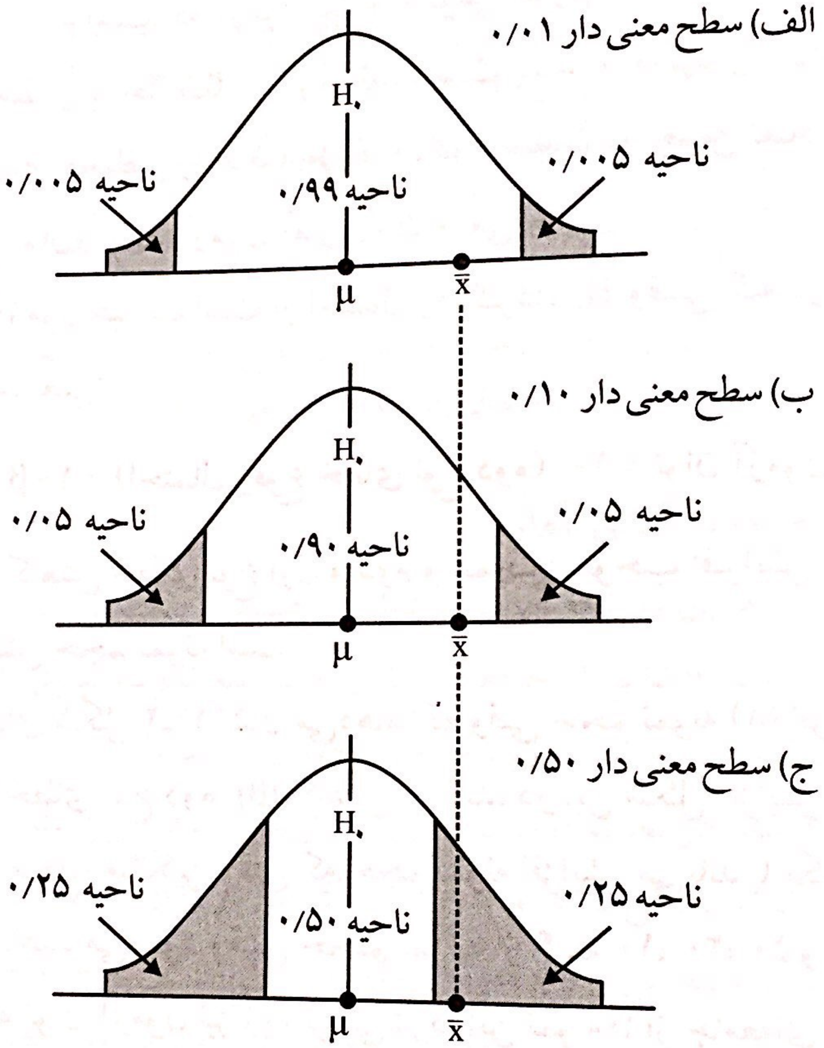
احتمال α به مقدار مشخص پـارامتر در دامنـه‌ای بـستگی دارد کـه H_0 آن را دربرمی‌گیرد و حال آنکه β به مقدار پارامتر در دامنه‌ای بـستگی دارد کـه H_1 آن را دربـرمـی‌گیـرد. ایـن خطاها و احتمال آنها را در رابطه با H_0 می‌توان در جدول ۱۱ـ۱ خلاصه کرد.

جدول ۱۱ـ۱ دو نوع خطای استنباطی: α و β

نتیجه‌گیری از نمونه	گزینه‌های صحیح: H_0 درست است	گزینه‌های صحیح: H_0 غلط است
H_0 پذیرفته می‌شود	تصمیم درست $(1-\alpha)$	خطای نوع دوم (β)
H_0 رد می‌شود	خطای نوع اول (α)	تصمیم درست (توان آزمون) $(1-\beta)$

1. type I error
2. type II error

واضح است که بین α و β یک رابطهٔ معکوس وجود دارد. با بالا رفتن α، مقدار β کاهش می‌یابد و بالعکس. این نوع رابطه در آمار به «بده ـ بستان»[1] بین α و β معروف است. آنچه مسلم است مجموع α و β الزاماً یک نیست.



شکل ۱ـ۱۱ سه سطح معنی‌دار متفاوت

برای مثال، چنان‌که در شکل ۱ـ۱۱ مشاهده می‌کنید با بالا رفتن ناحیه H_1 که دربرگیرندهٔ سطح معنی‌دار است، سطح H_0 کوچک‌تر می‌شود. این بدین معناست که احتمال پذیرش یک فرض نادرست صفر کاهش می‌یابد، ولی اشکال این اطمینان آن است که ممکن است یک فرض درست صفر را به غلط رد کنیم. این مطلب در شکل ۱ـ۱۱ ج که سطح معنی‌دار آن ۵۰ درصد است به‌خوبی مشاهده می‌شود.

1. trade off

درحالی‌که با کاهش مقدار α در قسمت الف شکل فوق فرض H_0 به‌درستی انتخاب شده، چون مقدار خطای نوع اول کاهش و خطای نوع دوم افزایش یافته است.

روشن است که در هر استنباط آماری احتمال وقوع یکی از این دو نوع خطا وجود دارد و لازم است که آزمون‌کننده به نوعی سازش که تعادل بین احتمال وقوع این دو نوع خطا را به حد مطلوب برساند، دست یابد. آزمونهای آماری مختلف، احتمال تعادلهای مختلفی را عرضه می‌کنند. در رسیدن به چنین تعادلی است که موضوع «تابع توان»[1] یک آزمون آماری مطرح می‌شود.

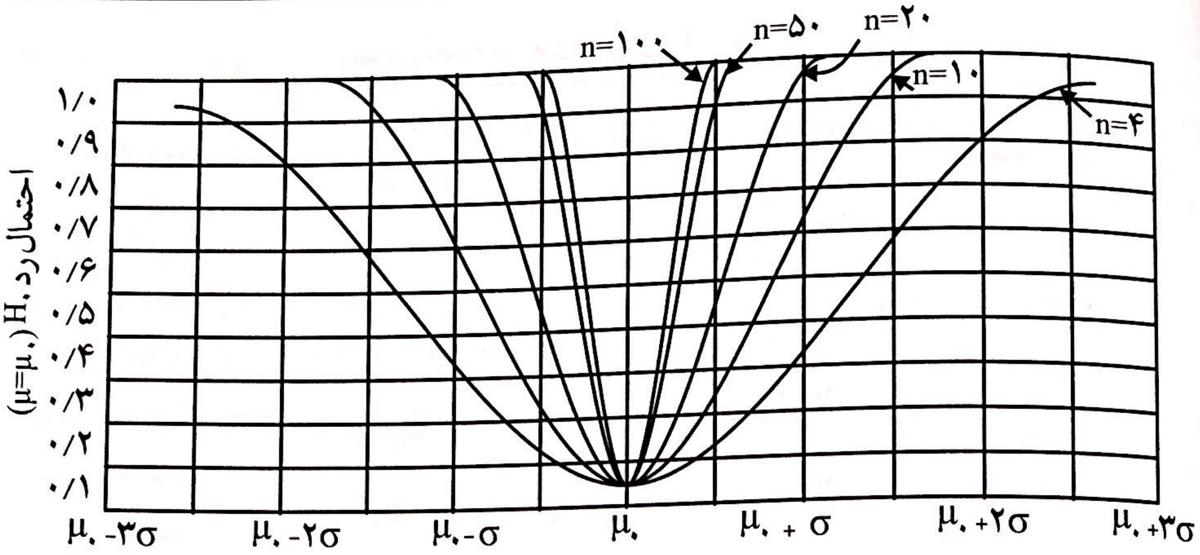
توان آزمون عبارت است از احتمال رد کردن H_0 وقتی که در حقیقت H_0 نادرست باشد؛ یعنی:

$$\text{توان آزمون} = 1 - (\text{احتمال وقوع خطای نوع دوم}) = 1-\beta \qquad (11\text{-}1)$$

آنچه موجب کاهش خطای نوع اول و دوم و همچنین موجب افزایش توان آزمون می‌شود، افزایش حجم نمونه است.

منحنیهای شکل ۱۱ـ۲ نشان می‌دهند که وقتی حجم نمونه (n) افزایش می‌یابد احتمال وقوع خطای نوع دوم (β) کاهش می‌یابد. در این شکل افزایش توان آزمون دو دنباله (دو طرفه)[2] میانگین وقتی که حجم نمونه افزایش می‌یابد با یکدیگر مقایسه شده است. مشاهده می‌شود وقتی حجم نمونه از ۴ به ۱۰، ۲۰، ۵۰ و ۱۰۰ افزایش می‌یابد چگونه توان آزمون نیز زیادتر می‌شود. این نمونه‌ها از جامعه‌ای نرمال انتخاب شده‌اند که واریانس آن σ_x^2 است.

شکل ۱۱ـ۲ همچنین نشان می‌دهد که وقتی H_0 درست است ـ یعنی وقتی میانگین واقعی با μ_0 مساوی است ـ احتمال رد کردن H_0 مساوی ۵ درصد خواهد بود. این مسئله طبیعی است، چون $\alpha=0/05$ است و α نشان‌دهندهٔ احتمال رد کردن H_0 است وقتی که در حقیقت H_0 درست باشد.



شکل ۲ـ۱۱ منحنیهای توان یک آزمون دو دنباله در سطح $\alpha = ۰/۰۵$ با نمونه‌های متعدد (با افزایش حجم نمونه احتمال رد H_0 افزایش می‌یابد)

۴ـ۱۱ توزیع نمونه‌گیری آماره

همانند تخمین آماری در تحقیقات استنباطی، صحت یک فرضیه آماری تنها با استفاده از نمونه‌ای n تایی از جامعهٔ آماری و توزیع نمونه‌گیری آماره مشخص می‌شود. چنان‌که در بحث تخمین، پارامتر مجهول با استفاده از توزیع نمونه‌گیری آماره برآورد شد، در بحث آزمون فرض نیز تأیید یا رد فرض صفر (H_0) به توزیع نمونه‌گیری آماره بستگی دارد. واضح است که توزیع آماره متأثر از توزیع جامعه و شرایط تخمین و همچنین حجم نمونه است؛ بنابراین در این قسمت برای تعیین نوع توزیع نمونه‌گیری به شرایط تخمین رجوع و براساس شرایط تخمین توزیع نمونه‌گیری مشخص می‌شود. جدول ۲ـ۱۱ نشان‌دهندهٔ توزیعهای نمونه‌گیری مورد استفاده در این فصل است که برحسب نوع آزمون به کار می‌روند.

جدول ۲ـ۱۱ نشان می‌دهد که از چه توزیعهایی برای آزمون هر پارامتر استفاده خواهد شد. متغیرهای استاندارد مورد استفاده به کمک توزیع نمونه‌گیری تعریف می‌شوند. اصطلاح «آماره آزمون»[1] که در این فصل از آن نام می‌بریم، همان متغیر استاندارد فصل دهم است که این بار با پارامتر مورد آزمون تعریف می‌شود.

1. test statistic

جدول ۲ـ۱۱ توزیع نمونه‌گیری آماره و آماره آزمون

پارامتر فرضیه پژوهشی	نماد آماری فرضیه	آماره	توزیع نمونه‌گیری	آماره آزمون (متغیر استاندارد)
میانگین جامعه	μ_0	$\bar{X}$	نرمال یا t استیودنت	Z یا t
مقایسهٔ میانگین دو جامعه	$\mu_1-\mu_2$	$\bar{X}_1-\bar{X}_2$	نرمال یا t استیودنت	Z یا t
نسبت موفقیت جامعه	p_0	$\bar{p}$	نرمال	Z
مقایسهٔ موفقیت در دو جامعه	p_1-p_2	$\bar{p}_1-\bar{p}_2$	نرمال	Z
واریانس جامعه	σ_0^2	S_x^2	کای ـ مربع	χ^2
مقایسه واریانس دو جامعه	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	$\frac{S_1^2}{S_2^2}$	فیشر	F

۵ـ۱۱ آزمون فرض یک دنباله و دو دنباله

براساس آنچه گذشت نتیجه می‌گیریم که H_0 را باید پذیرفت مگر آنکه دلیل محکمی بر رد آن وجود داشته باشد. این بدین معناست که فرض صفر همیشه دربرگیرندهٔ سطح اطمینان $(1-\alpha)100$ درصد است؛ بنابراین H_1 دربرگیرندهٔ سطح معنی‌دار α است. مفهوم کاربردی این گفته آن است که پذیرش یا رد H_0 با سطح اطمینان دلخواه صورت خواهد گرفت. پس همیشه H_1 به اندازه α در دنباله(های) توزیع نمونه‌گیری تعریف خواهد شد. یک دنباله[1] یا دو دنباله[2] بودن آزمون فرض آماری به تعریف H_0 و H_1 بستگی دارد. این تعاریف با مثالهای ۱ـ۱۱ تا ۳ـ۱۱ تشریح می‌شوند.

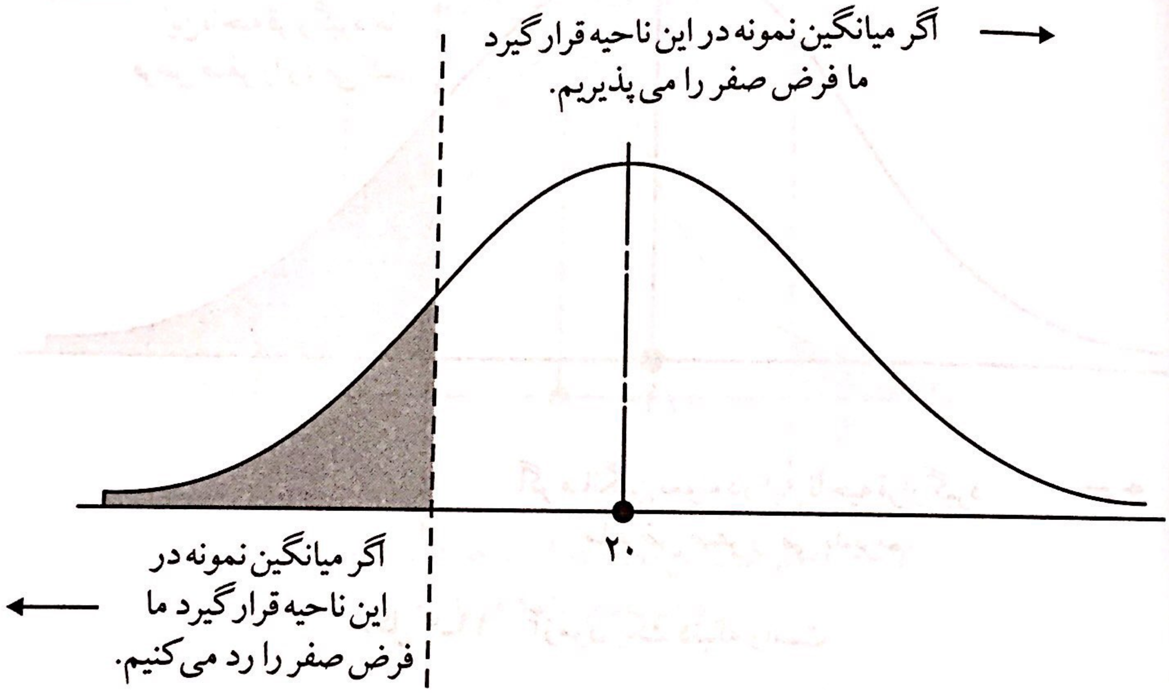
مثال ۱ـ۱۱ در فرضیه‌ای پژوهشی چنین آمده است: «میانگین دستمزد کارگران یک کارخانه صنعتی کمتر از ۲۰ هزار تومان است».

1. one tailed
2. two tailed

فرضیه مذکور طوری به فرضیه‌های آماری تبدیل می‌شود که H_0 نشان‌دهنده نقیض ادعا و H_1 نشان‌دهنده فرضیه پژوهشی باشد، به این صورت:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x \geq ۲۰ & \text{نقیض ادعا:} \\ H_1 : \mu_x < ۲۰ & \text{ادعا:} \end{cases}$$

واضح است که H_1 به اندازه α در دنبالهٔ چپ توزیع نمونه‌گیری $\bar{X}$ تعریف خواهد شد. این نوع آزمون را «آزمون یک دنباله چپ»[1] می‌خوانند و منحنی آن در شکل ۳ـ۱۱ دیده می‌شود:



شکل ۳ـ۱۱ آزمون یک دنباله چپ

مثال ۲ـ۱۱ فرضیه‌ای پژوهشی به این صورت تدوین شده است: «حداکثر، ۱۰ درصد محصولات کارخانهٔ الف معیوب هستند».

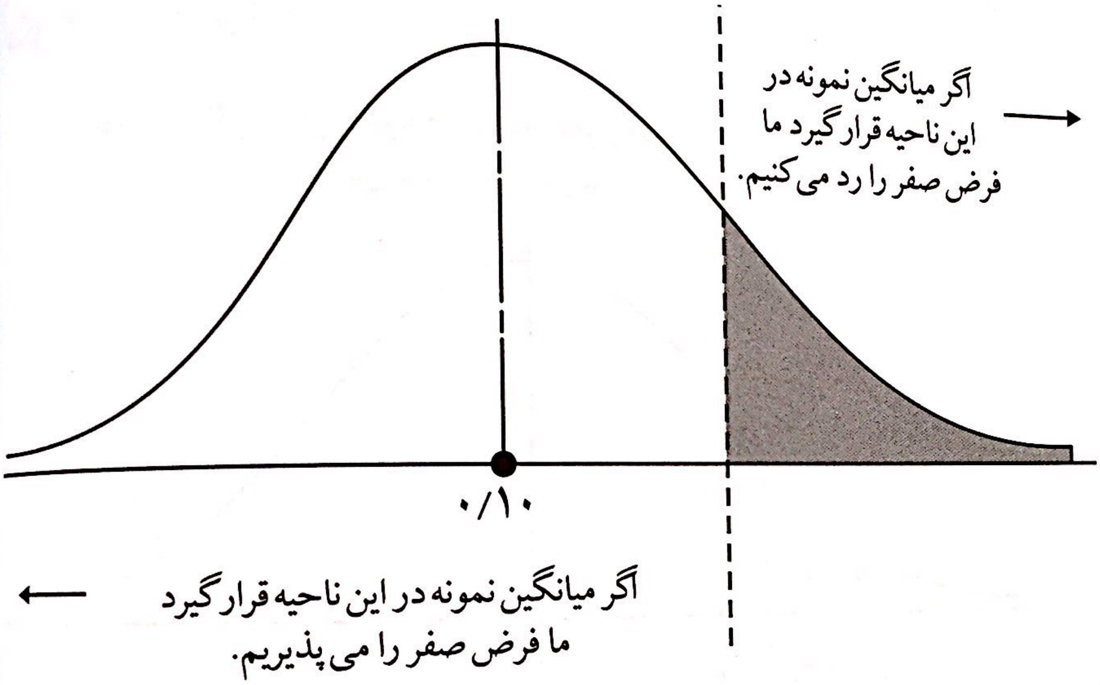
با تبدیل فرضیه پژوهشی به نقیض آن مشخص می‌شود که ادعا در H_0 و نقیض آن در H_1 قرار می گیرد؛ به این صورت:

1. left tailed test

ادعا: $\begin{cases} H_0 : p \leq ۰/۱۰ \\ H_1 : p > ۰/۱۰ \end{cases}$

نقیض ادعا:

در این نوع آزمون، H_1 به اندازه α در دنبالهٔ راست توزیع نمونه‌گیری $\bar{p}$ تعریف می‌شود. منحنی این آزمون در شکل ۴ـ۱۱ آمده است. از آنجا که H_1 در دنبالهٔ راست تعریف شده است، این نوع آزمون را «آزمون یک دنباله راست»[1] می‌گویند.



شکل ۴ـ۱۱ آزمون یک دنباله راست

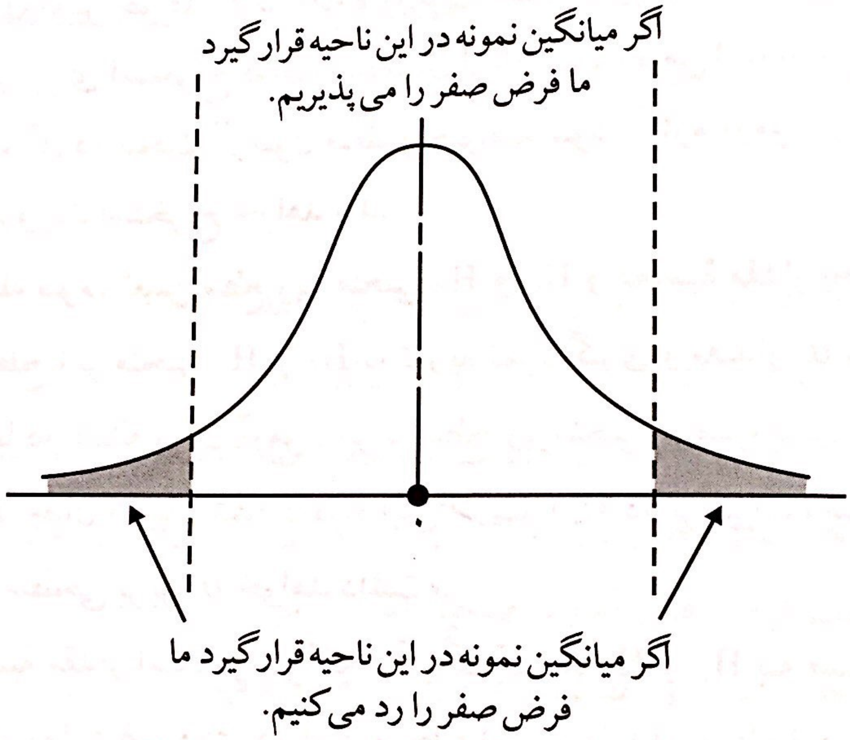
مثال ۳ـ۱۱ فرضیه پژوهشی در این مثال عبارت است از: «میانگین نمرهٔ مسئولیت‌پذیری کارمندان مرد با نمرهٔ مسئولیت‌پذیری کارمندان زن تفاوتی ندارد».
فرضیه‌های آماری عبارت فوق چنین است:

ادعا:
$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$
نقیض ادعا:

فرض آماری H_1 باید به اندازه ۱۰۰α درصد در دنباله‌های توزیع $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$

1. right tailed test

تعریف شود، چون قید مخالف بین μ_1 و μ_2 در H_1 دیده می‌شود؛ پس H_1 به اندازه $\frac{\alpha}{2}$ در دنباله راست و به اندازه $\frac{\alpha}{2}$ در دنبالهٔ چپ قرار می‌گیرد. دنبالهٔ چپ نشان‌دهنده $\mu_1 - \mu_2 < 0$ و دنبالهٔ راست نشان‌دهندهٔ $\mu_1 - \mu_2 > 0$ خواهد بود. طبیعی است H_0 نیز نشان‌دهندهٔ $\mu_1 = \mu_2$ است. منحنی این نوع فرضیه‌ها (فرضیه‌هایی با قید تساوی مطلق در H_0) در شکل ۵-۱۱ دیده می‌شود. چنین فرضیه‌هایی را آزمون دودنباله (دو طرفه) می‌گویند.



شکل ۵-۱۱ آزمون دو دنباله

۶-۱۱ مراحل عمومی آزمون فرض آماری

از جمع‌بندی مبانی آزمون فرض که بیان شد می‌توان برای تمامی آزمون فرضهای آماری، مراحل چهارگانهٔ ذیل را تدوین کرد. این رویه تا آخر کتاب برای انجام دادن هر آزمونی اعمال خواهد شد.

مرحله اول، تعریف فرضیه‌های آماری H_0 و H_1 (فرضها): براساس قاعده‌ای که بیان شد، چنانچه فرضیه پژوهشی مرز مشخصی (=) داشته باشد، H_0 نشان‌دهنده ادعا (فرضیه پژوهشی) خواهد بود؛ در غیر این صورت نقیض آن در H_0 تعریف

قرار خواهد گرفت. آنچه مسلم H_1 شده و فرضیه پژوهشی در قالب نماد آماری در H_1 قرار خواهد گرفت. آنچه مسلم است فرض H_0 و H_1 مکمل یکدیگرند. با این توصیف H_0 گاهی بیان‌کننده ادعا و گاهی نقیض ادعا خواهد بود.

مرحلهٔ دوم، تعیین توزیع نمونه‌گیری آماره و نوع آمارهٔ آزمون (آمارهٔ آزمون): توزیع نمونه‌گیری به شرایط تخمین پارامتر مورد ادعا بستگی دارد. بسته به اینکه فرضیه پژوهشی چه نوع پارامتری را بیان می‌کند، توزیع نمونه‌گیری آماره و آماره آزمون تغییر خواهد کرد. آماره آزمون، همان متغیر استانداردی است که در بحث تخمین برای استخراج فواصل اطمینان از آن استفاده می‌شد، با این تفاوت که تمام اجزاء آن در بحث آزمون معلوم خواهد بود. آماره آزمون از جدول ۲-۱۱ برحسب ضرورت استخراج خواهد شد.

مرحله سوم، تعیین سطح زیر منحنی H_0 و H_1 و محاسبهٔ مقدار بحرانی (مقدار بحرانی): سطح زیر منحنی H_0 و H_1 به توزیع نمونه‌گیری و مقدار α بستگی دارد. یک دنباله یا دو دنباله بودن آزمون نیز به سطح زیرمنحنی فرضیه‌های آماری تأثیر مستقیم دارد. چنان‌که بیان شده قاعده این است: «H_0 در برگیرندهٔ سطح اطمینان است و H_1 سطحی برابر α خواهد داشت».

محاسبهٔ مقدار استانداردی که تفکیک‌کنندهٔ H_0 و H_1 به صورت عددی باشد از دیگر موارد ضروری در این مرحله است. مقدار استاندارد براساس نوع آزمون و مقدار α از جداول آماری موجود (پیوست کتاب) استخراج می‌شود. این مقدار با توجه به علامت آن، «مقدار بحرانی»[1] نامیده می‌شود. مقدار استاندارد و جدول آماری مورد نیاز برای استخراج آن براساس آمارهٔ آزمون تعیین می‌شود؛ برای مثال اگر آمارهٔ آزمون از نوع Z باشد، مقدار بحرانی براساس جدول استاندارد Z تعیین می‌شود و اگر از نوع کای-مربع باشد، براساس جدول χ^2 تعریف می‌شود.

مرحلهٔ چهارم، تصمیم‌گیری: در این مرحله مقدار آمارهٔ آزمون محاسبه شده در مرحله دوم با مقدار بحرانی مرحلهٔ سوم مقایسه می‌شود. چنانچه آمارهٔ آزمون در

1. critical value

ناحیهٔ پذیرش H_0 قرار گیرد، گفته می‌شود که در سطح اطمینان مورد نظر، دلیل کافی برای پذیرش H_0 وجود دارد. در غیر این صورت فرض H_0 رد و H_1 در سطح خطای α درصد پذیرفته می‌شود.

تبدیل تصمیم‌گیری آماری به تصمیم‌گیری مدیریتی از دیگر موارد ضروری در این مرحله است. پس از تأیید یا رد H_0، تحلیل‌گر باید به‌طور مشخص بیان کند که آیا فرضیه پژوهشی پذیرفته یا رد شده است. بدیهی است محقق هیچ‌گاه ادعای اثبات یا عدم اثبات فرضیه پژوهشی یا فرضیه‌های آماری را ندارد، بلکه در تحلیل خود به لحاظ استقرار احتیاط خواهد کرد.

تمرین

۱. رابطهٔ بین خطای نوع اول و توان آزمون را بیان کنید.

۲. تفاوت آزمونهای یک دنباله با دو دنباله را ذکر کنید.

۳. این فرضیه پژوهشی را در نظر بگیرید: «درصد رضایت شغلی در سازمانهای دولتی کمتر از سازمانهای خصوصی است.» و فرضیه‌های آماری آن را بیان کنید.

۴. آیا بیان اثبات فرضیه‌های آماری صحیح است؟ چرا؟

۵. رابطه بین حجم نمونه و خطای نوع اول را توضیح دهید.

۱۱ـ۷ آزمون فرض آماری میانگین یک جامعه (μ_x)

اگر فرضیه‌ای در خصوص میانگین یک جامعهٔ آماری طراحی شود با استفاده از مراحل آزمون فرض آماری می‌توان صحت یا سقم فرضیه را در سطح معنی‌دار α تعیین کرد. مراحل چهارگانه آزمون فرض آماری برای μ_x به شرح ذیل است.

۱. فرضها: براساس قواعد بیان شده، فرضیه‌های آماری برای میانگین جامعه، صرف‌نظر از فرضیه پژوهشی یکی از این تعاریف را خواهد داشت:

$$۱)\begin{cases} H_0: \mu_x \le \mu_0 \\ H_1: \mu_x > \mu_0 \end{cases} \qquad ۲)\begin{cases} H_0: \mu_x > \mu_0 \\ H_1: \mu_x < \mu_0 \end{cases} \qquad ۳)\begin{cases} H_0: \mu_x = \mu_0 \\ H_1: \mu_x \ne \mu_0 \end{cases}$$

در رابطه‌های فوق H_0 ممکن است نشان‌دهندهٔ ادعا و یا نقیض ادعا باشد. همچنین μ_0 همان میانگین مورد آزمون است.

۲. آمارهٔ آزمون: آماره آزمون بسته به شرایط تخمین، یکی از توزیعهای Z یا t را خواهد داشت. حال براساس حالتها، آماره آزمون به این شرح تعریف می‌شود:

۱. وقتی که نمونه از جامعه نرمال با انحراف معیار معلوم انتخاب شود، توزیع $\bar{X}$ صرف‌نظر از حجم نمونه نرمال است و در نتیجه آمارهٔ آزمون، Z خواهد بود که چنین تعریف می‌شود:

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \tag{۱۱-۲}$$

۲. هرگاه نمونه از جامعه‌ای نرمال با انحراف معیار نامعلوم انتخاب شود، توزیع نمونه‌گیری $\bar{X}$ براساس حجم نمونه به این شرح تعیین می‌شود:

الف) اگر حجم نمونه کوچک باشد $(n \le 30)$، توزیع $\bar{X}$ از t استیودنت برخوردار و آمارهٔ آزمون عبارت است از:

$$t=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S_{\bar{x}}} \tag{۱۱-۳}$$

ب) درصورتی که حجم نمونه بزرگ باشد $(n>30)$، توزیع $\bar{X}$ براساس قضیهٔ حد مرکزی از تقریب نرمال برخوردار و آمارهٔ آزمون آن عبارت است از:

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S_{\bar{x}}} \tag{۱۱-۴}$$

در این حالت همچنین می‌توان براساس تعریف رابطهٔ Z و t از رابطهٔ ۳-۱۱ نیز استفاده کرد.

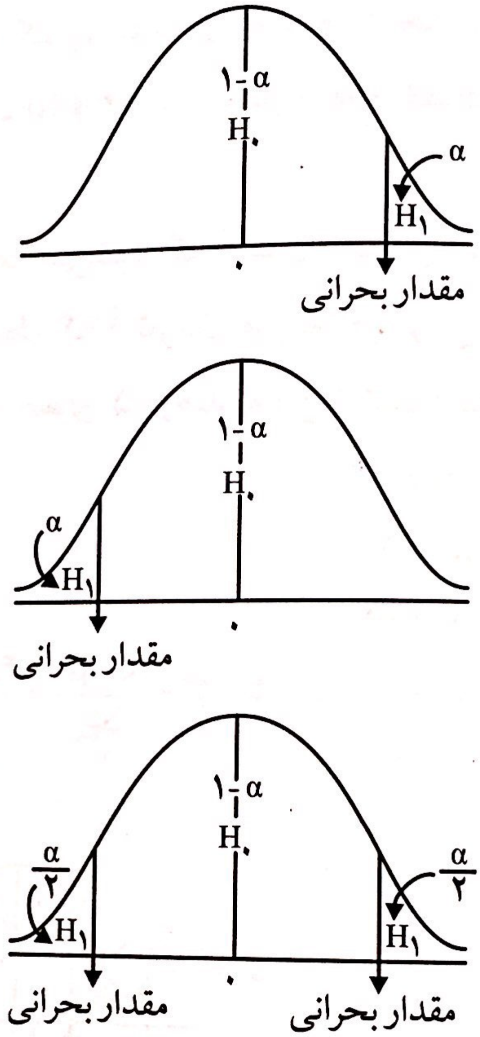
۳. مقدار بحرانی: در این مرحله محقق پس از تعیین مقدار α و سطح اطمینان، آزمون خود را از نظر یک دنباله و دو دنباله بودن مشخص خواهد کرد. اگرچه نوع آزمون براساس حالتهای مرحلهٔ اول تعریف می‌شود، تعیین مقدار بحرانی (مرز H_0 و H_1) براساس α و نوع آمارهٔ آزمون صورت می‌گیرد که از جدول

مربوط به پیوست کتاب استخراج می‌شود. برای وضوح بیشتر هر یک از تعاریف مرحلهٔ اول را به صورت منحنی در شکل ۶ـ۱۱ نمایش خواهیم داد.

۱) $\begin{cases} H_0: \mu_x \leqslant \mu_0 \\ H_1: \mu_x > \mu_0 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} H_0: \mu_x \geqslant \mu_0 \\ H_1: \mu_x < \mu_0 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} H_0: \mu_x = \mu_0 \\ H_1: \mu_x \neq \mu_0 \end{cases}$



شکل ۶ـ۱۱ آزمون یک دنباله و دو دنباله و سطح زیر منحنی H_0 و H_1

حالت اول را آزمون یک دنباله راست و حالت دوم را آزمون یک دنباله چپ و حالت سوم را چنان که از منحنی آن پیداست دو دنباله می گویند. مقادیر بحرانی نیز برحسب توزیع $\overline{X}$ و نوع آمارهٔ آزمون یا از جدول Z و یا از جدول t استیودنت استخراج می‌شوند.

۴. تصمیم گیری: در این مرحله مقدار آمارهٔ آزمون محاسبه شده با مقدار بحرانی مرحله سوم مقایسه می‌شود. اگر آمارهٔ آزمون در ناحیهٔ پذیرش H_0 قرار گیرد، فرض H_0 در سطح اطمینان $(1-\alpha)$ ۱۰۰ درصد پذیرفته می‌شود؛ در غیر این صورت داده‌های نمونه دلیل محکمی بر تأیید H_0 ارائه نداده و آن را رد می کنند.

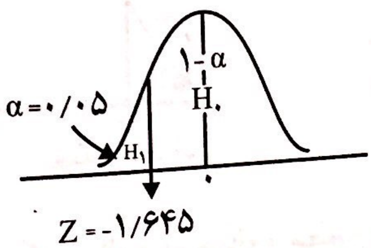
مثال ۴ـ۱۱ فرضیه‌ای به این صورت بیان شده است: «میانگین نمرۀ مسئولیت‌پذیری مدیران در کشور دست کم ۵۰ است». محقق برای بررسی فرضیۀ فوق یک نمونۀ ۶۴ تایی از بین مدیران کشور به‌طور تصادفی انتخاب کرده که میانگین و انحراف معیار آن به ترتیب ۴۵ و ۱۶ است. در سطح خطای ۵ درصد صحت قضیۀ فوق را بررسی کنید.

براساس مراحل اول و دوم مشخص می‌شود که آزمون از نوع یک دنباله چپ است که آمارۀ آزمون آن براساس رابطه ۴ـ۱۱ تعریف می‌شود؛ بنابراین فرضیه‌های آماری و سطح زیر منحنی آنها در سطح خطای ۵ درصد به این ترتیب است:

۱. فرضها:

$$H_0: \mu_x \geq ۵۰$$
$$H_1: \mu_x < ۵۰$$

۲. آمارۀ آزمون: $Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S_{\bar{x}}}=\frac{۴۵-۵۰}{\frac{۱۶}{\sqrt{۶۴}}}=-۲/۵$



۳. مقادیر بحرانی: $Z_{\alpha}=Z_{۰/۰۵}=-۱/۶۴۵$

۴. تصمیم گیری: پس از مقایسۀ آمارۀ آزمون با مقدار بحرانی مشخص می‌شود که آمارۀ آزمون در ناحیۀ H_1 قرار می‌گیرد؛ بنابراین در سطح خطای ۵ درصد می‌توان گفت که مشاهدات دلالت کافی بر تأیید H_0 ندارد. از آنجا که فرض H_0 بیان‌کنندۀ فرضیۀ پژوهشی است، پس در سطح خطای ۵ درصد می‌توان گفت فرضیۀ پژوهشی رد و نقیض آن، یعنی «میانگین نمرۀ مسئولیت‌پذیری مدیران در کشور کمتر از ۵۰ است» پذیرفته می‌شود.

مثال ۵ـ۱۱ یک دانشجوی مدیریت فرضیه‌ای به این صورت طراحی کرده

است: «میانگین مهارت ادراکی مدیران سازمان الف ۵۵ است». به منظور بررسی فرضیهٔ فوق، دانشجو از بین مدیران سازمان الف یک نمونهٔ تصادفی ۱۲ نفره انتخاب کرده که میانگین و انحراف معیار آن به ترتیب ۶۰ و ۱۵ است. فرض کنید توزیع امتیاز مهارت ادراکی مدیران سازمان الف نرمال است. در سطح اطمینان ۹۹ درصد صحت فرضیهٔ فوق را بررسی کنید.

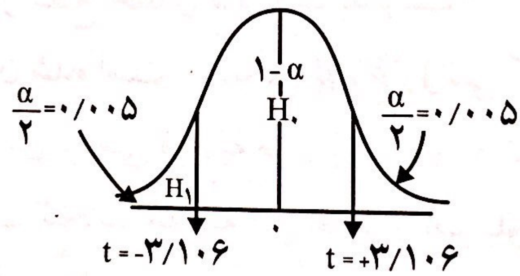
براساس مرحله اول و دوم آزمون فرض، مشخص می‌شود که آزمون دو دنباله بوده و آمارهٔ آزمون براساس رابطهٔ ۳ـ۱۱ تعریف می‌شود. همچنین مقدار بحرانی در سطح خطای $(\frac{\alpha}{2}=\text{۰/۰۰۵})$ از جدول t استیودنت استخراج می‌شود؛ بنابراین:

۱. فرضها:

$$H_0: \mu_x = 55$$

$$H_1: \mu_x \neq 55$$

۲. آمارهٔ آزمون: $t=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S_{\bar{x}}}=\frac{60-55}{\frac{15}{\sqrt{12}}}=1/155$



۳. مقادیر بحرانی: $t_{0/005,11}=\pm 3/106$

۴. تصمیم گیری: چون آمارهٔ آزمون (t=۱/۱۵۵) در ناحیهٔ H_0 قرار گرفته است پس فرض صفر در سطح اطمینان ۹۹ درصد پذیرفته می‌شود؛ بنابراین فرضیهٔ پژوهشی دانشجو که به‌طور مستقیم در H_0 قرار گرفته است تأیید می‌شود.

تمرین

۱. ادعا شده است که میانگین برق مصرفی فروردین ماه یک ناحیهٔ بزرگ تهران دست کم ۱۳۰۰ کیلووات ساعت بوده است. بدین منظور یک نمونهٔ تصادفی به

تعداد ۴۰۰ خانوار از منطقه انتخاب شده که میانگین و انحراف معیار برق مصرفی آنها به ترتیب ۱۲۵۲ و ۲۵۷ کیلووات ساعت است. سطح خطای یک درصد را در نظر گرفته، صحت ادعا را بررسی کنید.

۲. ادعا شده که میانگین زمان انتظار هواپیماهای مسافربری فرودگاه مهرآباد برای فرود روی باند ۳ دقیقه است. در این زمینه ۷ پرواز به‌طور تصادفی انتخاب شده که انتظار آنها برای فرود به این ترتیب است:

$$x_i = ۱/۵, ۲, ۲/۵, ۳, ۵, ۴, ۴/۵$$ (زمان برحسب دقیقه)

توزیع زمان انتظار برای فرود روی باند نرمال است. ادعای فوق را در سطح خطای یک درصد محاسبه کنید.

۳. حسابرسی ادعا کرده که میانگین ماندهٔ حسابهای بدهکاران شرکت ب ۴۵۰ هزار تومان است. به منظور بررسی این ادعا یک نمونهٔ ۱۰تایی از حسابهای بدهکاران شرکت انتخاب شده که میانگین آن ۴۰۰ هزار تومان و انحراف معیارش ۲۰ هزار تومان است. توزیع مانده حسابهای بدهکاران شرکت نرمال است. محاسبه کنید آیا می‌توان ادعا را در سطح خطای ۵ درصد پذیرفت؟

۴. در فرضیه‌ای چنین بیان شده است: «میانگین بلوغ روانی کارمندان سازمان الف حداکثر ۶۰ است». برای بررسی فرضیهٔ فوق یک نمونهٔ تصادفی ۸۱ نفره از بین کارمندان سازمان الف انتخاب شد که این افراد از نظر بلوغ روانی امتحان شدند. میانگین بلوغ روانی آنها ۶۸ و انحراف معیار نمرهٔ امتحانشان ۲۰ شده است. سطح خطای ۲ درصد را در نظر گرفته، فرضیهٔ پژوهشی را آزمون کنید.

۱۱ـ۸ آزمون مقایسهٔ میانگین دو جامعهٔ آماری

بخش اعظم فرضیه‌های پژوهشی در مدیریت و علوم رفتاری به منظور مقایسهٔ دو جامعهٔ آماری انجام می گیرد. این نوع فرضیه‌ها را «فرضیه‌های تطبیقی»[1] گویند. برای

1. comparative

آزمون این نوع فرضیه‌ها (چنانچه میانگین‌پذیر باشند) و تعیین صحت و سقم آنها می‌توان از مراحل آزمون فرض آماری برای میانگین دو جامعه استفاده کرد. مراحل آزمون را به ترتیب چنین شرح می‌دهیم.

۱. فرضها: فرضیه‌های آماری برگرفته از فرضیه پژوهشی و نقیض آن هستند. با توجه به فرضیهٔ پژوهشی و نقیض آن، فرضیه‌های آماری یکی از این تعاریف را خواهند داشت:

$$1)\begin{cases}H_0:\mu_1\le\mu_2\\ H_1:\mu_1>\mu_2\end{cases}\qquad 2)\begin{cases}H_0:\mu_1\ge\mu_2\\ H_1:\mu_1<\mu_2\end{cases}\qquad 3)\begin{cases}H_0:\mu_1=\mu_2\\ H_1:\mu_1\ne\mu_2\end{cases}$$

۲. آمارهٔ آزمون: به خاطر داریم که $\mu_1-\mu_2$ از آمارهٔ ناریب $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ برخوردار است. توزیع $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ به شرایط تخمین تفاضل میانگین دو جامعه بستگی دارد که به این صورت تفکیک‌پذیر است:

۱. وقتی نمونه‌ها از دو جامعهٔ نرمال با انحراف معیار معلوم انتخاب شوند، توزیع $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ نرمال و آمارهٔ آزمون عبارت است از:

$$Z=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\qquad (11\text{-}5)$$

۲. وقتی نمونه‌ها از دو جامعهٔ نرمال با انحراف معیار نامعلوم انتخاب شوند، توزیع نمونه‌گیری آماره به n_1+n_2-2 به شرح ذیل بستگی خواهد داشت:

الف) اگر درجهٔ آزادی کوچک‌تر از ۳۰ باشد، توزیع نمونه‌گیری آماره t استیودنت است. خطای استاندارد در این حالت تحت تأثیر فرض تساوی و عدم تساوی واریانس دو جامعه متفاوت خواهد بود، به‌طوری که اگر $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ باشد، آمارهٔ آزمون عبارت است از:

$$t=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}},\quad S_p=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\qquad (11\text{-}6)$$

توزیع t در این حالت دارای درجهٔ آزادی $d.f = n_1 + n_2 - 2$ خواهد بود. S_p همان واریانس مشترک است.

اگر فرض $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ پذیرفته شود، درجهٔ آزادی براساس رابطهٔ ۱۱ـ۷ و آمارهٔ آزمون براساس رابطهٔ ۱۱ـ۸ تعریف می‌شود:

$$d.f' = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}} \qquad (۱۱ـ۷)$$

$$t' = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \qquad (۱۱ـ۸)$$

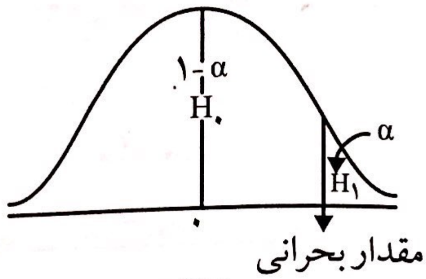
ب) اگر درجهٔ آزادی بزرگ‌تر از ۳۰ باشد، آماره آزمون چنین تعریف می‌شود:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \qquad (۱۱ـ۹)$$

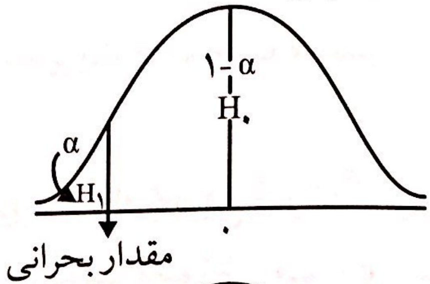
براساس قضیهٔ حد مرکزی در نمونه‌های بزرگ تقریب $t \approx Z$ برقرار است؛ بنابراین می‌توان از هر یک از رابطه‌های ۱۱ـ۶ و ۱۱ـ۸ به جای رابطهٔ ۱۱ـ۹ استفاده کرد.

۳. مقدار بحرانی: سطح زیر منحنی برحسب نوع آزمون، α و توزیع نمونه‌گیری $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ تعریف می‌شود؛ بنابراین برحسب فرضیه‌های آماری در مرحلهٔ اول، سطح زیر منحنی در حالتهای مختلف به شکل ۱۱ـ۷ خواهد بود. حالتهای اول و دوم از نوع آزمونهای یک دنباله و حالت سوم آزمون دو دنباله است. مقدار بحرانی براساس آمارهٔ آزمون و مقدار α از جدول t یا Z استخراج خواهد شد.

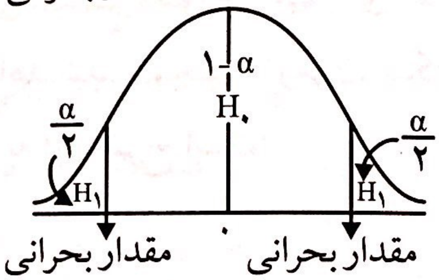
۱) $\begin{cases} H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \\ H_1: \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$



۲) $\begin{cases} H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \\ H_1: \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$



۳) $\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$



شکل ۷ـ۱۱ سطح زیر منحنی H_0 و H_1 در سطح خطای α

۴. تصمیم گیری: مقایسهٔ مقدار بحرانی و آمارهٔ آزمون مشخص خواهد کرد که آیا H_0 تأیید یا رد می‌شود. چنانچه آمارهٔ آزمون در ناحیهٔ H_0 قرار گیرد، H_0 در سطح اطمینان دلخواه تأیید شده، در غیر این صورت رد می گردد. پس از تأیید یا رد H_0، محقق به تبیین رد یا تأیید فرضیهٔ پژوهشی خود خواهد پرداخت.

مثال ۶ـ۱۱ تحقیقی برای مقایسهٔ روش آموزش متمرکز مدیران با روش غیر متمرکز آنان در دست برنامه‌ریزی است. بدین منظور فرضیه‌ای به این صورت بیان شده است: «روش آموزش متمرکز برای مدیران بهتر از روش غیر متمرکز است». ملاک سنجش فرضیهٔ فوق مقایسهٔ میانگین نمره‌های مدیرانی است که به روش متمرکز و غیرمتمرکز آموزش دیده‌اند. چون به تمام مدیران آموزش دیده دسترسی نبوده به نمونه‌هایی از هر گروه اکتفا شده است. بررسیها نشان می‌دهد که توزیع نمره‌ها در هر دسته نرمال است. اطلاعات حاصل از نمونه‌ها به این شرح است:

روش متمرکز	روش غیرمتمرکز
$n_1=10$	$n_2=15$
$\bar{X}_1=52$	$\bar{X}_2=45$
$S_1=12$	$S_2=8$

فرض تساوی واریانس دو جامعه را بپذیرید و صحت فرضیه را در سطح خطای یک درصد محاسبه کنید.

براساس مراحل اول تا سوم مشخص می‌شود که توزیع نمونه‌گیری آماره، t استیودنت است و چون واریانس نمره‌ها در دو سیستم آموزش مساوی است، پس آمارهٔ آزمون براساس رابطهٔ ۶ـ۱۱ تعریف خواهد شد. همچنین آزمون، یک آزمون یک دنباله است که تبیین آماری و منحنی آن به این شرح است:

۱. فرضها:

(از نظر اثربخشی روش آموزش متمرکز بهتر از روش غیرمتمرکز نیست.)

$H_0: \mu_1 \leq \mu_2$

(از نظر اثربخشی روش آموزش متمرکز بهتر از روش غیرمتمرکز است.)

$H_1: \mu_1 > \mu_2$

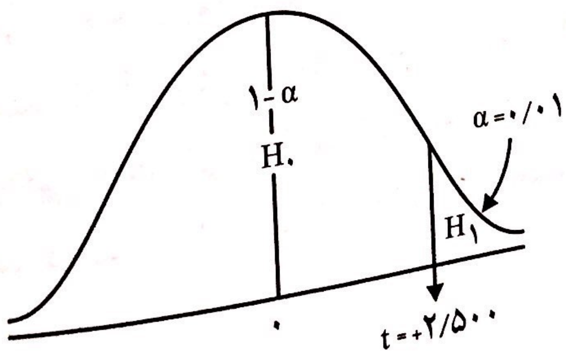
$$S_p=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}=\sqrt{\frac{(10-1)(12)^2+(15-1)(8)^2}{10+15-2}}=9/762$$

۲. آماره آزمون:

$$t=\frac{(52-45)-0}{9/762\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{15}}}=1/757$$

۳. مقادیر بحرانی:

$$t_{\alpha\, d.f}=t_{0/01,23}=\pm 2/500$$



۴. تصمیم گیری: آمارهٔ آزمون ($t = ۱/۷۵۷$) در مقایسه با مقدار بحرانی ($t = ۲/۵۰۰$) در ناحیهٔ H_0 قرار می گیرد؛ بنابراین، فرض H_0 در سطح اطمینان ۹۹ درصد پذیرفته می‌شود. به عبارت دیگر فرضیهٔ پژوهشی تحقیق رد و نقیض آن تأیید می گردد. چون H_0 نشان‌دهندهٔ نقیض ادعا و H_1 نشان‌دهندهٔ فرضیه پژوهشی (ادعا) است.

۱۱ـ۹ آزمون مقایسهٔ زوجها (آزمون قبل و بعد)

در مبحث ۱۱ـ۸ فرض اساسی این بود که میانگینها و نمونه‌های هر گروه مستقل از یکدیگر هستند. روشی که برای ارزشیابی پیش‌آزمون[1] و پس‌آزمون[2] به کار می‌رود، روشی است که در آن از مشاهدات مربوط به نمونه‌های غیرمستقل استفاده می کنند. آزمون فرضیه‌ای که بر مبنای این نوع داده‌ها قرار دارد به «آزمون مقایسهٔ زوجها»[3] معروف است.

بسیار اتفاق می‌افتد که تفاوت واقعی بین دو جامعه نسبت به متغیر مورد نظر وجود ندارد، ولی وجود منابع خارجی پراکندگی ممکن است سبب رد فرضیهٔ H_0 بشود. از طرف دیگر، ممکن است تفاوتهای واقعی با وجود عوامل خارجی پوشیده گردد. هدف از آزمون مقایسهٔ زوجها این است که با تشکیل زوجهای شبیه به هم نسبت به متغیر مورد نظر حداکثر تعداد منابع خارجی پراکندگی را تا آنجا که امکان دارد از بین برد. در این گونه موارد به جای آنکه تجزیه و تحلیل را به کمک مشاهدات فردی انجام دهیم، تفاوت بین زوج مشاهدات فردی را به عنوان متغیر بررسی می کنیم.

ساختار ذیل نشان‌دهندهٔ مشاهدات در یک مقایسهٔ زوجی است که در آن x و

1. pre test
2. post test
3. paires test

به ترتیب نمایشگر پاسخهای رفتار[1] ۱ و ۲ هستند. تفاضل بین پاسخها در هر زوج در ستون آخر ثبت شده است. در این نوع آزمون، رفتار ۲ را همیشه y و رفتار ۱ را x می‌دانیم و d_i (تفاضل) را نیز همیشه با $y_i - x_i$ بیان می کنیم.

جدول ۳ـ۱۱ ساختار آزمون مقایسهٔ زوجها

زوج	رفتار ۱ (x_i)	رفتار ۲ (y_i)	تفاضل $d_i = y_i - x_i$
۱	x_1	y_1	$d_1 = y_1 - x_1$
۲	x_2	y_2	$d_2 = y_2 - x_2$
۳	x_3	y_3	$d_3 = y_3 - x_3$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
n	x_n	y_n	$d_n = y_n - x_n$

فرضیات آزمون زوجها عبارت‌اند از:

الف) هر زوج (y_i , x_i) مستقل از زوج دیگری است.

ب) متغیر مورد مطالعه از مقیاس نسبی یا فاصله‌ای برخوردار است.

ج) توزیع تفاوتها در جامعهٔ مشاهدات ۲ تایی همبسته، نرمال یا از تقریب نرمال برخوردار است.

ستون d_i نشان‌دهندهٔ نمونهٔ زوجی n تایی است که به نوعی $Cov(X, Y)$ را در خود دارد. حال آزمون مناسب را همانند مراحل آزمون μ_x می‌توان به عمل آورد. با این تفاوت که در این بخش آماره‌ها و پارامترها از نماد d برخوردارند. جدول ۴ـ۱۱ به معرفی آماره‌ها و پارامترهای مورد نیاز برای این آزمون خاص می‌پردازد.

جدول ۴ـ۱۱ معرفی آماره‌ها و پارامترهای آزمون مقایسهٔ زوجها

پارامتر	آماره
$\mu_d = \frac{\sum_{i=1}^{N} d_i}{N}$	$\bar{d} = \frac{\Sigma d_i}{n}$
$\sigma_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (d_i - \mu_d)^2}{N}$	$S_d^2 = \frac{\Sigma (d_i - \bar{d})^2}{n-1}$
$\sigma_{\bar{d}}^2 = \frac{\sigma_d^2}{n}$	$S_{\bar{d}}^2 = \frac{S_d^2}{n}$

آمارهٔ آزمون از نوع t است که با فرض مجهول‌بودن σ_d عبارت است از:

$$t = \frac{\bar{d} - 0}{S_{\bar{d}}} \quad (11\text{-}10)$$

در این بخش از ذکر مراحل چهارگانهٔ آزمون فرض به دلیل شباهت آن با آزمون μ_x خودداری کرده، با ذکر مثال آن را شرح می‌دهیم. نکتهٔ قابل توجه در آمارهٔ آزمون این است که H_0 همیشه قید $\geq$، $\leq$ یا $=$ با صفر (عدم اختلاف میانگین زوجها) را خواهد داشت. از آزمون مقایسهٔ زوجها، برای مقایسه میانگین یک نمونه در دو زمان متفاوت (t_1, t_2) استفاده می‌شود. درصورتی که خواسته باشیم میانگین یک نمونه را در بیش از ۲ زمان یعنی t_1, t_2, t_3 مقایسه کنیم از آزمون طرحهای تکراری استفاده می‌شود.

مثال ۷ـ۱۱ به منظور مقایسهٔ جوّ سازمانی در وضعیت موجود و وضعیت مطلوب، فرضیه‌ای به این صورت بیان شده است: «جوّ سازمانی موجود با جوّ سازمانی در وضعیت مطلوب اختلاف نامناسبی دارد». برای بررسی فرضیه از پنج مدیر سازمانی که به‌طور تصادفی انتخاب شده‌اند خواسته شده است که ضمن ارزش‌گذاری وضع مطلوب جوّ سازمانی برای سازمان، نمرهٔ وضع موجود جوّ سازمانی را نیز بیان کنند. خلاصه امتیازات حاصل از شاخصهای جوّ سازمانی در وضعیت مطلوب و موجود به این ترتیب است:

مدیر	۱	۲	۳	۴	۵
نمره وضع مطلوب (x_i)	۵۰	۵۹	۵۰	۵۸	۵۰
نمرهٔ وضع موجود (y_i)	۴۰	۵۷	۴۷	۵۰	۴۸

فرض نرمال بودن برای نمره‌های جوّ سازمانی در هر دو وضعیت پذیرفتنی است. صحت فرضیه پژوهشی را در سطح خطای یک درصد بررسی کنید.

۱. فرضها: اگر میانگین کل زوجهای جامعهٔ آماری (که در اینجا نمره‌های کلیه مدیران است) کمتر از صفر باشد، می‌توان گفت بین جوّ سازمانی در وضع موجود با وضع مطلوب شکاف نامناسب وجود دارد. بنابراین فرضیه پژوهشی و نقیض آن به این صورت تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_d \geq 0 & \text{نقیض ادعا:} \\ H_1 : \mu_d < 0 & \text{ادعا:} \end{cases}$$

فرضیه پژوهشی به علت نداشتن تساوی در H_1 قرار گرفته و نقیض آن در H_0 آمده است.

۲. آمارهٔ آزمون: گفتیم که آمارهٔ $\bar{d}$ از توزیع t استیودنت برخوردار است. درحالی که اگر $\sigma_{\bar{d}}$ برای نمره‌های زوجها مشخص باشد می‌توان از توزیع نرمال (متغیر استاندارد Z) استفاده کرد. از آنجا که توزیع t هم برای $n<30$ و هم برای $n\geq 30$ سازگار است، پس تنها آماره آزمون عبارت است از:

$$t = \frac{\bar{d}}{S_{\bar{d}}}$$

حال به محاسبهٔ اجزای آمارهٔ آزمون می‌پردازیم:

زوج	۱	۲	۳	۴	۵	
x_i	۵۰	۵۹	۵۰	۵۸	۵۰	
y_i	۴۰	۵۷	۴۷	۵۰	۴۸	
d_i	۱۰-	۲-	۳-	۸-	۲-	$\Sigma d_i = -25$
$(d_i-\bar{d})^2$	۲۵	۹	۴	۹	۹	$\Sigma(d_i-\bar{d})^2 = 56$

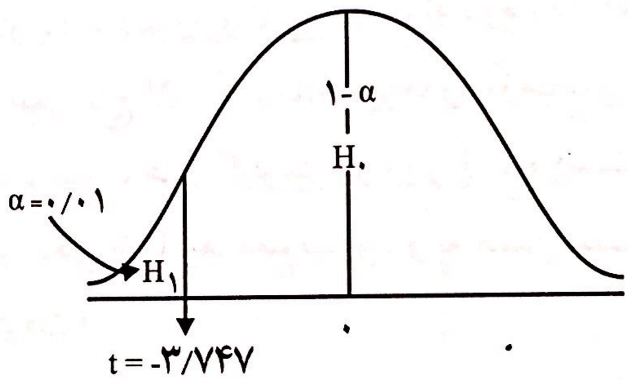
$$\bar{d}=\frac{\Sigma d_i}{n}=\frac{-۲۵}{۵}=-۵$$

$$S_d^۲=\frac{\Sigma(d_i-\bar{d})^۲}{n-۱}=\frac{۵۶}{۵-۱}=۱۴\Rightarrow S_d=۳/۷۴۲$$

آمارهٔ آزمون: $t=\frac{-۵}{\frac{۳/۷۴۲}{\sqrt{۵}}}=-۲/۹۸۸$

۳. مقدار بحرانی: آزمون از نوع یک دنبالهٔ چپ است که با توجه به $\alpha=۰/۰۱$، منحنی آن به این صورت است:

$$\begin{cases}\alpha=۰/۰۱\\ d.f=n-۱=۵-۱=۴\end{cases}\Rightarrow t_{۰/۰۱,۴}=-۳/۷۴۷$$



مقدار بحرانی براساس جدول t استیودنت با خطای یک درصد و درجهٔ آزادی ۴ مساوی ۳/۷۴۷- است.

۴. تصمیم گیری: آمارهٔ آزمون ($t=-۲/۹۸۸$) در مقایسه با مقدار بحرانی در ناحیهٔ H. قرار می گیرد؛ بنابراین فرض H. در سطح اطمینان ۹۹ درصد پذیرفته می‌شود. به عبارت دیگر فرضیهٔ پژوهشی رد شده، نقیض آن تأیید می گردد.

تمرین

۱. در مطالعهٔ حقوق کارکنان یک شرکت بزرگ، نمونه‌های تصادفی مرکب از ۱۵۰ کارمند متخصص به‌طور مستقل از دو بخش مهندسی و حسابداری انتخاب شده‌اند. اطلاعات مربوط به حقوق این کارکنان به این صورت به دست آمد:

بخش مهندسی	بخش حسابداری
$n_2=150$	$n_1=150$
$\bar{X}_2=39212$ تومان	$\bar{X}_1=37250$ تومان
$S_2=5356$ تومان	$S_1=5541$ تومان

سطح خطای ۲ درصد را در نظر گرفته، فرضیهٔ ذیل را آزمون کنید: «بین میانگین حقوق کارمندان بخش حسابداری و مهندسی تفاوتی دیده نمی‌شود».

۲. یک تحلیل‌گر عملیات می‌خواهد برای بهبود وضع مصرف لاستیک، تفاضل میانگین طول عمر عاج لاستیک یک نوع تایر اتومبیل خاص را در حالتی که فشار باد تایر به صورت استاندارد و یا بیشتر از حد استاندارد است برآورد کند. او دو نمونهٔ مستقل، مرکب از ۱۵ تایر از خط تولید انتخاب کرده است. تایرهای نمونه اول را با فشار باد استاندارد و تایرهای نمونهٔ دوم را با فشار باد بیش از حد استاندارد تنظیم و عمر عاج لاستیک تمام تایرها را آزمایش کرده است. نتایج عمر عاج لاستیک برحسب هزار کیلومتر در زیر آمده است (حجم نمونهٔ اول $n_1=14$ است؛ زیرا یکی از تایرها معیوب بود و به همین سبب روی آن آزمایش مربوط صورت نگرفت).

فشار باد زیاد	فشار باد استاندارد
$n_2=15$	$n_1=14$
$\bar{X}_2=40/7$	$\bar{X}_1=43$
$S_2=1/3$	$S_1=1/1$

فرض کنید هر دو جامعه توزیع نرمال با واریانس مساوی دارند:

الف) تفاوت میانگینهای عمر عاج لاستیک برای دو نوع فشار تایر، $\mu_1-\mu_2$ را با استفاده از یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصد برآورد کرده، فاصله اطمینان حاصل را تفسیر کنید.

ب) آیا می‌توان با استفاده از آزمون فرض آماری نتایج بند الف را گرفت؟

۳. فرضیه تحقیقی چنین است: «در میان مدیران عالی به مهارت ادراکی بیشتر از

مهارت فنی نیاز است».

محققی برای بررسی فرضیه فوق ۱۰ مدیر را به‌طور تصادفی انتخاب کرده و از هر یک آزمون تعیین نیاز به مهارت ادراکی و فنی به عمل آورده است. نتایج در این جدول آمده است:

مدیر	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
مهارت ادراکی	۸۰	۷۰	۷۵	۶۵	۸۲	۸۸	۶۷	۵۷	۹۰	۹۲
مهارت فنی	۵۰	۶۵	۷۰	۷۵	۸۰	۷۵	۶۶	۵۰	۸۰	۹۰

با فرض نرمال بودن توزیع نیاز در هر دو نوع مهارت، صحت فرضیه را در سطح خطای ۵ درصد آزمون کنید.

۴. ادعا شده که یک برنامهٔ ایمنی صنعتی در کاهش تضییع ساعات کار ناشی از نقص در ماشینهای کارخانه مؤثر است. داده‌های زیر مربوط به ضایع شدن ساعتهای کار هفتگی به واسطهٔ نقص در ۶ دستگاه است که یکی قبل و دیگری بعد از اجرای برنامهٔ ایمنی جمع‌آوری شده است:

دستگاه	۱	۲	۳	۴	۵	۶
قبل	۱۲	۲۹	۱۶	۳۷	۲۸	۱۵
بعد	۱۰	۲۸	۱۷	۳۵	۲۵	۱۶

فرضیات لازم را بیان کرده، سپس تعیین کنید که آیا داده‌ها از ادعای فوق حمایت می‌کنند سطح خطا را ۵ درصد درنظر بگیرید. چرا؟

۱۰ـ۱۱ آزمون فرض نسبت موفقیت در جامعه (p)

فرضیه‌های تحقیق در مدیریت گاهی نسبت‌پذیرند؛ فرضیه‌های مربوط به تحقیقات با مقیاس کیفی با استفاده از آزمون نسبت موفقیت مورد ادعا بررسی می‌شوند. چنانچه یک فرضیه پژوهشی با p بیان شود، می‌توان صحت آن فرضیه را با استفاده از مراحل چهارگانه آزمون فرض بررسی کرد. مراحل آزمون فرض p عبارت‌اند از:

۱. فرضها: فرضیه‌های آماری با توجه به نوع فرضیه پژوهشی در قالب یکی از

این حالتها تبیین می‌شوند:

۱) $\begin{cases} H_0: p \leq p_0 \\ H_1: p > p_0 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} H_0: p \geq p_0 \\ H_1: p < p_0 \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} H_0: p = p_0 \\ H_1: p \neq p_0 \end{cases}$

چنان‌که می‌بینید قاعدهٔ برخوردار بودن H_0 از تساوی در اینجا نیز برقرار است. در این راستا، H_0 ممکن است بیان‌کنندهٔ فرضیه پژوهشی یا نقیض آن باشد.

۲. آمارهٔ آزمون: براساس جدول ۱ـ۱۱ و بحث تخمین، آنچه در توزیع نمونه‌گیری $\bar{p}$ نرمال است، آمارهٔ آزمون به این صورت تعریف می‌شود:

$$Z = \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \qquad (۱۱ـ۱۱)$$

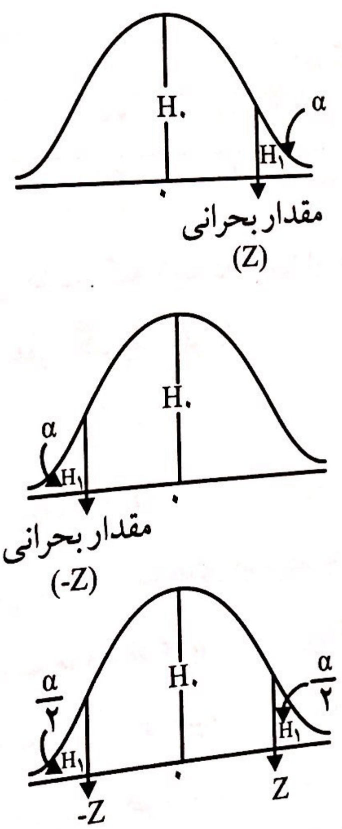
در رابطه فوق p_0 نسبت مورد آزمون و مخرج متغیر Z همان $\sigma_{\bar{p}}$ است.

۳. مقدار بحرانی: سطح زیر منحنی H_0 و H_1 در توزیع نرمال تحت تأثیر فرضیه‌های آماری در مرحله اول است. سطح زیر منحنی بسته به نوع آزمون به

۱) $\begin{cases} H_0: p \leqslant p_0 \\ H_1: p > p_0 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} H_0: p \geqslant p_0 \\ H_1: p < p_0 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} H_0: p = p_0 \\ H_1: p \neq p_0 \end{cases}$



شکل ۸ـ۱۱ تعیین سطح زیرمنحنی H_0 و H_1 برای آزمون نسبت موفقیت جامعه

صورت ذیل بین H_0 و H_1 تقسیم می‌شود. منتها براساس دلایل بیان شده H_0 دربرگیرنده $(1-\alpha)$ ۱۰۰ درصد و H_1 سطحی برابر 100α درصد خواهد داشت. طبیعی است مقدار بحرانی باید از جدول استاندارد Z برحسب مقدار α استخراج شود. علامت مقدار بحرانی به نوع آزمون (یک دنباله راست، یک دنباله چپ و دو دنباله) بستگی دارد. منحنی توضیحات فوق در شکل ۸ـ۱۱ آمده است.

۴. تصمیم گیری: در این مرحله طبق معمول مقدار آمارهٔ آزمون که از رابطه ۱۱ـ۱۱ به دست آمد با مقدار بحرانی مقایسه می‌شود. چنانچه آمارهٔ آزمون در ناحیه H_0 قرار گیرد، گفته می‌شود که شواهد تجربی کافی در سطح اطمینان مورد نظر برای تأیید H_0 وجود دارد، در غیر این صورت فرض H_0 رد می‌شود.

مثال ۸ـ۱۱ فرضیه‌ای به این صورت بیان شده است: «۶۰ درصد مدیران کشور از شیوه S_1 برخوردارند». تحلیل گری برای بررسی فرضیه فوق یک نمونهٔ ۲۰۰ تایی از بین مدیران کشور انتخاب کرده است که نیمی از آنها از شیوه S_1 برخوردارند. در سطح خطای ۵ درصد صحت فرضیهٔ فوق را بررسی کنید.

با توجه به مراحل آزمون فرض p، فرضیه‌های آماری، سطح زیرمنحنی فرضیه‌های آماری، آمارهٔ آزمون و مقدار بحرانی به صورت زیر به دست آمده‌اند:

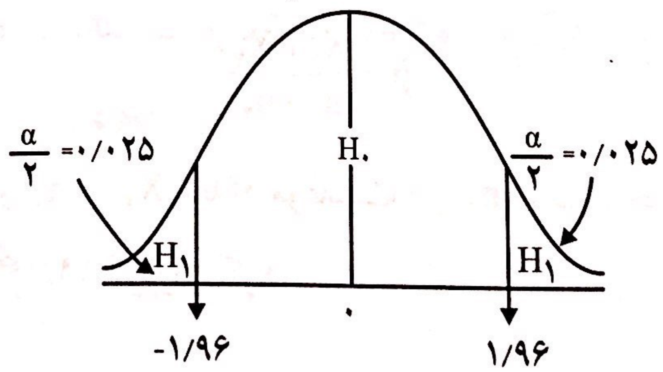
۱. فرضها:

$H_0: p = \%۶۰$ ادعا

$H_1: p \neq \%۶۰$ نقیض ادعا

۲. آمارهٔ آزمون: $Z=\dfrac{۰/۵-۰/۶۰}{\sqrt{\dfrac{۰/۶۰\times۰/۴۰}{۲۰۰}}}=-۲/۸۹$

۳. مقادیر بحرانی: $Z_{\frac{\alpha}{۲}} = Z_{۰/۰۲۵} = \pm۱/۹۶$



۴. تصمیم گیری: آمارهٔ آزمون $Z = -2/89$ در ناحیهٔ چپ H_1 قرار می گیرد؛ بنابراین در سطح خطای ۵ درصد می‌توان گفت که فرضیهٔ پژوهشی پذیرفته نمی‌شود. همچنین قرار گرفتن آمارهٔ آزمون در دنبالهٔ چپ H_1 نشان می‌دهد که نه تنها نسبت مدیران برخوردار از شیوه S_1 مساوی ۶۰ درصد نیست، بلکه کمتر از آن هم هست.

۱۱ـ۱۱ آزمون فرض مقایسهٔ نسبت موفقیت در دو جامعهٔ آماری

اگر فرضیه‌ای پژوهشی در خصوص مقایسهٔ دو جامعهٔ آماری با استفاده از داده‌های کیفی وجود داشته باشد می‌توان به مقایسهٔ آن دو جامعه با استفاده از تفاضل نسبت موفقیت $p_1 - p_2$ پرداخت. صحت چنین فرضیه‌هایی با استفاده از آزمون مقایسهٔ p_1 و p_2 امکان‌پذیر است.

مراحل چهارگانهٔ آزمون مقایسهٔ نسبتها کاملاً شبیه مبحث ۱۰ـ۱۱ است؛ بنابراین از ذکر جزئیات آن خودداری می‌شود. تنها تفاوت در تعریف آمارهٔ آزمون است. آمارهٔ آزمون از نوع Z است که به صورت رابطهٔ ۱۲ـ۱۱ تعریف می‌شود:

$$Z = \frac{(\overline{p}_1 - \overline{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\overline{p}_1(1-\overline{p}_1)}{n_1} + \frac{\overline{p}_2(1-\overline{p}_2)}{n_2}}} \qquad (11\text{-}12)$$

واضح است که فرض H_0 بیان‌کننده $\leq$، $\geq$ یا $=$ است. پس به‌راحتی می‌توان گفت که $p_1 - p_2$ مساوی صفر است؛ بنابراین گاهی در رابطهٔ ۱۲ـ۱۱ عبارت $p_1 - p_2$ قید نمی‌شود و همچنین گاهی مخرج آمارهٔ آزمون براساس $\overline{p}$ مشترک دو نمونه تعریف می‌شود. $\overline{p}$ مشترک عبارت است از:

$$\overline{p} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2} \qquad (11\text{-}13)$$

X_1 تعداد موفقیت در n_1 و X_2 تعداد موفقیت در n_2 است. حال می‌توان رابطهٔ ۱۲ـ۱۱ را به صورت ۱۴ـ۱۱ نیز بیان کرد:

$$Z=\frac{(\overline{p}_1-\overline{p}_2)}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \qquad (11\text{-}14)$$

مثال ۹ـ۱۱ فرضیهٔ یکی از پایان‌نامه‌های مدیریت به این شرح است: «انگیزهٔ توفیق‌طلبی در بین دانشجویان شهرستانی و تهرانی به یک اندازه است». برای بررسی فرضیهٔ فوق از هر گروه، نمونه‌هایی انتخاب شده که خلاصهٔ اطلاعات آنها در جدول ذیل آمده است:

میزان توفیق‌طلبی / گروه دانشجویی	بالا	پایین	مجموع
شهرستانی	۲۰۰	۱۰۰	۳۰۰
تهرانی	۲۵۰	۱۵۰	۴۰۰

در سطح خطای یک درصد صحت فرضیهٔ فوق را بررسی کنید.

مقیاس توفیق‌طلبی یک مقیاس رتبه‌ای است؛ بنابراین یکی از پارامترهای مناسب برای بررسی چنین فرضیه‌ای استفاده از نسبت موفقیت است. چون بحث مقایسهٔ دو جامعهٔ آماری (شهرستانی و تهرانی) مطرح است بنابراین از آزمون مقایسهٔ p_1 و p_2 باید استفاده کرد. فرضیه‌های آماری، منحنی، آمارهٔ آزمون و مقدار بحرانی فرضیهٔ فوق برای رسیدن به یک تصمیم معتبر به این ترتیب بیان می‌شود:

۱. فرضها:

$H_0: p_1=p_2$ ادعا

$H_1: p_1\neq p_2$ نقیض ادعا

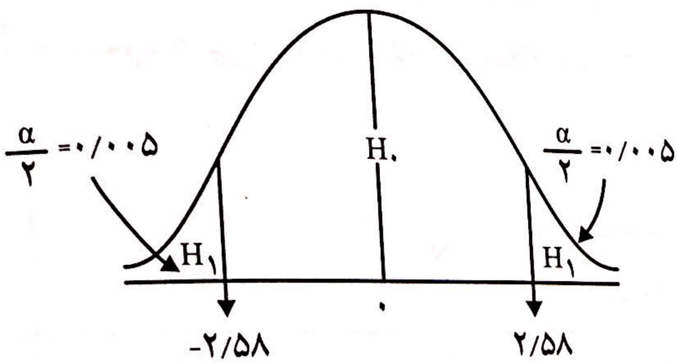
۲. آمارهٔ آزمون: برای محاسبهٔ p_1 و p_1 در رابطه ۱۲ـ۱۱ ما موفقیت را تعداد دانشجویان برخوردار از انگیزهٔ توفیق‌طلبی بالا می‌دانیم؛ بنابراین داریم:

$$\overline{p}_1=\frac{X_1}{n_1}=\frac{200}{300}=0/667$$

$$\overline{p}_2=\frac{X_2}{n_2}=\frac{250}{400}=0/625$$

$$Z=\frac{(۰/۶۶۷-۰/۶۲۵)}{\sqrt{\frac{۰/۶۶۷(۰/۳۳۳)}{۳۰۰}+\frac{۰/۶۲۵(۰/۳۷۵)}{۴۰۰}}}=۱/۱۵۴$$

۳. مقادیر بحرانی: $Z_{\frac{\alpha}{۲}}=Z_{۰/۰۰۵}=\pm ۲/۵۸$



۴. تصمیم‌گیری: مقدار آمارهٔ آزمون ($Z = ۱/۱۵۴$) در ناحیهٔ $H_۰$ قرار می‌گیرد؛ بنابراین فرضیهٔ پژوهشی در سطح اطمینان ۹۹ درصد تأیید می‌شود.

تمرین

۱. ادعا شده است که «سطح آمادگی کارمندان سازمان الف از کارمندان سازمان ب بالاتر است». برای بررسی این ادعا، از بین کارمندان سازمان الف یک نمونهٔ ۱۰۰ تایی انتخاب شده است که ۶۰ نفر از آنها از سطح آمادگی بالا برخوردارند. درحالی که فقط نیمی از یک نمونهٔ تصادفی ۲۰۰ تایی از کارمندان سازمان ب از سطح آمادگی بالا برخوردارند. در سطح خطای ۵ درصد صحت ادعای فوق را آزمون کنید.

۲. ادعا شده است اکثر دانشجویان بر این باورند که وضع بهداشتی خوابگاههای دانشجویی نامناسب است (درصد ناراضیها بیشتر از ۵۰ است). بدین منظور یک نمونهٔ تصادفی ۱۵۰ نفره از بین دانشجویان به‌طور تصادفی انتخاب شده است که ۵۰ نفر از آنها از وضع بهداشت خوابگاهها شکایت داشته‌اند. در سطح خطای ۲ درصد محاسبه کنید آیا می‌توان گفت ادعای فوق درست است؟

۳. در یک تحقیق، هدف مقایسهٔ نظر واردکنندگان و صادرکنندگان کالا در خصوص

مقررات گمرکی است. برای انجام این تحقیق پرسشنامه‌ای طراحی و به نمونه‌هایی از هر دو گروه داده شده است تا به سؤالات پاسخ دهند. ۸۰ نفر از یک نمونهٔ ۱۰۰ تایی صادرکنندگان معتقدند که مقررات گمرکی دست و پاگیر است؛ درحالی که فقط ۷۰ نفر از ۱۰۰ نفر انتخاب شده از بین واردکنندگان چنین اعتقادی دارند. آیا می‌توان در سطح خطای ۵ درصد ادعا کرد که واردکنندگان و صادرکنندگان دربارهٔ مقررات گمرکی هم‌عقیده هستند؟ محاسبات لازم را انجام دهید.

۱۱ـ۱۲ آزمون فرض آماری برای واریانس جامعه

هرگاه فرضیه‌ای دربارهٔ پراکندگی جامعه وجود داشته باشد، صحت یا سقم آن را می‌توان با استفاده از مراحل آزمون فرض به شرح ذیل بررسی کرد:

۱. فرضها: براساس نوع فرضیه پژوهشی، فرضیه‌های آماری یکی از این تعاریف را خواهند داشت:

$$۱)\begin{cases} H_۰: \sigma_x^۲ \le \sigma_۰^۲ \\ H_۱: \sigma_x^۲ > \sigma_۰^۲ \end{cases} \qquad ۲)\begin{cases} H_۰: \sigma_x^۲ \ge \sigma_۰^۲ \\ H_۱: \sigma_x^۲ < \sigma_۰^۲ \end{cases} \qquad ۳)\begin{cases} H_۰: \sigma_x^۲ = \sigma_۰^۲ \\ H_۱: \sigma_x^۲ \ne \sigma_۰^۲ \end{cases}$$

که در حالتهای فوق $\sigma_۰^۲$، واریانس مورد آزمون است.

۲. آمارهٔ آزمون: از بحث تخمین به یاد داریم که آمارهٔ $\sigma_x^۲$، واریانس نمونه $S_x^۲$ است. توزیع نمونه‌گیری $S_x^۲$ درصورتی که از یک جامعهٔ نرمال نمونه انتخاب شده باشد، یک توزیع $\chi^۲$ است که آمارهٔ آزمون آن به این صورت تعریف می‌شود:

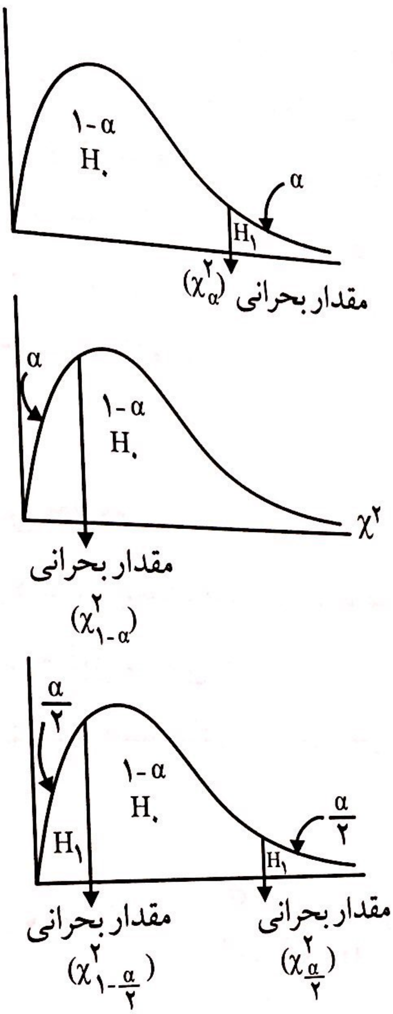
$$\chi^۲ = \frac{(n-۱)S_x^۲}{\sigma_۰^۲} \qquad (۱۱\text{ـ}۱۵)$$

۳. مقدار بحرانی: سطح زیرمنحنی فرضیه‌های آماری برحسب مقدار α روی توزیع $\chi^۲$ مشخص می‌شود. براساس یک قاعدهٔ کلی، $H_۰$ دربرگیرنده سطح اطمینان و $H_۱$ در برگیرندهٔ سطح خطا، α، است. منحنی هر یک از حالتهای مرحلهٔ اول در شکل ۹ـ۱۱ آمده است.

۱) $\begin{cases} H_0: \sigma_x^2 \leq \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma_x^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} H_0: \sigma_x^2 \geq \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma_x^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} H_0: \sigma_x^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma_x^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$



شکل ۹ـ۱۱ سطح زیرمنحنی H_0 و H_1 برای واریانس جامعه

حالت اول نشان‌دهندهٔ آزمون یک‌دنباله راست است که مقدار بحرانی آن براساس α و درجهٔ آزادی، $d.f = n-1$، تعیین می‌شود. حالت دوم آزمون یک‌دنباله چپ است که مقدار بحرانی آن براساس $1-\alpha$ و $d.f = n-1$ از جدول کای ـ مربع استخراج می‌شود و در حالت سوم دو مقدار بحرانی $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$ و $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$ باید از جدول کای ـ مربع استخراج شود؛ چون یک آزمون دو دنباله است.

۴. تصمیم گیری: در این مرحله مقدار آمارهٔ آزمون با مقدار بحرانی مقایسه می‌شود. چنانچه کای ـ مربع محاسبه شده در ناحیهٔ H_0 قرار گیرد، فرض H_0 در سطح اطمینان $\alpha - 1$ درصد پذیرفته می‌شود؛ در غیر این صورت H_0 رد می‌شود. در این تجزیه و تحلیل ممکن است فرضیه پژوهشی تأیید یا رد شود.

مثال ۱۰-۱۱ مدیر عامل بازار بورس تهران ادعا کرده که ریسک (انحراف معیار) بازده سهام شرکتهای عرضه‌کننده سهام در بازار بورس کمتر از ۵ تومان است. بدین منظور یکی از کارگزاران، ۲۵ شرکت را به‌طور تصادفی از بین شرکتهای عرضه‌کننده سهام در بازار بورس انتخاب کرده که مانگین بازده آنها ۱۴ و انحراف معیارشان ۴ تومان است. اگر بازده شرکتهای بازار بورس از توزیع نرمال برخوردار باشد، ادعا را در سطح خطای ۵ درصد آزمون کنید.

براساس مراحل تعریف شده برای آزمون واریانس جامعه، فرضیه‌های آماری و محاسبات لازم برای بررسی ریسک بازده شرکتها عبارت است از:

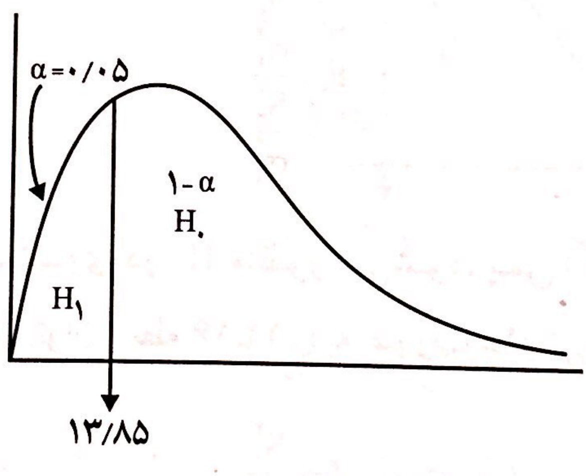
۱. فرضها:

$$H_۰ : \sigma_x^۲ \geq ۲۵$$

$$H_۱ : \sigma_x^۲ < ۲۵$$

۲. آمارهٔ آزمون: $\chi^۲ = \frac{(n-۱)S_x^۲}{\sigma_۰^۲} = \frac{(۲۵-۱)(۴)^۲}{۲۵} = ۱۵/۳۶$

۳. مقدار بحرانی: $\chi^۲_{۰/۹۵, ۲۴} = ۱۳/۸۵$



۴. تصمیم‌گیری: آمارهٔ آزمون $(\chi^۲=۱۵/۳۶)$ در مقایسه با مقدار بحرانی $(\chi^۲=۱۳/۸۵)$ در ناحیه $H_۰$ قرار می‌گیرد؛ بنابراین با ۹۵ درصد اطمینان می‌توان گفت فرض صفر پذیرفته می‌شود. به عبارت دیگر فرضیه پژوهشی رد و نقیض آن پذیرفته می‌شود.

۱۳ـ۱۱ آزمون فرض آماری برای مقایسهٔ واریانس دو جامعه

فرضیه‌های تطبیقی نه تنها شامل میانگین و نسبت موفقیت است، بلکه برای مقایسهٔ واریانس دو جامعهٔ آماری نیز از آن استفاده می‌شود. فرضیه‌ای که به این منظور تدوین شود، به کمک مراحل آزمون مقایسهٔ واریانس دو جامعه بررسی می‌گردد. مراحل آزمون به شرح ذیل است:

۱. فرضها: فرضیه‌های پژوهشی برحسب نوع آنها به صورت یکی از این حالتها تبیین خواهد شد:

$$۱)\begin{cases}H_0 : \sigma_1^2 \le \sigma_2^2\\ H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2\end{cases} \qquad ۲)\begin{cases}H_0 : \sigma_1^2 \ge \sigma_2^2\\ H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2\end{cases} \qquad ۳)\begin{cases}H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2\\ H_1 : \sigma_1^2 \ne \sigma_2^2\end{cases}$$

۲. آمارهٔ آزمون: درصورتی که دو جامعهٔ مورد مقایسه از توزیع نرمال یا تقریب نرمال برخوردار باشند، آمارهٔ آزمون برای نسبت دو واریانس جامعه، $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$، دارای توزیع فیشر است که براساس رابطه ۱۶ـ۱۱ تعریف می‌شود:

$$F=\frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \qquad (۱۱\text{ـ}۱۶)$$

چنان که گفتیم، حالت تساوی در H_0 منظور می‌شود. پس اگر فرض تساوی دو واریانس را بپذیریم، می‌توان رابطه ۱۶ـ۱۱ را به صورت ساده‌تر در رابطهٔ ۱۷ـ۱۱ دید.

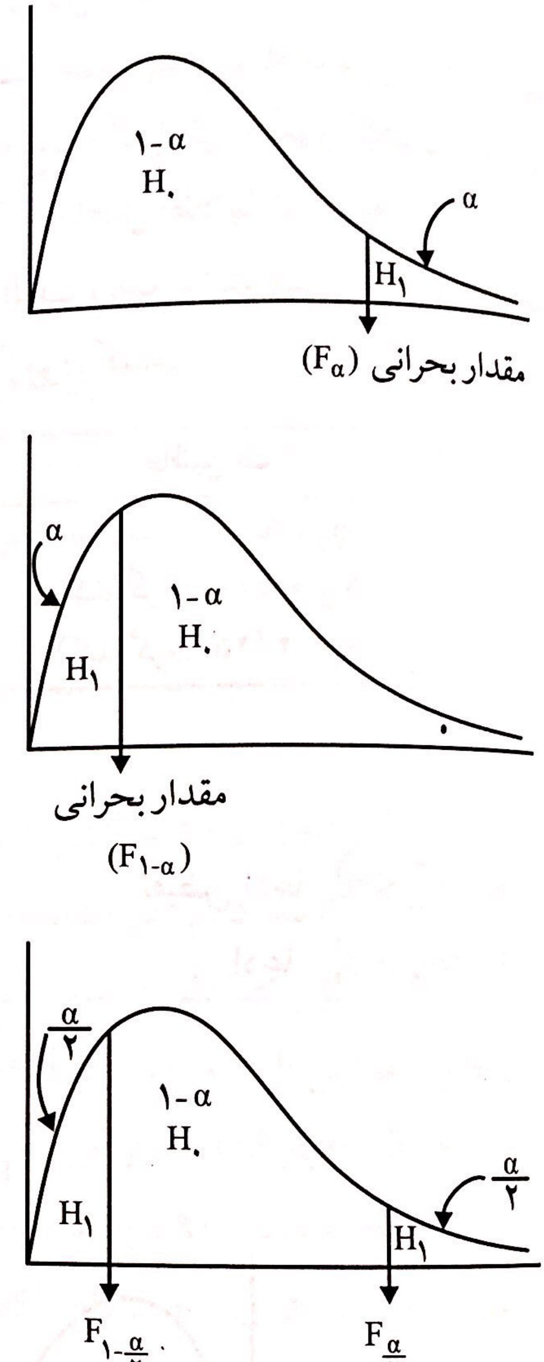
$$F=\frac{S_1^2}{S_1^2} \qquad (۱۱\text{ـ}۱۷)$$

۳. مقدار بحرانی: مقدار بحرانی براساس α و درجهٔ آزادی صورت $(d.f_1 = n_1 - 1)$ و درجهٔ آزادی مخرج $(d.f_2 = n_2 - 1)$، از جدول F با توجه به یکی از این اشکال تعیین می‌شود.

۱) $\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$



شکل ۱۰-۱۱ سطح زیر منحنی H_0 و H_1 برای مقایسه واریانس دو جامعه

مقدار بحرانی $F_{1-\alpha}$ از جدول فیشر براساس این رابطه تعریف می‌شود:

$$F_{(1-\alpha),\, d.f_1,\, d.f_2} = \frac{1}{F_{\alpha,\, d.f_2,\, d.f_1}} \qquad (11\text{-}18)$$

۴. تصمیم گیری: چنانچه آماره آزمون در ناحیهٔ H_0 قرار گیرد، H_0 در سطح اطمینان دلخواه تأیید و در غیر این صورت رد می‌شود.

مثال ۱۱-۱۱ در گزارش مدیریت، این جمله از مأمور کنترل به چشم می‌خورد: «پراکندگی وزن محصولات تولید شده به وسیلهٔ ماشین الف بیشتر از ماشین ب است». مدیر کارخانه به منظور بررسی گزارش مأمور کنترل کیفیت، از ماشین الف و ب نمونه‌هایی انتخاب کرده که حاصل اطلاعات آن به این شرح است. توزیع وزن محصولاتی که به وسیله ماشین الف و ب تولید می‌شوند نرمال است. صحت جمله را در سطح خطای ۵ درصد آزمون کنید.

ماشین الف	ماشین ب
$n_A = ۱۶$	$n_B = ۸$
$\bar{X}_A = ۱۵/۰$ (کیلوگرم)	$\bar{X}_B = ۱۵/۵$ (کیلوگرم)
$S_A = ۴/۵$ (کیلوگرم)	$S_B = ۲/۲۵$ (کیلوگرم)

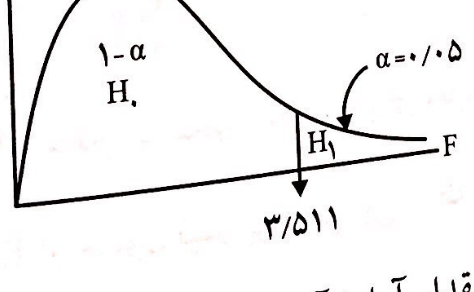
۱. فرضها:

$H_0 : \sigma_A^۲ \le \sigma_B^۲$ نقیض ادعا

$H_1 : \sigma_A^۲ > \sigma_B^۲$ ادعا

۲. آمارهٔ آزمون: $F = \frac{S_A^۲}{S_B^۲} = \frac{(۴/۵)^۲}{(۲/۲۵)^۲} = ۴$

۳. مقدار بحرانی: $F_{./۰۵,۱۵,۷} = ۳/۵۱۱$



۴. تصمیم گیری: مقدار آمارهٔ آزمون در ناحیهٔ H_1 قرار می گیرد؛ یعنی اینکه داده‌ها دلالت کافی بر تأیید H_0 در سطح خطای ۵ درصد ندارند. به‌علاوه، چون H_1 بیان‌کننده ادعاست، پس می‌توان گفت ادعای مأمور کنترل کیفیت در سطح خطای ۵ درصد صحت دارد.

تمرین

۱. هدف یک تحقیق، مقایسهٔ طول عمر دو نوع لامپ است. بدین منظور از لامپهای نوع الف یک نمونهٔ تصادفی ۲۰تایی انتخاب شده که میانگین آن ۱۵ هزار ساعت و انحراف معیارش ۴ هزار ساعت است، درحالی که نمونه تصادفی ۲۵ تایی از لامپهای نوع ب، میانگین ۱۷ هزار ساعت و انحراف معیار ۶/۵ هزار ساعت دارد. با پذیرفتن فرض نرمال بودن طول عمر لامپها در هر دو نوع، آزمونهای ذیل را در سطح خطای ۵ درصد برگزار کنید.

الف) آیا می‌توان پذیرفت که انحراف معیار عمر لامپهای نوع الف مساوی ۵ هزار ساعت است؟

ب) آیا می‌توان پذیرفت که انحراف معیار عمر لامپهای نوع الف کمتر از ب است؟

۲. می‌خواهیم یکنواخت بودن چگالی الیاف نخ جوراب‌بافی تولیدی با دو ماشین ریسندگی را مقایسه کنیم. هر مشاهده‌ای عبارت است از اندازه گرفتن وزن ۱۰۰ متر نخی که به‌طور تصادفی انتخاب شده است. فرض کنید که ۱۲ مشاهدهٔ وزن از محصول ماشین الف و ۱۰ مشاهدهٔ وزن از محصول ماشین ب به دست آمده است. انحراف معیار اندازه‌های وزن برای ماشین الف، ۲/۳ و برای ماشین ب، ۱/۵ است. در سطح اطمینان ۹۰ درصد به این سؤالات پاسخ دهید:

الف) آیا دلیل قوی وجود دارد که تغییرپذیری تولید برای ماشین الف بیشتر از ماشین ب است؟

ب) فاصله اطمینان لازم را برای نسبت انحراف معیارهای دو جامعه بسازید.

۳. فرضیه‌ای به این صورت بیان شده است: انحراف معیار قیمت پودر لباسشویی در فروشگاههای یک شهر دست کم ۱۰ تومان است. برای بررسی این فرضیه، ۳۶ فروشگاه آن شهر به‌طور تصادفی انتخاب شده که میانگین و انحراف معیار قیمت پودر لباسشویی در این فروشگاهها ۱۶۰ و ۹ تومان است، قیمت کالا دارای توزیع نرمال است. در سطح اطمینان ۹۹ درصد آزمون مناسب را برای بررسی فرضیهٔ فوق برگزار کنید و بنویسید تحلیل کاربردی تأیید یا رد فرضیه چیست.

۱۴-۱۱ خلاصه

در این فصل با استفاده از روابط تخمین آماری، درباره چهارچوب و مبانی تبیین فرضیه‌های پژوهشی به کمک فرضیه‌های آماری H_0 و H_1 به تفصیل بحث شد. به‌طور کلی برای تبیین فرضیه پژوهشی از نوع میانگین (μ_x)، مقایسهٔ میانگین دو جامعه $(\mu_1 - \mu_2)$، نسبت موفقیت (p)، مقایسهٔ نسبت موفقیت در دو جامعه $(p_1 - p_2)$، انحراف معیار جامعه (σ_x) و مقایسهٔ واریانس دو جامعه $(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2})$ می‌توان از این مراحل چهارگانه استفاده کرد: مرحله اول، تعریف فرضیه‌های آماری H_0 و H_1؛ مرحله دوم، تعیین توزیع نمونه‌گیری آماره و نوع آمارهٔ آزمون؛ مرحله سوم، تعیین سطح زیر منحنی H_0 و H_1 و محاسبهٔ مقدار بحرانی و مرحله چهارم، تصمیم‌گیری.

از مهم‌ترین نکات در مرحله تصمیم‌گیری، تبدیل تصمیم آماری به تصمیم مدیریتی است. به عبارت ساده‌تر، پس از تأیید یا رد H_0 محقق باید به‌طور صریح تأیید یا رد فرضیهٔ پژوهشی خود را بیان دارد.

۱۵-۱۱ سؤالات و مسائل

سؤالات دو گزینه‌ای

۱. فرضیه آماری، حکمی دربارهٔ جامعه است. ص□ غ□

۲. فرضیه صفر، H_0، همیشه نشان‌دهندهٔ ادعاست. ص□ غ□

۳. فرضیه صفر، H_0، همیشه باید دربرگیرندهٔ تساوی باشد. ص□ غ□

۴. سطح معنی‌دار، همان مقدار خطای نوع اول است. ص□ غ□

۵. خطای نوع دوم عبارت است از احتمال رد H_0 به شرط اینکه H_0 درست باشد. ص□ غ□

۶. تنها راه کاهش خطای نوع اول و دوم افزایش حجم نمونه است. ص□ غ□

۷. اگر $H_0: \mu_x \geq 200$ باشد، آزمون از نوع یک دنبالهٔ راست است. ص□ غ□

۸. توزیع کای - مربع برای آزمون نسبت واریانسها به کار می‌رود. ص□ غ□

الف) ۲۰/۲۵ ب) ۶

ج) ۱۵ د) ۱/۳۵

۲۲. اطلاعات ذیل مربوط به دو شرکت الف و ب است:

شرکت الف	شرکت ب
$n_1=10$	$n_2=15$
$\bar{X}_1=100$	$\bar{X}_2=120$
$S_1=8$	$S_2=10$

با فرض نرمال بودن توزیع X در دو شرکت، مقدار آمارهٔ آزمون برای بررسی فرضیهٔ «تساوی واریانس X در دو شرکت» کدام است؟

الف) ۰/۸۰ ب) ۰/۴۱

ج) ۰/۶۴ د) ۰/۵۳

۲۳. اگر $F_{0/05,5,9}=3/4817$ باشد، مقدار $F_{0/95,9,5}$ کدام است؟

الف) ۰/۲۸۷۲ ب) ۳/۴۸۱۷

ج) ۳/۳۰۷۶ د) باید جدول F در دسترس قرار گیرد.

۲۴. اگر $n_1=120$، $n_2=100$، $\overline{P}_1=0/60$ و $\overline{P}_2=0/50$ باشد، مقدار آمارهٔ آزمون برای آزمون فرض $H_0: P_1 \le P_2$ کدام است؟

الف) ۲/۵۷۵ ب) ۱/۴۹۱

ج) ۱/۳۴۷- د) ۲۰۰۷۱-

مسائل

۲۵. در تعریف مدیر موفق کسی است که «عملکرد کارمندان در زمان مدیریت وی بیشتر از زمان غیبت اوست». برای بررسی تعریف فوق میزان عملکرد ۶ کارمند در زمان مدیریت و غیبت مدیر اندازه‌گیری شده که در این جدول آمده است:

فرد	۱	۲	۳	۴	۵	۶
عملکرد در زمان مدیریت مدیر	۵۰	۵۵	۶۰	۵۸	۷۰	۷۵
عملکرد در زمان غیبت مدیر	۴۵	۴۷	۵۵	۶۰	۵۰	۶۲

الف) با فرض نرمال بودن امتیازات عملکرد، صحت تعریف را در سطح خطای ۵ درصد آزمون کنید.

ب) فرض کنید نمونهٔ بالا یک نمونهٔ مقدماتی است و دقت برآورد ۴± نمره باشد. حجم نمونه لازم را برای بررسی نهایی تحقیق و تعیین کنید.

۲۶. در نظریه‌های مدیریت بیان شده که مهم‌ترین انگیزه «پول» است. یکی از دانشجویان مدیریت میزان رضایت شغلی ۷ کارمند را قبل از افزایش حقوق ماهانه و بعد از آن اندازه‌گیری و در این جدول خلاصه کرده است:

کارمند	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
قبل از افزایش	۵۰	۷۰	۸۰	۶۰	۵۵	۵۰	۶۸
بعد از افزایش	۶۰	۷۵	۸۰	۷۰	۶۵	۶۲	۷۰

الف) فرض نرمال بودن میزان انگیزه را پذیرفته، صحت ادعا را در سطح خطای یک درصد آزمون کنید.

ب) اگر این نمونه، یک نمونهٔ مقدماتی باشد، حجم نمونهٔ مناسب را با دقت ۲± نمره تعیین کنید.

۲۷. مدیر نمایشگاه بین‌المللی کتاب ادعا کرده که میانگین زمان بازدیدکننده‌گان غرفهٔ خارجی کتاب دست کم ۵ ساعت است. بدین منظور از میان بازدیدکننده‌گان این غرفه یک نمونهٔ ۶۰ نفره انتخاب شده که میانگین و انحراف معیار زمان بازدید آنها به ترتیب ۴ و ۱/۵ ساعت بوده است. صحت ادعا را در سطح خطای ۲ درصد بررسی کنید.

۲۸. مدیر نمایشگاه از بازدیدکننده‌گان غرفهٔ داخلی یک نمونهٔ تصادفی ۴۵ نفره انتخاب کرده است که مستقل از نمونهٔ مسئله ۲۷ هستند. میانگین و انحراف معیار زمان بازدید این نمونه نیز به ترتیب ۵/۵ و ۱/۷۵ ساعت است. در سطح خطای ۲

درصد صحت این فرضیه را آزمون کنید: «میانگین زمان بازدید از غرفه داخلی بیشتر از غرفه خارجی است».

۲۹. فرضیه‌ای به این صورت بیان شده است: «میانگین پرداخت به مدیران در سازمانهای خصوصی کمتر از سازمانهای دولتی است». تحلیل گری برای بررسی فرضیه فوق از هر گروه نمونه‌هایی انتخاب کرده که خلاصهٔ محاسبات اولیه در این جدول آمده است (داده‌ها برحسب هزار تومان):

سازمان دولتی	سازمان خصوصی
$n_۲ = ۲۵$	$n_۱ = ۲۰$
$\bar{X}_۲ = ۱۰۰$	$\bar{X}_۱ = ۹۵$
$S_۲ = ۸$	$S_۱ = ۱۰$

توزیع دستمزد در هر دو گروه نرمال است. صحت فرضیه را در سطح اطمینان ۹۹ درصد آزمون کنید.

۳۰. استاندارد یک دستگاه، برش محصولاتی با میانگین طول ۶۰ سانتی‌متر است. به منظور بررسی کیفیت دستگاه برش، نمونه‌ای ۴۰ تایی از تولیدات انتخاب شده که میانگین طول آنها ۵۲ و انحراف معیارشان ۱۵ سانتی‌متر است. در سطح خطای یک درصد آزمون مناسب را برگزار کنید.

۳۱. یک دانشجوی کارشناسی ارشد حسابداری فرضیه‌ای به این صورت ارائه کرده است: «در اکثر شرکتهای دولتی، استانداردهای حسابداری به خوبی رعایت می‌شوند». دانشجوی فوق برای بررسی فرضیهٔ خود حسابهای ۱۰۰ شرکت دولتی را به‌طور تصادفی نقد و بررسی کرد که مشخص شد ۵۵ شرکت از آنها استانداردهای حسابداری را به درستی رعایت کرده‌اند. در سطح خطای یک درصد با استفاده از اطلاعات نمونه، دانشجو را در آزمون فرضیه یاری دهید.

۳۲. دانشجوی مسئله ۳۱، فرضیهٔ دیگری هم به این شرح بیان کرد: «شرکتهای دولتی در مقایسه با شرکتهای خصوصی تقید بیشتری برای رعایت استانداردهای حسابداری دارند». برای بررسی این فرضیه، دانشجو علاوه بر نمونهٔ شرکتهای

دولتی در مسئله ۳۱، یک نمونهٔ تصادفی ۱۵۰تایی از شرکتهای خصوصی را انتخاب و حسابهای آنها را حسابرسی کرده است. از این نمونه، ۶۵ شرکت استانداردهای حسابداری را به خوبی رعایت کرده‌اند. صحت ادعا را در سطح خطای یک درصد آزمون کنید.

۳۳. برای مقایسهٔ نرخ بازده چهار گروه از صنایع از هر کدام از آنها نمونه‌هایی به این شرح انتخاب شده است:

صنعت	تعداد نمونه	میانگین نرخ بازده سالانه	انحراف معیار (ریسک) نرخ بازده سالانه
نساجی (A)	۵۰	۱۰/۵۷	۱۹/۰۵
سلولزی (B)	۳۵	۴/۳۸	۵/۵۲
شیمیایی (C)	۳۰	۳/۴۷	۳/۸۷
دارویی (D)	۳۵	۲/۵۱	۸/۷۶

الف) آزمون مناسب را برای $H_0: \sigma_A^2 = ۲۲۵$ برگزار کنید ($\alpha = ۰/۰۱$).

ب) آزمون مناسب را برای $H_0: \mu_B \geq \mu_C$ برگزار کنید ($\alpha = ۰/۰۱$).

ج) آزمون مناسب را برای $H_0: \sigma_B^2 \geq \sigma_D^2$ برگزار کنید ($\alpha = ۰/۰۵$).

۳۴. آزمایشی دربارهٔ زمان تشخیص محصول برحسب استقرار آگهی تبلیغات روی ۱۶ نفر به‌طور تصادفی انجام گرفته و نتایج حاصل برحسب ثانیه در این جدول آمده است (توجه هشت نفر اول استقرار نوع اول و هشت نفر بقیه استقرار نوع دوم را مشاهده کردند):

استقرار نوع اول	۲	۳	۱	۲	۱	۲	۳	۱
استقرار نوع دوم	۳	۳	۲	۱	۳	۳	۲	۴

زمان تشخیص از توزیع نرمال برخوردار است. آیا می‌توان گفت بین زمان تشخیص برحسب نوع استقرار اختلاف معنی‌دار وجود دارد. چرا؟ سطح معنی‌دار $\alpha = ۰/۰۵$ است.

۳۵. آزمایشی دربارهٔ زمان تشخیص محصول برحسب استقرار آگهی روی ۸ نفر که

به‌طور تصادفی انتخاب شده‌اند انجام گرفته است. زمان تشخیص محصول برحسب ثانیه برای هر فرد در وضعیت استقرار نوع اول و نوع دوم در جدول ذیل آمده است (هر فرد تحت آزمایش هر دو استقرار قرار گرفته است).

شخص آزمون‌شونده	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
استقرار نوع اول	۳	۱	۱	۲	۱	۲	۳	۱
استقرار نوع دوم	۴	۲	۳	۱	۲	۳	۳	۳

آیا می‌توان گفت نوع استقرار بر زمان تشخیص محصول مؤثر است؟ فرض نرمال بودن زمان تشخیص را پذیرفته و $\alpha = ۰/۰۲$ را در نظر بگیرید.

۳۶. ملاکهای متعددی برای انتخاب بهترین عرضه‌کنندهٔ مواد اولیه کارخانه وجود دارد؛ از جمله پایین بودن میانگین زمان تحویل و پایین بودن پراکندگی زمان تحویل (ریسک در تحویل). در حال حاضر مواد اولیه کارخانه به وسیلهٔ سه عرضه‌کنندهٔ الف، ب و ج تأمین می‌شود. ۸ سفارش گذشته مواد اولیه به عنوان نمونه‌ای تصادفی از کل سفارشها قابل استفاده‌اند. اطلاعات مربوط به این سفارشها در جدول ذیل خلاصه شده است.

عرضه‌کننده	الف	ب	ج
n_i	۸	۸	۸
$\bar{X}_i$ (روز)	۲۰	۲۵	۱۵
S_i (روز)	۷	۵	۱۰

توزیع زمان تحویل برای سفارشها در هر سه عرضه‌کننده نرمال است. سطح اطمینان ۹۰ درصد را در نظر گرفته و سپس به سؤالات آن پاسخ لازم بدهید.

الف) آیا می‌توان گفت عرضه‌کنندهٔ الف میانگین زمان تحویل کمتری از عرضه‌کنندهٔ ب دارد؟ آزمون مناسب را برگزار کنید.

ب) اگر ملاک انتخاب عرضه‌کننده «پراکندگی زمان تحویل» باشد، از بین دو عرضه‌کنندهٔ الف و ج کدام یک را انتخاب خواهید کرد؟ چرا؟

ج) آیا می‌توان گفت پراکندگی زمان تحویل کل سفارشهای عرضه‌کنندهٔ ب ۷ روز است؟

د) آیا می‌توان گفت میانگین زمان تحویل کل سفارشهای عرضه‌کنندهٔ ج ۲۰ روز است؟

ه) فرض کنید نمونهٔ تعیین شده برای بررسی یک نمونهٔ مقدماتی است. فرض تساوی واریانس زمان تحویل سفارشها را در هر سه عرضه‌کننده بپذیرید و با درنظرگرفتن دقت ۵± روز، نمونه مناسب را تعیین کنید.

راهنمایی: مقدار واریانس برای محاسبهٔ n عبارت است از:

$$S_p^{۲}=\frac{(n_۱-۱)S_۱^{۲}+(n_۲-۱)S_۲^{۲}+(n_۳-۱)S_۳^{۲}}{n_۱+n_۲+n_۳-۳}$$

۳۷. انحراف معیار میزان برق مصرفی منطقه چهار تهران ۲۰۰ تومان است. نمونه‌ای به حجم ۱۶ خانواده انتخاب شده که میانگین آن ۹۱۰ تومان است. احتمال اینکه انحراف معیار نمونه کمتر از ۲۴۵ تومان باشد، چقدر است؟

۳۸. به منظور بررسی میزان تأثیر یک دوره کوتاه‌مدت حسابداری، دوره‌ای برای یک نمونهٔ تصادفی شش نفره برگزار شده و نمره‌های دانشجویان قبل و بعد از دوره در این جدول آمده است:

نمرهٔ قبل از دوره	۴۰	۷۰	۴۵	۵۰	۶۸	۵۵
نمرهٔ بعد از دوره	۴۵	۷۲	۵۶	۵۰	۷۴	۶۳

الف) آیا می‌توان گفت که برگزاری دوره مفید است؟ با ذکر فرضیات، آزمون مناسبی در سطح خطای یک درصد برگزار کنید.

ب) فرض کنید نمونهٔ فوق یک نمونهٔ مقدماتی است. دقت برآورد را ۲ نمره در نظر بگیرید و نمونه مناسب را برآورد کنید $\alpha=۰/۰۱$.

۳۹. برای برآورد حجم نمونه در یک جامعهٔ نرمال، یک محقق عرض برآورد میانگین را ۱۰ در نظر گرفته است. او معتقد است که حداقل و حداکثر مقداری که X می‌تواند در جامعهٔ آماری به خود اختصاص دهد به ترتیب ۲۰ و ۱۲۰

واحد است. حجم نمونه را در سطح اطمینان ۹۹ درصد برآورد کنید. آیا حجم نمونه تعیین شده بهینه است؟ چرا؟

۴۰. یک دستگاه خودکار باید پیستونهایی به قطر ۲۵ میلی‌متر تولید کند. فرض کنید قطر پیستونها توزیع نرمال دارد. برای کنترل دقت کار دستگاه، نمونه‌ای ۱۶ تایی از پیستونها به‌طور تصادفی انتخاب شده که میانگین قطر پیستونها در آن برابر ۲۴/۹۸ میلی‌متر با انحراف معیار ۰/۰۲ میلی‌متر است. آیا در سطح معنی‌دار یک درصد می‌توان ادعا کرد که دستگاه مطابق استاندارد کار می‌کند؟ رابطهٔ آزمون فرض و تخمین فاصله برای این ادعا و نتایج را تحلیل کنید.

پاسخ‌نامهٔ سؤالات

۱) ص	۲) غ	۳) ص	۴) ص
۵) غ	۶) ص	۷) غ	۸) غ
۹) ص	۱۰) غ	۱۱) ب	۱۲) ب
۱۳) الف	۱۴) ج	۱۵) ج	۱۶) الف
۱۷) ب	۱۸) د	۱۹) د	۲۰) ج
۲۱) الف	۲۲) ج	۲۳) الف	۲۴) ب

فصل دوازدهم

تحلیل واریانس

۱ـ۱۲ مقدمه

در فصل قبل دربارهٔ تفاوتهای مشاهده شده بین دو میانگین نمونه‌ای بحث کردیم. در این فصل به بررسی و تحلیل تفاوت بین بیش از دو میانگین نمونه‌ای می‌پردازیم. معمولاً به جای اینکه چندین امتحان مقایسه را دو به دو انجام دهند، هم از نظر زمان و هم از نظر هزینه به صرفه‌تر است که به‌طور هم‌زمان میانگینها را با هم مقایسه کنند. در این فصل می‌خواهیم بررسی کنیم آیا بین میانگینهای نمونه‌ای که از جامعه‌های مختلف گرفتیم تفاوتهای واقعی وجود دارد و یا آن مقدار تفاوت قابل اغماض بوده و می‌توان آن را معلول تصادف دانست. برای مثال می‌خواهیم بر مبنای اطلاعات نمونه‌ای قضاوت کنیم آیا بین کارایی سه روش تدریس ریاضی تفاوت معنی‌داری هست یا خیر. ممکن است بخواهیم ببینیم آیا بین میزان محصول ناشی از چهار نوع بذر گندم تفاوت چشم‌گیری وجود دارد یا خیر و یا ممکن است هدف ما مقایسه تفاوت تأثیر سه نوع آگهی در جذب مشتریان بالقوه باشد. روشی که ما برای این منظور استفاده خواهیم کرد ابزار قدرتمند آماری‌ای است که «تحلیل واریانس»[۱] نامیده می‌شود.

نکته کلیدی در تحلیل واریانس این است که هر چقدر عاملی تأثیر بیشتری داشته باشد، واریانسی که ایجاد می‌کند بیشتر خواهد بود.