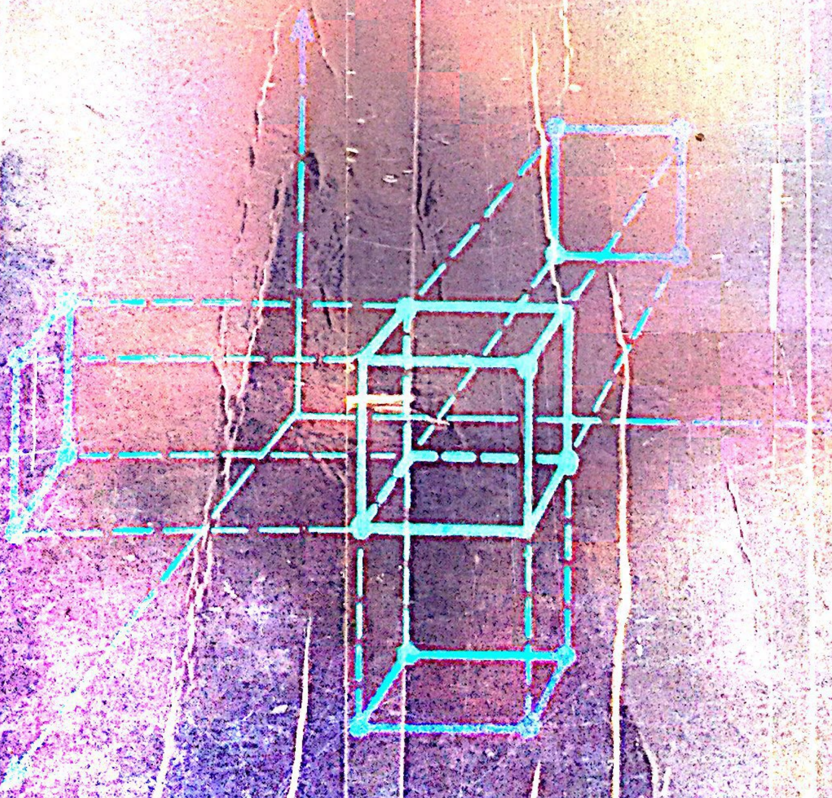
طرح و تحلیل آزمایشها

داگلاس سی. مونتگمری



ترجمهٔ غلامحسین شاهکار

بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم

فهرست

عنوان	صفحه

عنوان صفحه

عنوان

عنوان | صفحه

عنوان	صفحه

عنوان	صفحه

۷

مبانی طرحهای عاملی

۱.۷ اصول و تعاریف پایه‌ای

بسیاری از آزمایشها شامل مطالعهٔ اثرهای دو یا بیشتر از دو عامل‌اند. به‌طور کلی برای این نوع آزمایشها طرحهای عاملی کاراترین‌اند. منظور از یک طرح عاملی آن‌است که در هر امتحان کامل یا تکرار آزمایش تمام ترکیبهای ممکن سطوح عاملها بررسی شوند. مثلاً، اگر a سطح برای عامل A، و b سطح برای عامل B وجود داشته باشند، آن‌گاه هر تکرار شامل تمامی ab ترکیبهای تیماری باشد. وقتی عاملها در طرح عاملی منظور شوند اغلب می‌گویند که تقاطعی‌اند.

بنابه تعریف اثر یک عامل برابر تغییر در پاسخ حاصل به‌وسیلهٔ تعویض سطح آن عامل است. این اثر را اغلب اثر اصلی می‌نامند، زیرا که به‌عاملهای اصلی موردنظر در آزمایش مربوط می‌شود. مثلاً، داده‌های جدول ۱.۷ را در نظر بگیرید. اثر اصلی عامل A را می‌توان به‌صورت تفاوت بین متوسط پاسخ در اولین سطح A و متوسط پاسخ در دومین سطح A تصور کرد. به‌عبارت عددی

$A = \bar{y}_{A^+} - \bar{y}_{A^-}$

$$A = \frac{۴۰ + ۵۲}{۲} - \frac{۲۰ + ۳۰}{۲} = ۲۱$$

یعنی، افزایش عامل A از سطح ۱ به سطح ۲ موجب افزایش متوسط پاسخ به‌اندازهٔ ۲۱ واحد

جدول ۱.۷ یک آزمایش عاملی

		عامل B	
		B_1	B_2
عامل A	A_1	۲۰	۳۰
	A_2	۴۰	۵۲

شده است. همچنین اثر اصلی B عبارت است از

$$B = \frac{۳۰ + ۵۲}{۲} - \frac{۲۰ + ۴۰}{۲} = ۱۱$$

اگر عاملها در بیش از دو سطح ظاهر شوند، شیوهٔ بالا را باید اصلاح کرد، زیرا راههای زیادی در بیان تفاوتهای بین متوسطهای پاسخ وجود دارد. از این موضوع بعداً به‌صورت کاملتری بحث خواهیم کرد.

ممکن است در بعضی آزمایشها متوجه شویم که تفاوت پاسخ بین سطوح یک عامل در تمام سطوح عوامل دیگر یکسان نیست. در چنین مواردی بین عاملها اثر متقابل وجود دارد. مثلاً داده‌های جدول ۲.۷ را در نظر بگیرید. در اولین سطح عامل B، اثر A

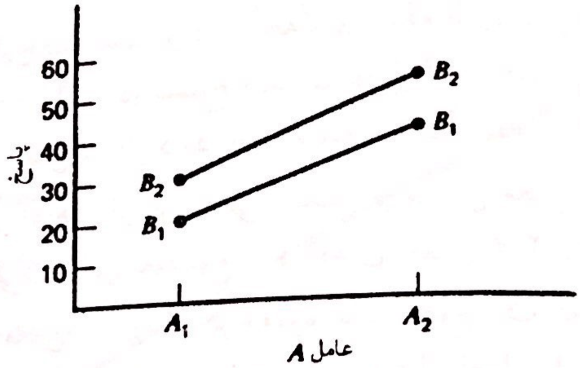
$$A = ۵۰ - ۲۰ = ۳۰$$

و در دومین سطح عامل B، اثر A

$$A = ۱۲ - ۴۰ = -۲۸$$

جدول ۲.۷ یک آزمایش عاملی با اثر متقابل

		عامل B	
		B_1	B_2
عامل A	A_1	۲۰	۴۰
	A_2	۵۰	۱۲



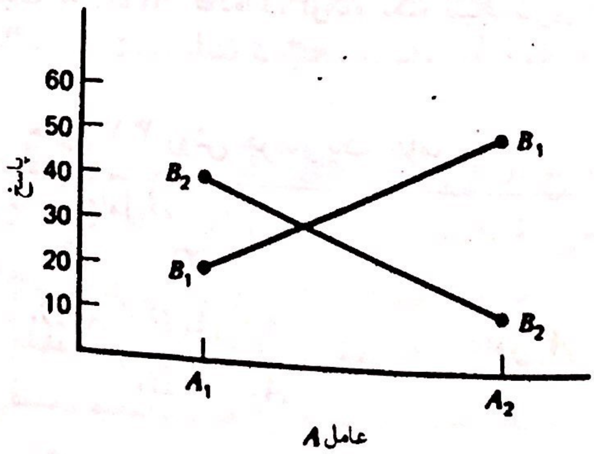
شکل ۱.۷ یک آزمایش عاملی بدون اثر متقابل.

است. چون اثر A به سطحی که برای عامل B انتخاب شده است بستگی دارد، ملاحظه می‌کنیم که میان A و B اثر متقابل وجود دارد.

این مفاهیم را می‌شود به‌صورت نموداری شرح داد. شکل ۱.۷ نمودار داده‌های پاسخ در جدول ۱.۷ نسبت به‌عامل A برای هر دو سطح عامل B است. توجه کنید که خطوط $B_۱$ و $B_۲$ تقریباً موازی‌اند، که دلالت بر عدم وجود اثر متقابل بین عوامل A و B می‌کند. همچنین، شکل۲.۷ نمودار داده‌های پاسخ در جدول ۲.۷ است. در اینجا ملاحظه می‌شود که خطوط $B_۱$ و $B_۲$ موازی نیستند. این نشانه‌ای از وجود اثر متقابل بین عوامل A و B است. نمودارهایی نظیر اینها اغلب در تعبیر اثرهای متقابل معنی‌دار و در گزارش نتایج به‌اشخاص غیر آماری بسیار مفیدند. اما به‌صورت یک تکنیک مجرد تحلیل داده‌ها مورد استفاده قرار نخواهند گرفت، زیرا که تعبیر آنها ذهنی و نمودشان اغلب گمراه کننده است.

توجه کنید که وقتی که اثر متقابل بزرگ است، اثرهای اصلی متناظر آنها معنی عملی کمی دارند. برای داده‌های جدول ۲.۷، اثر اصلی A را

$$A = \frac{۵۰ + ۱۲}{۲} - \frac{۲۰ + ۴۰}{۲} = ۱$$



شکل ۲.۷ یک آزمایش عاملی با اثر متقابل.

برآورد می‌کنیم که بسیار کوچک است، و در نتیجه‌گیری اینکه اثری مربوط به A وجود ندارد اغوا می‌شویم. اما، وقتی‌که اثرهای A را در سطوح متفاوت عامل B امتحان می‌کنیم، می‌بینیم که چنین نتیجه‌گیری موجه نیست. عامل A اثر دارد، اما وابسته به سطح عامل B است. یعنی، آگاهی از اثر متقابل AB مفیدتر از آگاهی از اثر اصلی است. اثر متقابل معنی‌دار معمولاً معنی‌دار بودن اثرهای اصلی را پنهان می‌کند. این به‌وضوح با داده‌های جدول ۲.۷ نشان داده شده است. در صورت وجود اثر متقابل معنی‌دار، آزمایشگر معمولاً باید سطوح یک عامل مثلاً A را با سطوح عوامل تثبیت شدهٔ دیگر به‌منظور استخراج نتایجی در مورد اثر اصلی A امتحان کند.

۲.۷ مزیت طرحهای عاملی

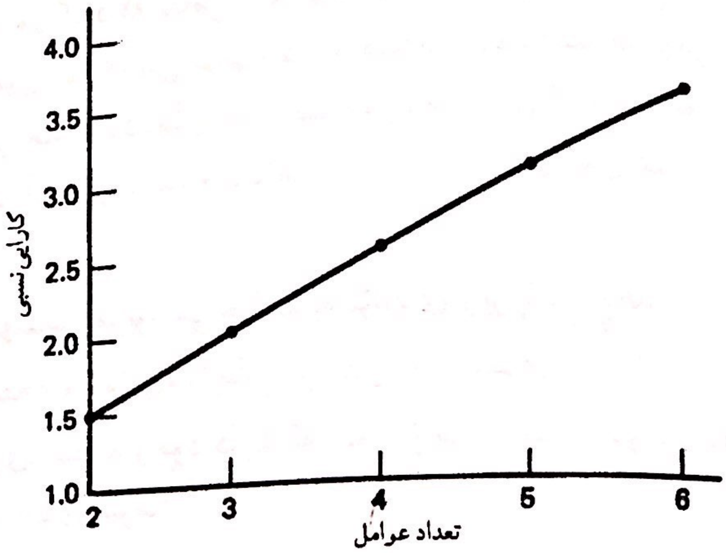
مزیت طرحهای عاملی را می‌توان به‌سادگی توضیح داد. گیریم دو عامل A و B داریم که هر یک دارای دو سطح‌اند. سطوح عاملها را با A_1، A_2، B_1 و B_2 نشان می‌دهیم. اطلاع مربوط به هر دو عامل را می‌توان با تغییر آنها هر بار یک عامل همان‌طور که در جدول ۳.۷ نشان داده‌ایم به‌دست آورد. اثر تغییر عامل A با $A_2B_1 - A_1B_1$ داده می‌شود. چون خطای آزمایشی وجود دارد مطلوب در نظر گرفتن مثلاً دو مشاهده در هر ترکیب تیمار و برآورد اثر عاملها با استفاده از متوسطهای پاسخ است. پس جمعاً به شش مشاهده نیاز داریم.

اگر آزمایش عاملی انجام شده باشد، ترکیب تیمار دیگر A_2B_2 را نیز در اختیار داریم. حال با استفاده از درست چهار مشاهده می‌توان دو برآورد برای اثر A به‌دست آورد: $A_2B_1 - A_1B_1$ و $A_2B_2 - A_1B_2$. همچنین می‌توان دو برآورد اثر B را به‌دست آورد. این دو برآورد اثر اصلی را می‌توان برای به‌دست آوردن یک متوسط اثر اصلی که درست به‌همان دقت برآورد آزمایش تک‌عاملی است در هم ادغام کرد، اما تنها جمعاً چهار مشاهده لازم می‌شود که می‌گوییم کارایی نسبی طرح عاملی نسبت به‌آزمایش هر بار یک عامل برابر است با $\frac{6}{4} = 1{,}5$. به‌طور کلی، این کارایی نسبی همچنان‌که در شکل ۳.۷ نشان داده‌ایم با افزایش تعداد عوامل افزایش خواهد یافت.

حال گیریم اثر متقابل وجود داشته باشد. اگر طرح هر بار یک عامل نشان دهد که A_1B_2 و A_2B_1 پاسخ بهتری نسبت به A_1B_1 داده‌اند، آن‌گاه یک نتیجه‌گیری منطقی آن خواهد بود که

جدول ۳.۷ روش هر بار یک عامل

		عامل B	
		B_1	B_2
عامل A	A_1	A_1B_1	A_1B_2
	A_2	A_2B_1	



شکل ۳.۷ کارایی نسبی طرح عاملی نسبت به‌آزمایش هربار یک عامل (با دو سطح عامل).

حتی A_2B_2 می‌تواند بهتر باشد. اما، اگر اثر متقابل وجود داشته باشد، این نتیجه‌گیری می‌تواند جداً خطا باشد. مثلاً به‌داده‌های جدول ۲.۷ رجوع کنید.

به‌اختصار متذکر می‌شویم که طرحهای عاملی چندین مزیت دارند. آنها نسبت به‌آزمایشهای هر بار یک عامل کاراترند. به‌علاوه، وقتی اثرهای متقابل می‌توانند وجود داشته باشند، به‌منظور اجتناب از نتایج گمراه کننده، طرح عاملی لازم است. بالاخره در طرحهای عاملی برآورد کردن اثرهای یک عامل در چندین سطح عاملهای دیگر مقدور است، که نتایج حاصل در دامنهٔ شرایط آزمایشی معتبرند.

۳.۷ طرحهای عاملی با دو عامل

۱.۳.۷ مثال

ساده‌ترین انواع طرحهای عاملی شامل تنها دو عامل یا دو مجموعه تیمار است. a سطح برای عامل A و b سطح برای عامل B وجود دارند، و اینها در یک طرح عاملی قرار می‌گیرند؛ یعنی، هر تکرار آزمایش شامل کلیهٔ ab ترکیب مختلف تیمار است. در حالت کلی n تکرار وجود دارند.

به‌عنوان مثالی از یک طرح عاملی با دو عامل، گیریم مهندسی باطریی را برای استفاده در دستگاهی که دستخوش برخی تغییرات فرین دماست طرح کرده باشد. تنها پارامتر طرح که وی می‌تواند در این مرحله انتخاب کند مواد صفحهٔ باطری است، و او سه انتخاب ممکن دارد. وقتی باطری ساخته و به‌محل نصب ارسال شود، مهندس هیچ‌گونه کنترلی روی دمایی که باطری با آن مواجه خواهد شد ندارد، و او بنابر تجربیات گذشته می‌داند که احتمالاً دما در طول عمر باطری مؤثر است. اما، در آزمایشگاه می‌تواند به‌منظور آزمون دما را کنترل کند.

مهندس تصمیم می‌گیرد که تمامی سه مواد صفحه را در سه سطح با دماهای °۱۵، °۷۰، و °۱۲۵ فاز نهایت آزمون کند، که این سطوح دما با دمای محیط استفادهٔ نهایی از محصول سازگارند. چهار باطری را در هر یک از ترکیبهای مواد صفحه و دما آزمون کرده‌اند و تمامی ۳۶ آزمون به‌ترتیب تصادفی اجرا شده‌اند. آزمایش و نتایج مشاهده شده از داده‌های طول عمر باطری را در جدول ۴.۷ آورده‌ایم.

در این مسأله مهندس مزبور می‌خواهد به‌سؤالهای زیر پاسخ دهد.

۱. نوع مواد صفحه و دما چه اثرهایی بر طول عمر باطری دارند؟

۲. آیا موادی برای صفحه وجود دارند که بدون توجه به‌دما به صورتی یکنواخت موجب طول عمر طولانیتری برای باطری شوند؟

سؤال دوم خصوصاً مهم است. ممکن است بتوان مواد دیگری را پیدا کرد که زیاد تحت تأثیر دما نباشند. اگر چنین موادی پیدا شوند، مهندس می‌تواند باطریی بسازد که در تغییرات دمای محل کار نیرومند باشد. این مثالی است از استفاده طرح آزمایش آماری برای نیرومند کردن طرح محصول که در مهندسی مسأله‌ای بسیار مهم است.

این طرح مثالی خاص از حالت کلی طرحهای دو عاملی است. برای رسیدن به‌حالت کلی، گیریم y_{ijk} پاسخ مشاهده شده برای kامین تکرار $(k = ۱, ۲, \dots, n)$ باشد وقتی عامل A در سطح $i(i = ۱, ۲, \dots, a)$، و عامل B در سطح $j(j = ۱, ۲, \dots, b)$ است. به‌طور کلی داده‌های مشاهده شده به‌صورت جدول ۵.۷ خواهند بود. ترتیب انتخاب abn مشاهده، تصادفی است، به‌طوری که این طرح یک طرح کاملاً تصادفی شده است.

جدول ۴.۷ داده‌های طول عمر (برحسب ساعت) برای مثال طرح باطری.

	درجهٔ حرارت (درجهٔ فار نهایت)					
نوع مواد	۱۵		۷۰		۱۲۵	
۱	۱۳۰	۱۵۵	۳۴	۴۰	۲۰	۷۰
	۷۴	۱۸۰	۸۰	۷۵	۸۲	۵۸
۲	۱۵۰	۱۸۸	۱۲۶	۱۲۲	۲۵	۷۰
	۱۵۹	۱۲۶	۱۰۶	۱۱۵	۵۸	۴۵
۳	۱۳۸	۱۱۰	۱۷۴	۱۲۰	۹۶	۱۰۴
	۱۶۸	۱۶۰	۱۵۰	۱۳۹	۸۲	۶۰

جدول ۵.۷ آرایش کلی داده‌ها برای طرح دو عاملی

		عامل B			
		۱	۲	$\cdots$	b
عامل A	۱	$y_{111}, y_{112}, \cdots, y_{11n}$	$y_{121}, y_{122}, \cdots, y_{12n}$		$y_{1b1}, y_{1b2}, \cdots, y_{1bn}$
	۲	$y_{211}, y_{212}, \cdots, y_{21n}$	$y_{221}, y_{222}, \cdots, y_{22n}$		$y_{2b1}, y_{2b2}, \cdots, y_{2bn}$
	$\vdots$				
	a	$y_{a11}, y_{a12}, \cdots, y_{a1n}$	$y_{a21}, y_{a22}, \cdots, y_{a2n}$		$y_{ab1}, y_{ab2}, \cdots, y_{abn}$

مشاهدات را می‌توان با مدل خطی آماری

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk} \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, a \\ j = 1, 2, \ldots, b \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \qquad (۱.۷)$$

توصیف کرد، که در آن μ میانگین کل اثر، τ_i اثر سطح iام عامل سطر؛ A، B_j اثر سطح jام عامل ستون؛ B، $(\tau\beta)_{ij}$ اثر متقابل میان τ_i و β_j، و ϵ_{ijk} مؤلفهٔ خطای تصادفی است. هر دو عامل را نخست تثبیت شده می‌گیریم، و اثرهای تیماری را به‌صورت انحراف از میانگین کل تعریف می‌کنیم، به‌طوری که $\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0$ و $\sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$. همچنین اثرهای متقابل تثبیت و به‌صورتی تعریف شده‌اند که $\sum_{i=1}^{a} (\tau\beta)_{ij} = 0$. چون آزمایش n بار تکرار شده، لذا جمعاً abn مشاهده وجود دارند.

در طرح عاملی با دو عامل، عوامل سطر و ستون A و B (یا تیمارها) به یک اندازه مورد توجه‌اند. به‌خصوص به‌آزمون فرضهایی در مورد مساوی بودن اثرهای تیماری سطر، مانند

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a = 0 \qquad (۲.۷ \text{ الف})$$

$$H_1 : \tau_i \neq 0 \quad \text{حداقل یک}$$

و مساوی بودن اثرهای تیماری ستون، مانند

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b = 0$$

$$H_1 : \beta_j \neq 0 \quad \text{حداقل یک} \qquad (\text{۲.۷ ب})$$

علاقه‌مندیم. همچنین به تعیین اینکه آیا تیمارهای سطر و ستون بر هم اثر متقابل دارند یا خیر علاقه داریم. پس مایل به انجام آزمون زیر نیز می‌باشیم.

$$H_0 : (\tau\beta)_{ij} = 0 \quad ,j,i \ \text{برای تمام}$$

$$H_1 : (\tau\beta)_{ij} \neq 0 \quad \text{حداقل یک} \qquad (\text{۲.۷ ج})$$

حال دربارهٔ چگونگی انجام آزمون این فرضها با استفاده از تحلیل واریانس دو عاملی بحث می‌کنیم.

۲.۳.۷ تحلیل آماری مدل با اثرهای تثبیت شده

گیریم $y_{i..}$ مجموع تمام مشاهدات تحت i امین سطح عامل A، $y_{.j.}$ مجموع کل تمام مشاهدات تحت j امین سطح عامل B، $y_{ij.}$ مجموع تمام مشاهدات در خانهٔ ijام، و $y_{...}$ مجموع کل تمام مشاهدات باشد. $\overline{y}_{i..}$، $\overline{y}_{.j.}$، $\overline{y}_{ij.}$، و $\overline{y}_{...}$ را به‌ترتیب متوسطهای سطر، ستون، خانه، و کل تعریف می‌کنیم. به‌عبارت ریاضی

$$\begin{aligned}
y_{i..} &= \sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} & \overline{y}_{i..} &= \frac{y_{i..}}{bn} & i &= 1, 2, \ldots, a \\
y_{.j.} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} & \overline{y}_{.j.} &= \frac{y_{.j.}}{an} & j &= 1, 2, \ldots, b \qquad (\text{۳.۷}) \\
y_{ij.} &= \sum_{k=1}^{n} y_{ijk} & \overline{y}_{ij.} &= \frac{y_{...}}{n} & i &= 1, 2, \ldots, a \\
& & & & j &= 1, 2, \ldots, b \\
y_{...} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} & \overline{y}_{...} &= \frac{y_{...}}{abn}
\end{aligned}$$

می‌توان مجموع کل مربعات تصحیح شده را به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk}-\overline{y}_{...})^{2} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}[(\overline{y}_{i..}-\overline{y}_{...})+(\overline{y}_{.j.}-\overline{y}_{...}) \\ &+(\overline{y}_{ij.}-\overline{y}_{i..}-\overline{y}_{.j.}+\overline{y}_{...})+(\overline{y}_{ijk}-\overline{y}_{ij.})]^{2} \\ &= bn\sum_{i=1}^{a}(\overline{y}_{i..}-\overline{y}_{...})^{2}+an\sum_{j=1}^{b}(\overline{y}_{.j.}-\overline{y}_{...})^{2} \\ &+n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\overline{y}_{ij.}-\overline{y}_{i..}-\overline{y}_{.j.}+\overline{y}_{...})^{2} \\ &+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk}-\overline{y}_{ij.})^{2}\end{aligned} \quad (۴.۷)$$

زیرا که شش حاصلضرب متقاطع در طرف راست برابر با صفرند. توجه کنید که مجموع کل مربعات به مجموع مربعات مربوط به «سطرها» یا عامل A (SS_A)، مجموع مربعات مربوط به «ستونها» یا عامل B (SS_B)، مجموع مربعات مربوط به‌اثر متقابل بین A و B (SS_{AB})، و مجموع مربعات مربوط به‌خطا $(SS_{\text{خطا}})$ افراز شده است. از آخرین جزء طرف راست معادلهٔ (۴.۷) می‌بینیم که برای به‌دست آوردن مجموع مربعات خطا حداقل دو تکرار $(n \geqslant 2)$ لازم است.

می‌توانیم معادلهٔ (۴.۷) را به‌صورت نمادی به‌شکل زیر بنویسیم

$$SS_{\text{کل}} = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_{\text{خطا}} \quad (۵.۷)$$

تعداد درجات آزادی هر یک از این مجموع مربعات برابر است با

اثر	درجات آزادی
A	$a-1$
B	$b-1$
اثر متقابل AB	$(a-1)(b-1)$
خطا	$ab(n-1)$
کل	$abn-1$

می‌توان تخصیص کل $abn-1$ درجهٔ آزادی به‌مجموع مربعات را به‌صورت زیر توجیه کرد. اثرهای اصلی A و B به‌ترتیب a و b سطح دارند. بنابراین همان‌طور که نشان داده شده است به ترتیب

$a-1$ و $b-1$ درجهٔ آزادی خواهند داشت. درجهٔ آزادی اثر متقابل به‌بیان ساده تعداد درجات آزادی خانه‌ها (که $ab-1$ است) منهای تعداد درجات آزادی دو اثر اصلی A و B است؛ یعنی $(a-1)(b-1) = (b-1) - (a-1) - 1 - ab$. درون هر یک از ab خانه با n تکرار، $n-1$ درجهٔ آزادی وجود دارد، پس $ab(n-1)$ درجهٔ آزادی برای خطا وجود دارد. توجه کنید که مجموع درجات آزادی طرف راست معادلهٔ (۵.۷) برابر کل تعداد درجات آزادی است.

از تقسیم هر یک از مجموع مربعات بر درجهٔ آزادی آن، میانگین مربعات حاصل می‌شود. مقادیر امید ریاضی میانگین مربعات عبارت‌اند از:

$$E(MS_A) = E\left(\frac{SS_A}{a-1}\right) = \sigma^2 + \frac{bn\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2}{a-1}$$

$$E(MS_B) = E\left(\frac{SS_B}{b-1}\right) = \sigma^2 + \frac{an\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2}{b-1}$$

$$E(MS_{AB}) = E\left(\frac{SS_{AB}}{(a-1)(b-1)}\right) = \sigma^2 + \frac{n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\tau\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$$

و

$$E(MS_{\text{خطا}}) = E\left(\frac{SS_{\text{خطا}}}{ab(n-1)}\right) = \sigma^2$$

توجه کنید که اگر فرضهای صفر عدم وجود اثرهای تیماری سطری، عدم وجود اثرهای تیماری ستونی، و عدم وجود اثر متقابل درست باشند، آن‌گاه MS_A، MS_B، MS_{AB} و $MS_{\text{خطا}}$ همگی برآوردهای σ^2 می‌شوند. اما، اگر مثلاً بین اثرهای تیماری سطری تفاوتهایی موجود باشد، آن‌گاه MS_A بزرگتر از $MS_{\text{خطا}}$ می‌شود. همچنین اگر اثرهای تیماری ستونی، یا اگر اثرهای متقابل وجود داشته باشند، آن‌گاه میانگین مربعات متناظر بزرگتر از $MS_{\text{خطا}}$ می‌شود. بنابراین برای آزمون معنی‌دار بودن هر دو اثرهای اصلی و اثرهای متقابل، تنها میانگین مربعات متناظر را بر میانگین مربعات خطا تقسیم می‌کنیم. مقادیر بزرگ این نسبت حاکی از عدم حمایت داده‌ها از فرض صفر است.

اگر کفایت مدل [معادلهٔ (۱.۷)] را بپذیریم و عوامل خطا، ϵ_{ijk}، متغیرهای تصادفی مستقل نرمال با واریانس ثابت σ^2 باشند، آن‌گاه هر یک از نسبتهای میانگین مربعات، $MS_A/MS_{\text{خطا}}$، $MS_B/MS_{\text{خطا}}$، و $MS_{AB}/MS_{\text{خطا}}$، دارای توزیع F به‌ترتیب با $a-1$، $b-1$، و $(a-1)(b-1)$ درجهٔ آزادی در صورت و $ab(n-1)$ درجهٔ آزادی در مخرج‌اند*، و ناحیهٔ بحرانی دنبالهٔ بالای توزیع F است. شیوهٔ آزمون را که معمولاً به‌صورت جدول تحلیل واریانس خلاصه می‌شود، با جدول ۶.۷ نشان داده‌ایم.

* همچنان‌که قبلاً هم متذکر شده‌ایم آزمون F را نیز می‌توان به‌عنوان تقریبی از آزمون تصادفی‌کردن در نظر گرفت.

جدول ۶.۷ جدول تحلیل واریانس برای طرح دو عاملی، مدل اثرهای تثبیت‌شده

منبع تغییر	مجموع مربعات	درجات آزادی	میانگین مربعات	$F_.$
تیمارهای A	SS_A	$a-۱$	$MS_A=\dfrac{SS_A}{a-۱}$	$F_.=\dfrac{MS_A}{MS_{\text{خطا}}}$
تیمارهای B	SS_B	$b-۱$	$MS_B=\dfrac{SS_B}{b-۱}$	$F_.=\dfrac{MS_B}{MS_{\text{خطا}}}$
اثر متقابل	SS_{AB}	$(a-۱)(b-۱)$	$MS_{AB}=\dfrac{SS_{AB}}{(a-۱)(b-۱)}$	$F_.=\dfrac{MS_{AB}}{MS_{\text{خطا}}}$
خطا	$SS_{\text{خطا}}$	$ab(n-۱)$	$MS_{\text{خطا}}=\dfrac{SS_{\text{خطا}}}{ab(n-۱)}$	
کل	$SS_{\text{کل}}$	$abn-۱$		

فرمولهای محاسباتی برای مجموع مربعات در معادلهٔ (۵.۷) را می‌توان به‌سادگی به‌دست آورد. کل مجموع مربعات به‌صورت معمول به‌وسیلهٔ

$$SS_{\text{کل}}=\sum_{i=۱}^{a}\sum_{j=۱}^{b}\sum_{k=۱}^{n}y_{ijk}^{۲}-\frac{y_{...}^{۲}}{abn} \qquad (۶.۷)$$

محاسبه می‌شود. مجموع مربعات برای اثرهای اصلی عبارت‌اند از

$$SS_A=\sum_{i=۱}^{a}\frac{y_{i..}^{۲}}{bn}-\frac{y_{...}^{۲}}{abn} \qquad (۷.۷)$$

و

$$SS_B=\sum_{j=۱}^{b}\frac{y_{.j.}^{۲}}{an}-\frac{y_{...}^{۲}}{abn} \qquad (۸.۷)$$

راحت‌تر است که SS_{AB} را در دو مرحله به‌دست آوریم. ابتدا مجموع مربعات بین مجموعهای ab خانه را که مجموع مربعات حاصل از «زیرمجموعها» می‌نامیم محاسبه می‌کنیم

$$SS_{\text{زیرمجموعها}}=\sum_{i=۱}^{a}\sum_{j=۱}^{b}\frac{y_{ij.}^{۲}}{n}-\frac{y_{...}^{۲}}{abn}$$

این مجموع مربعات شامل SS_A و SS_B نیز هست. بنابراین در دومین مرحله SS_{AB} را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$SS_{AB} = SS_{\text{زیرمجموعها}} - SS_A - SS_B \tag{۹.۷}$$

می‌توان $SS_{\text{خطا}}$ را با تفریق به‌دست آورد

$$SS_{\text{خطا}} = SS_{\text{کل}} - SS_{AB} - SS_A - SS_B \tag{۱۰.۷}$$

یا

$$SS_{\text{خطا}} = SS_{\text{کل}} - SS_{\text{زیرمجموعها}}$$

$$SSE = \sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}^2 - \sum_i \sum_j \frac{y_{ij.}^2}{n}$$

مثال ۱.۷

آزمایش طرح باطری

جدول ۷.۷ طول عمر (برحسب ساعت) مؤثر مشاهده شده را برای مثال طرح باطری که در بخش ۱.۳.۷ شرح آن گذشت نشان می‌دهد. مجموعهای سطری و ستونی را در حاشیه‌های جدول آورده‌ایم. اعداد داخل دایره مجموعهای خانه‌ای هستند.

جدول ۷.۷ داده‌های طول عمر (برحسب ساعت) برای آزمایش طرح باطری

نوع مواد	دما (°F) ۱۵			۷۰			۱۲۵			$y_{i..}$
۱	۱۳۰	۱۵۵	۵۳۹	۳۴	۴۰	۲۲۹	۲۰	۷۰	۲۳۰	۹۹۸
	۷۴	۱۸۰		۸۰	۷۵		۸۲	۵۸		
۲	۱۵۰	۱۸۸	۶۲۳	۱۳۶	۱۲۲	۴۷۹	۲۵	۷۰	۱۹۸	۱۳۰۰
	۱۵۹	۱۲۶		۱۰۶	۱۱۵		۵۸	۴۵		
۳	۱۳۸	۱۱۰	۵۷۶	۱۷۴	۱۲۰	۵۸۳	۹۶	۱۰۴	۳۴۲	۱۵۰۱
	۱۶۸	۱۶۰		۱۵۰	۱۳۹		۸۲	۱۶۰		
$y_{.j.}$	۱۷۳۸			۱۲۹۱			۷۷۰			۳۷۹۹ = $y_{...}$

۶۰

مجموع مربعات به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$SS_{\text{کل}}=\sum_{i=۱}^{a}\sum_{j=۱}^{b}\sum_{k=۱}^{n}y_{ijk}^{۲}-\frac{y_{...}^{۲}}{abn}$$

$$=(۱۳۰)^{۲}+(۱۵۵)^{۲}+(۷۴)^{۲}+\cdots+(۶۰)^{۲}-\frac{(۳۷۹۹)^{۲}}{۳۶}=۷۷۶۴۶٫۹۷$$

$$SS_{\text{مواد}}=\sum_{i=۱}^{a}\frac{y_{i..}^{۲}}{bn}-\frac{y_{...}^{۲}}{abn}$$

$$=\frac{(۹۹۸)^{۲}+(۱۳۰۰)^{۲}+(۱۵۰۱)^{۲}}{(۳)(۴)}-\frac{(۳۷۹۹)^{۲}}{۳۶}=۱۰۶۸۳٫۷۲$$

$$SS_{\text{دما}}=\sum_{j=۱}^{b}\frac{y_{.j.}^{۲}}{an}-\frac{y_{...}^{۲}}{abn}$$

$$=\frac{(۱۷۳۸)^{۲}+(۱۲۹۱)^{۲}+(۷۷۰)^{۲}}{(۳)(۴)}-\frac{(۳۷۹۹)^{۲}}{۳۶}=۳۹۱۱۸٫۷۲$$

$$SS_{\text{اثر متقابل}}=\sum_{i=۱}^{a}\sum_{j=۱}^{b}\frac{y_{ij.}^{۲}}{n}-\frac{y_{...}^{۲}}{abn}-SS_{\text{مواد}}-SS_{\text{دما}}$$

$$=\frac{(۵۳۹)^{۲}+(۲۲۹)^{۲}+\cdots+(۳۴۲)^{۲}}{۴}-\frac{(۳۷۹۹)^{۲}}{۳۶}-۱۰۶۸۳٫۷۲$$

$$-۳۹۱۱۸۷۲=۹۶۱۳٫۷۸$$

و

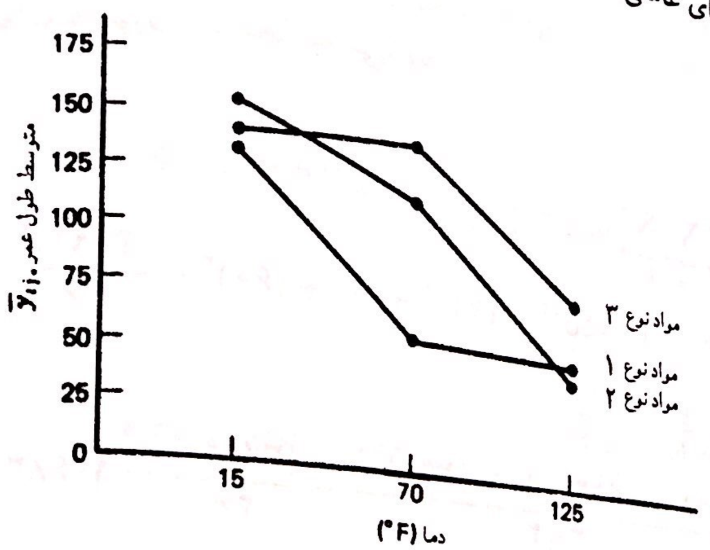
$$SS_{\text{خطا}}=SS_{\text{کل}}-SS_{\text{مواد}}-SS_{\text{دما}}-SS_{\text{اثر متقابل}}$$

$$=۷۷۶۴۶٫۹۷-۱۰۶۸۳٫۷۲-۳۹۱۱۸٫۷۲-۹۶۱۳٫۷۸=۱۸۲۳۰٫۷۵$$

تحلیل واریانس را در جدول ۸.۷ نشان داده‌ایم. چون $۲٫۷۳ = F_{۰٫۰۵,۴,۲۷}$، نتیجه می‌گیریم که اثر

جدول ۸.۷ تحلیل واریانس برای داده‌های طول عمر باطری

منبع تغییر	مجموع مربعات	درجات آزادی	میانگین مربعات	$F_{.}$
انواع مواد	۱۰۶۸۳٫۷۲	۲	۵۳۴۱٫۸۶	۷٫۹۱
دما	۳۹۱۱۸٫۷۲	۲	۱۹۵۵۸٫۳۶	۲۸٫۹۷
اثر متقابل	۹۶۱۳٫۷۸	۴	۲۴۰۳٫۴۴	۳٫۵۶
خطا	۱۸۲۳۰٫۷۵	۲۷	۶۷۵٫۲۱	
کل	۷۷۶۴۶٫۹۷	۳۵		



شکل ۴.۷ نمودار دما_نوع مواد برای مثال ۱.۷.

متقابل معنی‌داری بین انواع مواد و دما وجود دارد. به‌علاوه $F_{۰٫۰۵,۲,۲۷} = ۳٫۳۵$، بنابراین اثرهای اصلی نوع مواد و دما نیز معنی دارند.

به‌منظورکمک به‌تفسیر نتایج این آزمایش، رسم نمودار متوسط پاسخها در هر ترکیب تیماری مفید خواهد بود. این نمودار را در شکل ۴.۷ نشان داده‌ایم. معنی‌دار بودن اثر متقابل با موازی نبودن خطوط مشهود است. به‌طور کلی، بدون توجه به‌نوع مواد عمر طولانیتر در دمای پایین حاصل شده است. با تغییر دما از کم به‌مقدار متوسط، طول عمر در واقع با مواد نوع ۳ افزایش یافته است. درصورتی‌که برای مواد نوع ۱ و ۲ طول عمر کاهش پیدا کرده است. با تغییر دما از مقدار متوسط آن به‌زیاد طول عمر برای انواع مواد ۲ و ۳ کاهش یافته و برای نوع ۱ اساساً بدون تغییر مانده است. به‌نظر می‌رسد که اگر بخواهیم تغییر دما کمتر در طول عمر مؤثر باشد، استفاده از مواد نوع ۳ بهترین نتیجه را می‌دهد. ∎

مقایسه‌های چندگانه. وقتی تحلیل واریانس نشان می‌دهد که میانگینهای سطری یا ستونی متفاوت‌اند، معمولاً مقایسهٔ بین میانگینهای هر سطر یا هر ستون برای کشف تفاوتهای عمده مورد توجه است. در این باره روشهای مقایسهٔ چندگانه که در فصل ۳ بحث آن گذشت مفید هستند. حال کاربرد آزمون دامنهٔ چندگانهٔ دانکن را در خصوص داده‌های طول عمر باطری در مثال ۱.۷ شرح می‌دهیم. توجه کنید که در این آزمایش اثر متقابل معنی‌دار است. وقتی اثر متقابل معنی‌دار باشد، مقایسه‌های بین میانگینهای یک عامل (مثلاً، A) می‌تواند به‌وسیلهٔ اثر متقابل AB مبهم بماند. در این وضعیت یک راه، تثبیت کردن عامل B در یک سطح خاص و به‌کار بردن آزمون دامنهٔ چندگانهٔ دانکن برای میانگینهای عامل A در همان سطح است. در توضیح مطلب، گیریم که در مثال ۱.۷ به‌کشف تفاوتهای بین میانگینهای سه نوع مواد راغب باشیم. چون اثر متقابل

معنی‌دار است، لذا این مقایسه را تنها در یک سطح دما، مثلاً در سطح دوم (۷۰ درجه) انجام می‌دهیم. با استفاده از این پذیره که واریانس خطای آزمایش در تمامی ترکیبهای تیماری یکسان است می‌پذیریم که بهترین برآورد واریانس خطا بنا به جدول تحلیل واریانس، $MS_{\text{خطا}}$ است. سه میانگین انواع مواد به‌ترتیب صعودی عبارت‌اند از:

$$\bar{y}_{۱۲.} = ۵۷٫۲۵ \qquad (\text{مواد نوع ۱})$$
$$\bar{y}_{۲۲.} = ۱۱۹٫۷۵ \qquad (\text{مواد نوع ۲})$$
$$\bar{y}_{۳۲.} = ۱۴۵٫۷۵ \qquad (\text{مواد نوع ۳})$$

چون هر میانگین مشتمل بر چهار مشاهده است، خطای معیار این میانگینها،

$$S_{\bar{y}_{i۲.}} = \sqrt{\frac{MS_{\text{خطا}}}{n}} = \sqrt{\frac{۶۷۵٫۲۱}{۴}} = ۱۲٫۹۹$$

بنابر جدول VII پیوست به‌دست می‌آوریم $r_{۰٫۰۵}(۲, ۲۷) \simeq ۲٫۹۱$، و $r_{۰٫۰۵}(۳, ۲۷) \simeq ۳٫۰۶$. دامنه‌های معنی‌دار عبارت‌اند از:

$$R_۲ = r_{۰٫۰۵}(۲, ۲۷) S_{\bar{y}_{i۲.}} = (۲٫۹۱)(۱۲٫۹۹) = ۳۷٫۸۰$$
$$R_۳ = r_{۰٫۰۵}(۳, ۲۷) S_{\bar{y}_{i۲.}} = (۳٫۰۶)(۱۲٫۹۹) = ۳۹٫۷۵$$

و از مقایسه‌ها نتیجه می‌شود،

$$\text{۳ با ۱} = ۱۴۵٫۷۵ - ۵۷٫۲۵ = ۸۸٫۵۰ > ۳۹٫۷۵ (R_۳)$$
$$\text{۳ با ۲} = ۱۴۵٫۷۵ - ۱۱۹٫۷۵ = ۲۶٫۰۰ < ۳۷٫۸۰ (R_۲)$$
$$\text{۲ با ۱} = ۱۱۹٫۷۵ - ۵۷٫۲۵ = ۶۲٫۵۰ > ۳۷٫۸۰ (R_۲)$$

این تحلیل نشان می‌دهد که در سطح دمای ۷۰ درجه، میانگین طول عمر باطری برای انواع مواد ۲ و ۳ یکسان است، و میانگین طول عمر برای مواد نوع ۱ در مقایسه با انواع ۲ و ۳ به‌صورتی معنی‌دار پایینتر است.

اگر اثر متقابل معنی‌دار باشد، آزمایشگر می‌تواند تمام میانگینهای ab خانه را به‌منظور تعیین اینکه کدام یک به‌صورتی معنی‌دار متفاوت‌اند مقایسه کند. در این تحلیل، تفاوتهای بین میانگینهای خانه‌ای، اثرهای متقابل و هر دو اثر اصلی را نیز شامل است. در مثال ۱.۷، این روش، ۳۶ مقایسهٔ بین تمام جفتهای ممکن نه میانگین خانه‌ای را می‌دهد.

خروجی کامپیوتری نمونه‌ای. شکل ۵.۷ خروجی کامپیوتری را با روش مدلهای کلی خطی SAS برای داده‌های طول عمر باطری در مثال ۱.۷ نشان می‌دهد. توجه کنید که

$$SS_{\text{مدل}} = SS_{\text{مواد}} + SS_{\text{دما}} + SS_{\text{اثرهای متقابل}}$$
$$= \text{۱۰۶۸۳٫۷۲} + \text{۳۹۱۱۸٫۷۲} + \text{۹۶۱۳٫۷۸}$$
$$= \text{۵۹۴۱۶٫۲۲}$$

و

$$R^2 = \frac{SS_{\text{مدل}}}{SS_{\text{کل}}} = \frac{\text{۵۹۴۱۶٫۲۲}}{\text{۷۷۶۴۶٫۹۷}} = \text{۰٫۷۶۵۲۱۰}$$

یعنی، در حدود ۷۷ درصد تغییرپذیری در طول عمر باطری به‌وسیلهٔ مواد صفحهٔ باطری، دما، و اثر متقابل نوع مواد و دما توجیه می‌شود. برنامه همچنین مجموع مربعات نوع مواد، دما، و اثر متقابل نوع مواد و دما را نیز محاسبه می‌کند (یادآور می‌شویم که همیشه برای داده‌های متعادل، هر دو مجموع مربعات نوع I و III برابرند.) مانده‌های مربوط به برازش مدل نیز در خروجی کامپیوتری منعکس است. در بخش ۳.۳.۷ دربارهٔ چگونگی استفاده از این مانده‌ها در بازبینی کفایت مدل توضیح می‌دهیم.

۳.۳.۷ بازبینی کفایت مدل

قبل از پذیرفتن نتایج تحلیل واریانس، باید کفایت مدل زیربنایی را مورد بازبینی قرار داد. مثل گذشته ابزار عمدهٔ تشخیص تحلیل مانده‌ای است. مانده‌ها برای مدل عاملی با دو عامل عبارت‌اند از:

$$e_{ijk} = y_{ijk} - \hat{y}_{ijk} \tag{۱۱.۷}$$

و چون مقدار برازش داده شده $\hat{y}_{ijk} = \overline{y}_{ij.}$ (متوسط مشاهدات در خانهٔ ijام) است، لذا معادلهٔ (۱۱.۷) به‌صورت

$$e_{ijk} = y_{ijk} - \overline{y}_{ij.} \tag{۱۲.۷}$$

در می‌آید.

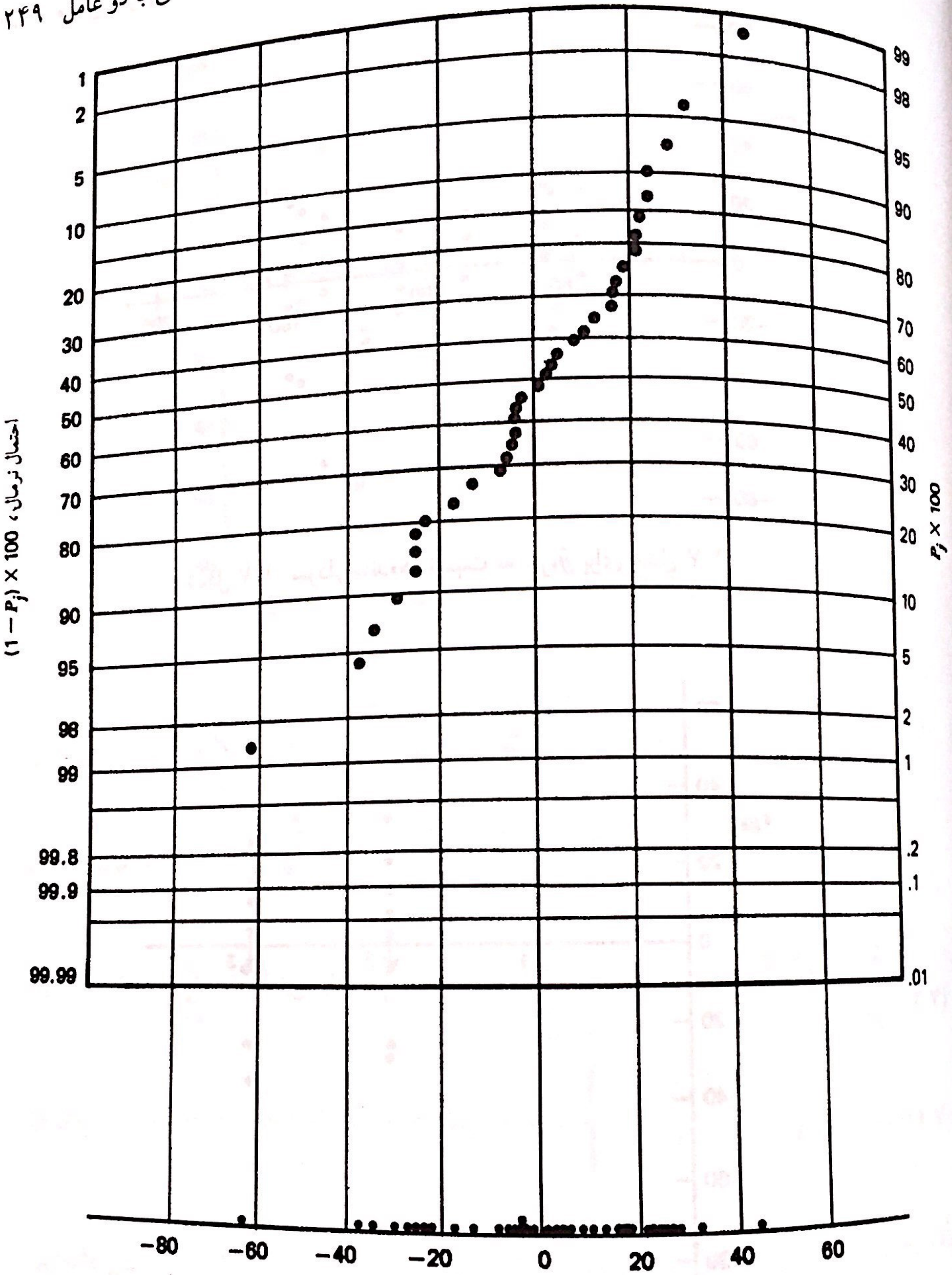
جدول ۹.۷ مانده‌ها برای مثال ۱.۷

دما(°F) ۱۵		۷۰		۱۲۵		نوع مواد
−۴ر۷۵	۲۰ر۲۵	−۲۳ر۷۵	−۱۷ر۲۵	−۳۷ر۵۰	۱۲ر۵۰	۱
−۶۰ر۷۵	۴۵ر۲۵	۲۲ر۷۵	۱۷ر۷۵	۲۴ر۵۰	۰ر۵۰	
−۵ر۷۵	۳۲ر۲۵	۱۶ر۲۵	۲ر۲۵	−۲۴ر۵۰	۲۰ر۵۰	۲
۳ر۲۵	−۲۹ر۷۵	−۱۳ر۷۵	−۴ر۷۵	۸ر۵۰	−۴ر۵۰	
−۶ر۰۰	−۳۴ر۰۰	۲۸ر۲۵	−۲۵ر۷۵	۱۰ر۵۰	۱۸ر۵۰	۳
۲۴ر۰۰	۱۶ر۰۰	۴ر۲۵	−۶ر۷۵	−۳ر۵۰	−۲۵ر۵۰	

برای داده‌های طول عمر باطری در مثال ۱.۷ مانده‌ها را در جدول ۹.۷ نشان داده‌ایم. نمودار احتمال نرمال و نمودار نقطه‌ای این مانده‌ها (شکل ۶.۷) هیچ چیزی را که به‌خصوص ایجاد مشکل کند آشکار نمی‌کنند، هر چند بزرگترین ماندهٔ منفی (−۶۰ر۷۵، در ۱۵ درجهٔ فارنهایت برای مواد نوع ۱) قدری دور از بقیه قرار گرفته است. مقدار استانداردشدهٔ این مانده $-۶۰ر۷۵/\sqrt{۶۷۵ر۲۱} = -۲ر۳۴$ است و این تنها مانده‌ای است که قدرمطلق مقدار آن بیشتر از دو شده است.

شکل ۷.۷ نمودار مانده‌ها نسبت به‌مقادیر برازانده شدهٔ $\hat{y}_{ijk}$ است. این نمودار به‌گرایش ملایمی برای واریانس مانده‌ها دلالت دارد که با افزایش طول عمر اضافه می‌شود. شکلهای ۸.۷ و ۹.۷ نمودار مانده‌ها به‌ترتیب نسبت به‌انواع مواد و دما را نشان می‌دهند. هر دو نمودار نابرابری ضعیف واریانس را با ترکیب تیمار ۱۵ درجهٔ فارنهایت و مواد نوع ۱ که احتمالاً واریانسی بزرگتر از بقیه دارد نشان می‌دهند.

خانهٔ ۷۰ درجهٔ فارنهایت و مواد نوع ۱ شامل هر دو ماندهٔ فرین است (۴۵ر۲۵, −۶۰ر۷۵). این دو مانده در اصل علت نابرابری واریانس است که در شکلهای ۷.۷، ۸.۷، و ۹.۷ ظاهر شده‌اند. بررسی مجدد داده‌ها هیچ مسألهٔ روشنی را مثل خطا در ثبت داده‌ها آشکار نمی‌کند، لذا پاسخها را به‌صورت معقول قبول می‌کنیم. ممکن است این ترکیب خاص تیمار موجب ایجاد طول عمری شده باشد که قدری از بقیه بیشتر است. اما، مسأله به آن اندازه حاد نیست که در تحلیل و نتایج حاصل اثر زیاد داشته باشد.

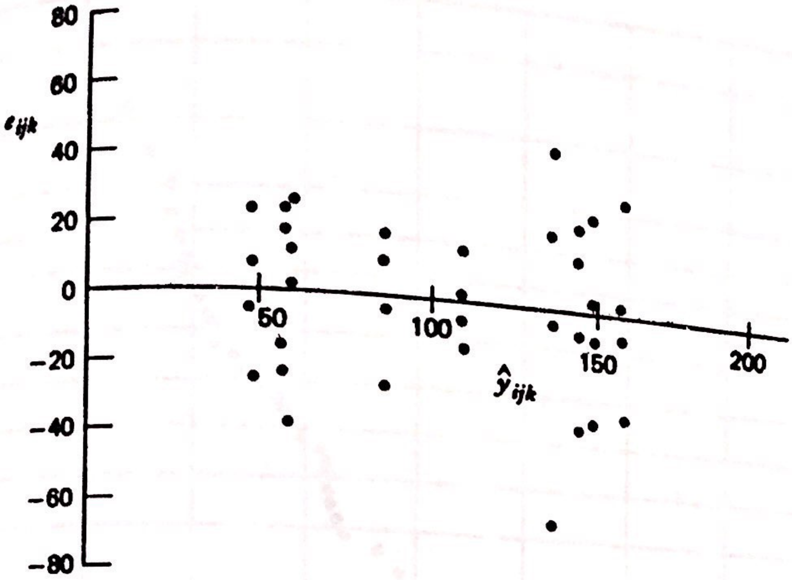


شکل ۶.۷ نمودار احتمال نرمال و نمودار نقطه‌ای مانده‌ها برای مثال ۱.۷.

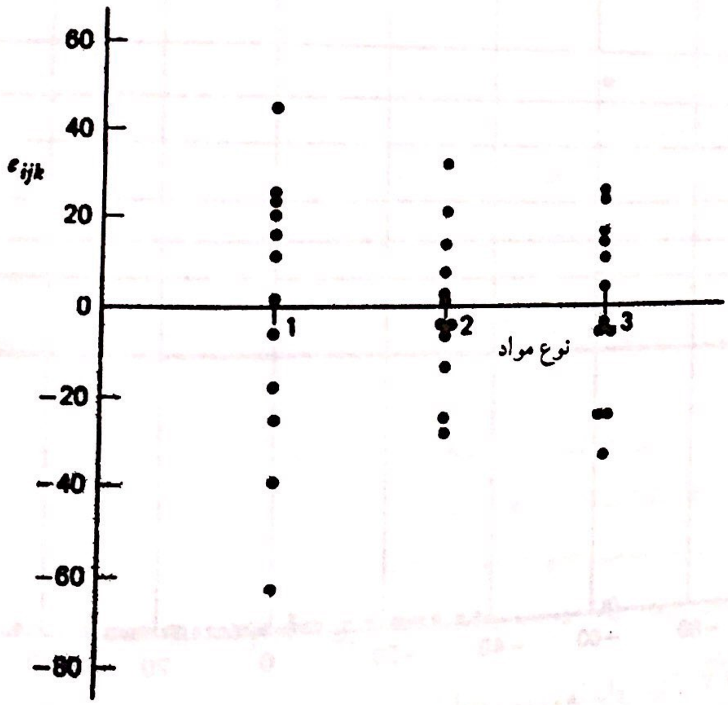
۴.۳.۷ برآورد پارامترهای مدل

در مدل تحلیل واریانس دو عاملی

$$\overline{y}_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk} \qquad (۱۳.۷)$$

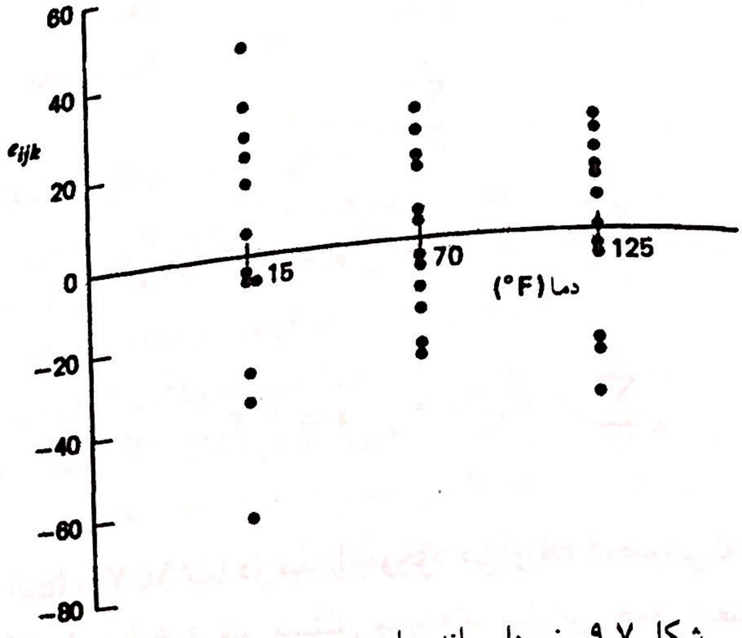


شکل ۷.۷ نمودار مانده‌ها نسبت به $\hat{y}_{ijk}$ برای مثال ۱.۷.



شکل ۸.۷ نمودار مانده‌ها نسبت به‌نوع مواد برای مثال ۱.۷.

پارامترها را می‌توان به‌روش کمترین مربعات برآورد کرد. چون مدل، $1+a+b+ab$ پارامتر برای برآورد دارد، لذا $1+a+b+ab$ معادلهٔ نرمال وجود دارند. با استفاده از روش بخش ۴.۴ مشکل نیست که نشان دهیم معادلات نرمال به‌صورت زیرند



شکل ۹.۷ نمودار مانده‌ها نسبت به دما برای مثال ۱.۷.

$$\mu:\ abn\hat{\mu}+bn\sum_{i=1}^{a}\hat{\tau}_i+an\sum_{i=1}^{b}\hat{\beta}_j+n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\hat{\tau}\beta)_{ij}=y_{...} \qquad \text{(۱۴.۷ الف)}$$

$$\tau_i:\ bn\hat{\mu}+bn\hat{\tau}_i+n\sum_{j=1}^{b}\hat{\beta}_j+n\sum_{j=1}^{b}(\tau\beta)_{ij}=y_{i..},\qquad i=1,2,\ldots,a \qquad \text{(۱۴.۷ ب)}$$

$$\beta_j:\ an\hat{\mu}+n\sum_{i=1}^{a}\hat{\tau}_i+an\hat{\beta}_j+n\sum_{i=1}^{a}(\tau\beta)_{ij}=y_{.j.},\qquad j=1,2,\ldots,b \qquad \text{(۱۴.۷ ج)}$$

$$(\tau\beta)_{ij}:\ n\hat{\mu}+n\hat{\tau}_i+n\hat{\beta}_j+n(\tau\beta)_{ij}=y_{ij.}\begin{cases} i=1,2,\ldots,a\\ j=1,2,\ldots,b\end{cases} \qquad \text{(۱۴.۷ د)}$$

برای راحتی پارامترهای متناظر هر معادلهٔ نرمال را در طرف چپ معادلهٔ (۱۴.۷) نشان داده‌ایم.

با اقدام به‌حل معادلات نرمال، متوجه می‌شویم که از جمع a معادلهٔ (۱۴.۷ب)، معادلهٔ (۱۴.۷الف) به‌دست می‌آید، و از جمع b معادلهٔ (۱۴.۷ج) معادلهٔ (۱۴.۷ الف) حاصل می‌شود. همچنین از جمع معادلات (۱۴.۷ د) نسبت به j برای هر مقدار خاص i معادلهٔ (۱۴.۷ ب) به‌دست می‌آید و از جمع آن نسبت به i برای هر مقدار خاص j معادلهٔ (۱۴.۷ ج) نتیجه می‌شود. بنابراین در این دستگاه معادلات، $a+b+1$ وابستگی خطی وجود دارند و جوابی یکتا وجود نخواهد داشت. برای به‌دست آوردن جواب، قیود زیر را اعمال می‌کنیم

$$\sum_{i=1}^{a} \hat{\tau}_i = 0 \tag{۱۵.۷ الف}$$

$$\sum_{j=1}^{b} \hat{\beta}_j = 0 \tag{۱۵.۷ ب}$$

$$\sum_{i=1}^{a} (\hat{\tau\beta})_{ij} = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, b \tag{۱۵.۷ ج}$$

و

$$\sum_{j=1}^{b} (\hat{\tau\beta})_{ij} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, a \tag{۱۵.۷ د}$$

معادلات (۱۵.۷ الف) و (۱۵.۷ ب) دو قید را به‌وجود می‌آورند، درصورتی‌که معادلات (۱۵.۷ ج) و (۱۵.۷ د) تشکیل $a+b-1$ قید مستقل می‌دهند. بنابراین جمعاً به‌تعدادی که لازم است $a+b+1$ قید داریم.

با استفاده از این قیود، معادلات نرمال [معادلات (۱۴.۷)] به‌صورتی قابل ملاحظه ساده شده و جوابهای زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
\hat{\mu} &= \overline{y}_{...} \\
\hat{\tau}_i &= \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{...}, \qquad i = 1, 2, \ldots, a \\
\hat{\beta}_j &= \overline{y}_{.j.} - \overline{y}_{...}, \qquad j = 1, 2, \ldots, b \\
(\hat{\tau\beta})_{ij} &= \overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{.j.} + \overline{y}_{...} \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, a \\ j = 1, 2, \ldots, b \end{cases}
\end{aligned} \tag{۱۶.۷}$$

به‌جاذبهٔ شهودی قابل ملاحظهٔ این جوابهای معادلات نرمال توجه کنید. اثرهای تیمارهای سطری به‌وسیلهٔ متوسط سطری منهای متوسط کل، تیمارهای ستونی به‌وسیلهٔ متوسط ستونی منهای متوسط کل، و اثر متقابل ij به‌وسیلهٔ متوسط ijامین خانه منهای متوسط کل، اثر سطر iام، و اثر ستون jام برآورد می‌شوند. با استفاده از معادلات (۱۶.۷) می‌توانیم مقدار برازانده شده به y_{ijk} را به‌صورت زیر پیدا کنیم

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{ijk} &= \hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\beta}_j + (\hat{\tau\beta})_{ij} \\
&= \overline{y}_{...} + (\overline{y}_{i..} - \overline{y}_{...}) + (\overline{y}_{.j.} - \overline{y}_{...}) \\
&\quad + (\overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{.j.} + \overline{y}_{...}) \\
&= \overline{y}_{ij.}
\end{aligned}$$

یعنی، kامین مشاهده در ijامین خانه به‌وسیلهٔ متوسط n مشاهدهٔ موجود در آن خانه برآورد می‌شود. از این نتیجه قبلاً در معادلهٔ (۱۲.۷) برای به‌دست آوردن مانده‌های مدل عاملی با دو عامل استفاده کرده‌ایم.

به‌دلیل استفاده از قیود [معادلات (۱۵.۷)] در حل معادلات نرمال، پارامترهای مدل به‌طور یکتا برآورد نمی‌شوند. اما، بعضی توابع مهم از پارامترهای مدل، برآوردپذیرند، یعنی، بدون توجه به قیود انتخابی به‌طور یکتا برآورد می‌شوند. یک مثال، $\tau_i - \tau_u + (\overline{\tau\beta})_{i.} - (\overline{\tau\beta})_{u.}$ است که می‌توان آن را تفاوت «واقعی» بین سطوح iم و uام عامل A در نظر گرفت. توجه کنید که تفاوت واقعی بین سطوح هر اثر اصلی شامل «متوسط» اثر متقابل است. همان‌طور که قبلاً متذکر شده‌ایم این همان نتیجه‌ای است که در آزمونهای اثرهای اصلی، وقتی اثرهای متقابل وجود دارند، ایجاد زحمت می‌کند. به‌طور کلی، هر تابعی از پارامترهای مدل که ترکیبی خطی از طرف چپ معادلات نرمال باشد، برآوردپذیر است. این خاصیت را نیز در فصل سوم وقتی از مدل تک عاملی بحث می‌کردیم متذکر شدیم.

۵.۳.۷ انتخاب حجم نمونه

از منحنیهای مشخصهٔ عملکرد در نمودار V پیوست می‌توان برای یاری دادن به آزمایشگر در تعیین حجم مناسب نمونه (تعداد تکرارها، n) برای یک طرح عاملی با دو عامل استفاده کرد. مقدار مناسب پارامتر Φ^2 و تعداد درجات آزادی صورت و مخرج را در جدول ۱۰.۷ نشان داده‌ایم.

راه بسیار مؤثری در استفاده از این منحنیها تعیین کوچکترین مقدار Φ^2ی متناظر با تفاوت مشخص شده بین هر دو میانگین تیمار است. مثلاً، اگر تفاوت هر دو میانگین سطری، D باشد،

جدول ۱۰.۷ پارامترهای منحنی مشخصهٔ عملکرد برای نمودار V پیوست در مورد مدل اثرهای تثبیت شده، مدل دو عاملی

عامل	Φ^2	درجات آزادی صورت	درجات آزادی مخرج
A	$\dfrac{bn\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2}{a\sigma^2}$	$a-1$	$ab(n-1)$
B	$\dfrac{an\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2}{b\sigma^2}$	$b-1$	$ab(n-1)$
AB	$\dfrac{n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\tau\beta)_{ij}^2}{\sigma^2[(a-1)(b-1)+1]}$	$(a-1)(b-1)$	$ab(n-1)$

آن‌گاه مینیمم مقدار Φ^2

$$\Phi^2 = \frac{nbD^2}{2a\sigma^2} \qquad (۱۷.۷)$$

است. درصورتی‌که اگر تفاوت هر دو میانگین ستونی، D باشد، آن‌گاه مینیمم مقدار Φ^2

$$\Phi^2 = \frac{naD^2}{2b\sigma^2} \qquad (۱۸.۷)$$

خواهد بود. بالاخره مینیمم مقدار Φ^2ی متناظر با تفاوت D بین هر دو اثر متقابل عبارت است از:

$$\Phi^2 = \frac{nD^2}{2\sigma^2[(a-1)(b-1)+1]} \qquad (۱۹.۷)$$

برای روشن کردن نحوهٔ استفاده از این معادلات، داده‌های طول عمر باطری در مثال ۱.۷ را در نظر بگیرید. فرض کنید قبل از اجرای آزمایش تصمیم بگیریم که فرض صفر را با احتمال زیاد درصورتی‌که تفاوت میانگین طول عمر بین هر دو دما به بزرگی ۴۰ ساعت باشد رد کنیم. پس $D = 40$، و اگر بپذیریم که انحراف معیار عمر باطری تقریباً ۲۵ است، آن‌گاه معادلهٔ (۱۸.۷) مینیمم مقدار Φ^2 یعنی،

$$\begin{aligned}\Phi^2 &= \frac{naD^2}{2b\sigma^2}\\ &= \frac{n(3)(40)^2}{2(3)(25)^2}\\ &= 1{,}28n\end{aligned}$$

را می‌دهد. حال با اختیار $\alpha = 0{,}05$، می‌توانیم با استفاده از نمودار V پیوست جدول زیر را داشته باشیم:

n	Φ^2	Φ	درجات آزادی صورت $= \omega_1$	درجات آزادی خطا $= \omega_2$	β
۲	۲٫۵۶	۱٫۶۰	۲	۹	۰٫۴۵
۳	۳٫۸۴	۱٫۹۶	۲	۱۸	۰٫۱۸
۴	۵٫۱۲	۲٫۲۶	۲	۲۷	۰٫۰۶

توجه کنید که با $n = ۴$ تکرار، مخاطره حدود ۰٫۰۶ است یا اگر تفاوت در میانگین طول عمر باطری در هر دو سطح دما به‌اندازهٔ ۴۰ ساعت باشد، در این‌صورت شانس رد فرض صفر تقریباً ۹۴ درصد است. پس نتیجه می‌گیریم مادامی که برآورد ما از انحراف معیار طول عمر باطری جداً خطا نباشد، چهار تکرار برای رسیدن به حساسیت مطلوب کافی است. در صورت تردید، آزمایشگر می‌تواند شیوهٔ بالا را با مقادیر دیگر σ برای تعیین اثر برآورد کردن غلط این پارامتر بر حساسیت طرح تکرار کند.

۶.۳.۷ پذیرهٔ عدم وجود اثر متقابل در مدل دو عاملی

گاهی آزمایشگر احساس می‌کند مدل دو عاملی بدون وجود اثر متقابل، مانند مدل

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \epsilon_{ijk} \begin{cases} i = ۱, ۲, \ldots, a \\ j = ۱, ۲, \ldots, b \\ k = ۱, ۲, \ldots, n \end{cases} \qquad (۲۰.۷)$$

مناسب است. به‌هر حال، باید در نادیده گرفتن جملات اثر متقابل بسیار محتاط بود، زیرا که با وجود معنی‌دار بودن اثر متقابل می‌تواند بر تفسیر داده‌ها اثری بارز داشته باشد.

تحلیل آماری یک مدل عاملی با دو عامل اما بدون اثر متقابل سرراست است. جدول ۱۱.۷ تحلیل داده‌های طول عمر باطری در مثال ۱.۷ را با پذیرفتن مدل بدون وجود اثر متقابل [معادلهٔ (۲۰.۷)]، ارائه می‌دهد. همچنان‌که قبلاً متذکر شده‌ایم، هر دو اثرهای اصلی معنی دارند. اما، با انجام تحلیل مانده‌ای برای این داده‌ها، روشن خواهد شد که مدل بدون اثر متقابل ناکافی است. برای مدل دو عاملی بدون اثر متقابل، مقادیر برازانده شده، $\hat{y}_{ijk} = \overline{y}_{i..} + \overline{y}_{.j.} - \overline{y}_{...}$ هستند. نمودار $\overline{y}_{ij.} - \hat{y}_{ijk}$ (متوسطهای خانه‌ای منهای مقدار برازانده شده به‌آن خانه) را نسبت به‌مقدار برازانده شده $\hat{y}_{ijk}$ در شکل ۱۰.۷ نشان داده‌ایم. اینک مقادیر $\overline{y}_{ij.} - \hat{y}_{ijk}$ را می‌توان به‌صورت تفاوتهای بین میانگینهای خانه‌ای مشاهده‌شده ومیانگینهای برآورد شده و با قبول عدم وجود اثر متقابل در نظر گرفت. ملاحظهٔ هر الگویی در این مقادیر، حکایت از وجود اثر متقابل می‌کند. شکل

جدول ۱۱.۷ تحلیل واریانس برای داده‌های طول عمر باطری و با قبول عدم وجود اثر متقابل

منبع تغییر	مجموع مربعات	درجات آزادی	میانگین مربعات	F_{0}
انواع مواد	۱۰۶۸۳٫۷۲	۲	۵۳۴۱٫۸۶	۵٫۹۵
دما	۳۹۱۱۸٫۷۲	۲	۱۹۵۵۸٫۳۶	۲۱٫۷۸
خطا	۲۷۸۴۴٫۵۲	۳۱	۸۹۸٫۲۱	
کل	۷۷۶۴۶٫۹۶	۳۵		

آزمون تک درجهٔ آزادی توکی برای ناجمعی بودن را می‌توان مستقیماً برای آزمون اثر متقابل در مدل بلوکی تصادفی‌شده به‌کار برد. اما، یادآور می‌شویم که وضعیتهای آزمایشی که به‌مدلهای بلوکی تصادفی‌شده و مدلهای عامل منتهی می‌شوند بسیار متفاوت‌اند. در مدل عاملی، تمامی ab اجرا به‌ترتیب تصادفی‌اند، درصورتی‌که در مدل بلوکی تصادفی‌شده، تصادفی‌کردن تنها درون بلوکها صورت می‌گیرد. بلوکها مقید به تصادفی‌شدن هستند. بنابراین روش جمع‌آوری داده‌ها و تفسیر دو مدل کاملاً متفاوت است.

۴.۷ مدلهای تصادفی و آمیخته

در بخشهای قبل پذیرفتیم که هر دو عاملهای A و B تثبیت شده‌اند. یعنی آزمایشگر مشخصاً a سطح عامل A و b سطح عامل B را در طرح به‌کار برده است، و در نتیجه، استنباطهای حاصل از تحلیل واریانس تنها در مورد سطوحی از A و B که واقعاً به‌کار رفته‌اند قابل کار بردند. در این بخش دو مدل دیگر را در نظر می‌گیریم: مدل اثرهای تصادفی که در آن سطوح A و B به‌طور تصادفی انتخاب می‌شوند و مدل آمیخته که در آن یک عامل، تثبیت شده و دیگری تصادفی است.

۱.۴.۷ مدل اثرهای تصادفی

وضعیتی را در نظر می‌گیریم که در آن سطوح عوامل A و B هر دو به‌طور تصادفی از جامعه‌های بزرگتر انتخاب شده باشند. این، مدل اثرهای تصادفی یا مدل مؤلفه‌های واریانس است. به‌دلیل انتخاب تصادفی a سطح A و b سطح B، استنباطها در مورد تمامی سطوح جامعه‌های تحت مطالعه معتبرند. می‌توان مشاهدات را به‌وسیلهٔ مدل خطی زیر بیان کرد

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk} \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, a \\ j = 1, 2, \ldots, b \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \quad (۲۶.۷)$$

که در آن پارامترهای مدل τ_i، β_j، $(\tau\beta)_{ij}$، و ϵ_{ijk} متغیرهای تصادفی‌اند. به‌خصوص می‌پذیریم که $\tau_i \sim \mathrm{NID}(0, \sigma_\tau^2)$، $\beta_j \sim \mathrm{NID}(0, \sigma_\beta^2)$، $(\tau\beta)_{ij} \sim \mathrm{NID}(0, \sigma_{\tau\beta}^2)$ و $\epsilon_{ijk} \sim \mathrm{NID}(0, \sigma^2)$ هستند. واریانس هر مشاهده

$$V(y_{ijk}) = \sigma_\tau^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\tau\beta}^2 + \sigma^2$$

است، و σ_τ^2، σ_β^2، $\sigma_{\tau\beta}^2$ و σ^2 را مؤلفه‌های واریانس می‌نامند. فرضهایی که به آزمون آنها علاقه‌مندیم عبارت‌اند از $H_0 : \sigma_\tau^2 = 0$، $H_0 : \sigma_\beta^2 = 0$، و $H_0 : \sigma_{\tau\beta}^2 = 0$. به‌شباهت این با مدل اثرهای تصادفی تک عاملی توجه کنید.

تحلیل واریانس پایه‌ای، بی‌تغییر باقی می‌ماند؛ یعنی SS_A، SS_B، SS_{AB}، $SS_{\text{کل}}$ و $SS_{\text{خطا}}$ همگی مثل حالت اثرهای تثبیت شده محاسبه می‌شوند. اما، برای تشکیل آماره‌های آزمون باید امید ریاضی میانگین مربعات را بررسی کرد. می‌توان نشان داد که

$$\begin{aligned} E(MS_A) &=\sigma^۲ + n\sigma^۲_{\tau\beta} + bn\sigma^۲_\tau \\ E(MS_B) &=\sigma^۲ + n\sigma^۲_{\tau\beta} + an\sigma^۲_\beta \\ E(MS_{AB}) &=\sigma^۲ + n\sigma^۲_{\tau\beta} \end{aligned} \tag{۲۷.۷}$$

و

$$E(MS_{\text{خطا}}) =\sigma^۲$$

از امید ریاضی میانگین مربعات می‌بینیم که آمارهٔ مناسب برای آزمون فرض عدم وجود اثر متقابل، یعنی برای $H_۰ : \sigma^۲_{\tau\beta} = ۰$،

$$F_۰ = \frac{MS_{AB}}{MS_{\text{خطا}}} \tag{۲۸.۷}$$

است، زیرا تحت فرض $H_۰$ امید ریاضی صورت و مخرج کسر $F_۰$، $\sigma^۲$ است و تنها وقتی $H_۰$ نادرست است $E(MS_{AB})$ بزرگتر از $E(MS_{\text{خطا}})$ می‌شود. نسبت $F_۰$ توزیع $F_{(a-۱)(b-۱),ab(n-۱)}$ دارد. همچنین، برای آزمون $H_۰ : \sigma^۲_\tau = ۰$ از

$$F_۰ = \frac{MS_A}{MS_{AB}} \tag{۲۹.۷}$$

استفاده می‌کنیم که دارای توزیع $F_{a-۱,(a-۱)(b-۱)}$ است، و برای آزمون $H_۰ : \sigma^۲_\beta = ۰$ آمارهٔ آزمون به‌صورت

$$F_۰ = \frac{MS_B}{MS_{AB}} \tag{۳۰.۷}$$

است که دارای توزیع $F_{b-۱,(a-۱)(b-۱)}$ است. اینها تماماً آزمونهای یکطرفه‌اند. توجه کنید که این آماره‌های آزمون مانند وقتی‌که هر دو عامل A و B تثبیت شده‌اند نیست. امیدریاضی میانگین مربعات همیشه راهنمای ساخت آمارهٔ آزمون است.

مثال ۳.۷

فرض کنید در مثال ۱.۷ تعداد زیادی از انواع مواد و بسیاری از دماهای متفاوت را بتوان انتخاب کرد، و آنهایی که در جدول ۷.۷ آمده‌اند به‌طور تصادفی انتخاب شده باشند. این مدل، مدل اثرهای

جدول ۱۵.۷ تحلیل واریانس برای مثال ۳.۷، مدل اثرهای تصادفی

منبع تغییر	مجموع مربعات	درجات آزادی	میانگین مربعات	$F_\circ$
انواع مواد	۱۰۶۸۳٫۷۲	۲	۵۳۴۱٫۸۶	۲٫۲۲
دما	۳۹۱۱۸٫۷۲	۲	۱۹۵۵۹٫۳۶	*۸٫۱۳
اثر متقابل	۹۶۱۳٫۷۸	۴	۲۴۰۳٫۴۴	*۳٫۵۶
خطا	۱۸۲۳۰٫۷۵	۲۷	۶۷۵٫۲۱	
کل	۷۷۶۴۶٫۹۷	۳۵		

* معنی‌دار در پنج درصد.

تصادفی است، و تحلیل واریانس را در جدول ۱۵.۷ نشان داده‌ایم. می‌بینیم که چهار ستون اول جدول تحلیل واریانس با جدول مثال ۱.۷ یکی است. اما در اینجا باید نسبتهای F به‌موجب معادلات (۲۸.۷)، (۲۹.۷)، و (۳۰.۷) محاسبه شوند. اثر متقابل در سطح ۵ درصد هنوز معنی‌دار است، و چون ۶٫۹۴ $= F_{\circ/\circ 5,2,4}$ نتیجه می‌گیریم که اثر دما معنی‌دار است، اما انواع مواد به‌صورت معنی‌دار در طول عمر باطری مؤثر نیستند. ولی نوع مواد هنوز به‌دلیل وجود آن در اثر متقابل مهم است. ∎

مؤلفه‌های واریانس را می‌توان به روش تحلیل واریانس برآورد کرد؛ یعنی، با مساوی قرار دادن میانگین مربعات در سطرهای جدول تحلیل واریانس با مقادیر امیدریاضی آنها، و سپس حل آن برای مؤلفه‌های واریانس. با انجام این عمل نتیجه می‌شود

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}^2 &= MS_{\text{خطا}} \\
\hat{\sigma}^2_{\tau\beta} &= \frac{MS_{AB} - MS_{\text{خطا}}}{n} \\
\hat{\sigma}^2_{\beta} &= \frac{MS_B - MS_{AB}}{an} \\
\hat{\sigma}^2_{\tau} &= \frac{MS_A - MS_{AB}}{bn}
\end{aligned}
\qquad (۳۱.۷)
$$

در توضیح روش، مؤلفه‌های واریانس را، برای وضعیت آزمایشی توصیف شده در مثال ۳.۷ برآورد می‌کنیم. از معادلات (۳۱.۷) به‌دست می‌آوریم:

$$\hat{\sigma}_\tau^{۲} = \frac{۵۳۴۱٫۸۶ - ۲۴۰۳٫۴۴}{(۳)(۴)} = ۲۴۴٫۸۷$$

$$\hat{\sigma}_\beta^{۲} = \frac{۱۹۵۵۸٫۳۶ - ۲۴۰۳٫۴۴}{(۳)(۴)} = ۱۴۲۹٫۵۸$$

$$\hat{\sigma}_{\tau\beta}^{۲} = \frac{۲۴۰۳٫۴۴ - ۶۷۵٫۲۱}{۴} = ۴۳۲٫۰۶$$

$$\hat{\sigma} = ۶۷۵٫۲۱$$

تعیین بازهٔ اطمینان برای برآورد $\sigma^{۲}$ با استفاده از توزیع مربع خی امکان‌پذیر است، زیرا که $ab(n-۱)MS_{\text{خطا}}/\sigma^{۲}$ توزیع $\chi^{۲}_{ab(n-۱)}$ دارد. اما برای مؤلفه‌های دیگر واریانس، بازه‌های اطمینان دقیق را به‌دلائلی که در بخش ۵.۳ گفته شد نمی‌توان به‌دست آورد. شیوه‌های تقریبی تعیین بازهٔ اطمینان برای مؤلفه‌های واریانس در سیرل[1] (۱۹۷۱b و ۱۹۷۱a) آمده است.

۲.۴.۷ مدلهای آمیخته

اینک وضعیتی را در نظر می‌گیریم که در آن یکی از عوامل مثلاً A، تثبیت شده و دیگری یعنی B تصادفی است. این را مدل تحلیل واریانس آمیخته می‌نامند. مدل خطی آماری

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk} \begin{cases} i = ۱, ۲, \ldots, a \\ j = ۱, ۲, \ldots, b \\ k = ۱, ۲, \ldots, n \end{cases} \qquad (۳۲.۷)$$

است. در اینجا τ_i اثر تثبیت شده، β_j اثر تصادفی، و ϵ_{ijk} خطای تصادفی است. اثر متقابل $(\tau\beta)_{ij}$ را تصادفی می‌گیریم. همچنین می‌پذیریم که $\{\tau_i\}$ اثرهای تثبیت شده به‌گونه‌ای است که $\sum_{i=۱}^{a} \tau_i = ۰$ و می‌پذیریم که β_j متغیرهای تصادفی $\mathrm{NID}(۰, \sigma_\beta^{۲})$ هستند. اثر متقابل؛ $(\tau\beta)_{ij}$ یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین صفر و واریانس $[(a-۱)/a]\sigma_{\tau\beta}^{۲}$ است؛ اما، مجموع مؤلفه‌های اثر متقابل روی عامل تثبیت شده صفر است، یعنی

$$\sum_{i=۱}^{a} (\tau\beta)_{ij} = (\tau\beta)_{.j} = ۰ \quad j = ۱, ۲, \ldots, b$$

[1] Searle

این نتیجه می‌دهد که عناصر اثر متقابل در سطوح متفاوت عامل تثبیت شده مستقل نیستند. در حقیقت، می‌توان نشان داد (مسألهٔ ۲۴.۷ را ببینید) که

در مسألهٔ ۲۴.۷ که نشان داده است. (صفحهٔ ۳۰۰)

$$\mathrm{Cov}[(\tau\beta)_{ij}\ (\tau\beta)_{i'j}] = -\frac{1}{a}\sigma^2_{\tau\beta} \quad i \neq i'$$

کوواریانس $(\tau\beta)_{ij'}$ و $(\tau\beta)_{ij}$ برای $j \neq j'$ صفر و خطای تصادفی ϵ_{ijk}، $\mathrm{NID}(0, \sigma^2)$ است. در این مدل، واریانس $(\tau\beta)_{ij}$ را به‌منظور ساده شدن امید ریاضی میانگین مربعات به‌جای $\sigma^2_{\tau\beta}$ به‌صورت $[(a-1)/a]\sigma^2_{\tau\beta}$ تعریف می‌کنیم. پذیرهٔ $(\tau\beta)_{.j} = 0$ نیز در امید ریاضی میانگین مربعات اثر دارد که می‌توان نشان داد

$$\begin{aligned} E(MS_A) &= \sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta} + \frac{bn\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2}{a-1} \\ E(MS_B) &= \sigma^2 + an\sigma^2_{\beta} \\ E(MS_{AB}) &= \sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta} \end{aligned} \qquad (۳۳.۷)$$

،

و

$$E(MS_{\text{خطا}}) = \sigma^2$$

بنابراین، برای آزمون $H_0 : \tau_i = 0$، آمارهٔ مناسب آزمون

$$F_0 = \frac{MS_A}{MS_{AB}}$$

است که توزیع $F_{a-1,(a-1)(b-1)}$ دارد. برای آزمون $H_0 : \sigma^2_\beta = 0$، آمارهٔ آزمون

$$F_0 = \frac{MS_B}{MS_{\text{خطا}}}$$

خواهد بود که توزیع $F_{b-1,ab(n-1)}$ دارد. بالاخره برای آزمون $H_0 : \sigma^2_{\tau\beta} = 0$ از

$$F_0 = \frac{MS_{AB}}{MS_{\text{خطا}}}$$

استفاده می‌کنیم که توزیع $F_{(a-1)(b-1),ab(n-1)}$ دارد.

در مدل آمیخته، می‌توان اثرهای عامل تثبیت شده را به‌صورت زیر برآورد کرد

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= \overline{y}_{\ldots} \\ \hat{\tau}_i &= \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{\ldots} \qquad i = ۱, ۲, \ldots, a\end{aligned} \qquad (۳۴.۷)$$

مؤلفه‌های واریانس، $\sigma^۲_\beta$، $\sigma^۲_{\tau\beta}$، $\sigma^۲$ را می‌توان با استفاده از روش تحلیل واریانس برآورد کرد. با حذف اولین معادله از دستگاه معادلات (۳۳.۷)، سه معادله با سه مقدار نامعلوم باقی می‌مانند که جوابهای آنها عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^۲_\beta &= \frac{MS_B - MS_{\text{خطا}}}{an} \\ \hat{\sigma}^۲_{\tau\beta} &= \frac{MS_{AB} - MS_{\text{خطا}}}{n}\end{aligned} \qquad (۳۵.۷)$$

و

$$\hat{\sigma}^۲ = MS_{\text{خطا}}$$

برای برآورد مؤلفه‌های واریانس هر مدل آمیخته، می‌توان از این شیوهٔ کلی استفاده کرد. بعد از حذف میانگین مربعات شامل عوامل تثبیت شده، همیشه مجموعه معادلاتی باقی می‌مانند که می‌توان برای مؤلفه‌های واریانس آنها را حل کرد.

جدول ۱۶.۷ خلاصهٔ تحلیل واریانس برای مدل آمیختهٔ دو عاملی است. در مدلهای آمیخته آزمون کردن فرضهایی دربارهٔ میانگینهای تکی تیماری برای عامل تثبیت شده امکان دارد. در استفاده از روشهایی مانند آزمون دامنهٔ چندگانهٔ دانکن باید در استفاده از خطای معیار صحیح میانگین تیمار ورزیده بود. اندرسن و مکلین (۱۹۷۴) نشان داده‌اند که خطای معیار اثر تثبیت شدهٔ میانگین تیماری، برابر

جدول ۱۶.۷ تحلیل واریانس برای مدل آمیختهٔ دو عاملی

منبع تغییر	مجموع مربعات	درجات آزادی	امیدریاضی میانگین مربعات
سطرها (A)	SS_A	$a - ۱$	$\sigma^۲ + n\sigma^۲_{\tau\beta} + bn\sum \tau_i^۲/(a-۱)$
ستونها (B)	SS_B	$b - ۱$	$\sigma^۲ + an\sigma^۲_\beta$
اثر متقابل	SS_{AB}	$(a-۱)(b-۱)$	$\sigma^۲ + n\sigma^۲_{\tau\beta}$
خطا	$SS_{\text{خطا}}$	$ab(n-۱)$	$\sigma^۲$
کل	$SS_{\text{کل}}$	$abn - ۱$	

$$\left[\frac{\text{میانگین مربع برای آزمون اثر تثبیت شده}}{\text{تعداد مشاهدات در هر میانگین تیماری}}\right]^{1/2}$$

است.

مدلهای آمیختهٔ دیگر. صورتهای متفاوتی از مدلهای آمیخته پیشنهاد شده‌اند. این مدلها با مدل آمیختهٔ «استاندارد» که بحث آن گذشت از لحاظ پذیره‌های مربوط به مؤلفه‌های تصادفی متفاوت‌اند. یکی از این مدلها را به‌اختصار مورد بحث قرار می‌دهیم.

مدل زیر را در نظر بگیرید

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \gamma_j + (\alpha\gamma)_{ij} + \epsilon_{ijk}$$

که در آن $\alpha_i (i = 1, 2, \ldots, a)$ اثرهای تثبیت شده‌اند به‌طوری که $\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0$ و γ_i، $(\alpha\gamma)_{ij}$، ϵ_{ijk} متغیرهای تصادفی ناهمبسته‌اند که دارای میانگین صفر و واریانسهای $V(\gamma_i) = \sigma_\gamma^2$، $V[(\alpha\gamma)_{ij}] = \sigma_{\alpha\gamma}^2$، و $V(\epsilon_{ijk}) = \sigma^2$ هستند. توجه کنید که تفاوت عمدهٔ بین این مدل آمیخته و مدل قبلی در پذیرهٔ ناهمبسته بودن اثرهای متقابل است.

امیدریاضی میانگین مربعات برای این مدل عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}
E(MS_A) &= \sigma^2 + n\sigma_{\alpha\gamma}^2 + \frac{bn \sum_{i=1}^{a} \alpha_i^2}{a-1} \\
E(MS_B) &= \sigma^2 + n\sigma_{\alpha\gamma}^2 + an\sigma_\gamma^2 \\
E(MS_{AB}) &= \sigma^2 + n\sigma_{\alpha\gamma}^2
\end{aligned}$$

و

$$E(MS_{\text{خطا}}) = \sigma^2$$

توجه کنید که در مقایسهٔ این امید ریاضی میانگین مربعات و آنهایی که در جدول ۱۶.۷ آمده‌اند تنها تفاوت آشکار، وجود مؤلفهٔ واریانس $\sigma_{\alpha\gamma}^2$ در امید ریاضی میانگین مربعات برای اثر تصادفی است. (در واقع، به‌دلیل تعاریف متفاوت واریانس اثر متقابل در دو مدل، تفاوتهای دیگری نیز وجود دارند.) در نتیجه، این آزمون فرض را که مؤلفهٔ واریانس برای اثر تصادفی برابر صفر است $(H_0 : \sigma_\gamma^2 = 0)$ با استفاده از آمارهٔ

$$F_0 = \frac{MS_B}{MS_{AB}}$$

انجام می‌دهیم، که در مقابله با مدل استاندارد برای آزمون $H_\circ : \sigma_\beta^2 = \circ$ با $F_\circ = MS_B/MS_{\text{خطا}}$ است. با استفاده از این مدل، آزمون می‌تواند محافظه‌کارتر باشد زیرا که عموماً MS_{AB} بزرگتر از $MS_{\text{خطا}}$ است.

پارامترهای دو مدل خیلی به‌هم وابسته‌اند. در واقع می‌توان نشان داد که،

$$\beta_j = \gamma_j + (\overline{\alpha\gamma})_{.j}$$

$$(\tau\beta)_{ij} = (\alpha\gamma)_{ij} + (\overline{\alpha\gamma})_{.j}$$

$$\sigma_\beta^2 = \sigma_\beta^2 + \frac{1}{a}\sigma_{\alpha\gamma}^2$$

و

$$\sigma_{\tau\beta}^2 = \sigma_{\alpha\gamma}^2$$

برای برآورد مؤلفه‌های واریانس می‌توان از روش تحلیل واریانس استفاده کرد. با مراجعه به امید ریاضی میانگین مربعات می‌بینیم که تنها تغییر در معادلات (۳۵.۷) آن است که

$$\hat{\sigma}_\beta^2 = \frac{MS_B - MS_{AB}}{an}$$

هر دوی این مدلها حالتهای خاص مدل آمیخته‌ای هستند که شفه (۱۹۵۶a, ۱۹۵۹) پیشنهاد کرده است. در این مدل می‌پذیرند که مشاهدات را می‌توان به‌صورت

$$y_{ijk} = m_{ij} + \epsilon_{ijk} \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, a \\ j = 1, 2, \ldots, b \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

بیان کرد، که در آن m_{ij} و ϵ_{ijk} متغیرهای تصادفی مستقل‌اند. ساختار m_{ij}،

$$m_{ij} = \mu + \tau_i + b_j + c_{ij}$$

$$E(m_{ij}) = \mu + \tau_i$$

$$\sum_{i=1}^{a} \tau_i = \circ$$

و

$$c_{.j} = \circ \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, b$$

است. واریانسها و کوواریانسهای b_j و c_{ij} برحسب کوواریانسهای m_{ij} بیان می‌شوند. به‌علاوه، پارامترهای اثرهای تصادفی در فرمولبندیهای دیگر مدل آمیخته را می‌توان به b_j و c_{ij} وابسته کرد. تحلیل آماری مدل شفه با مدل استاندارد ما یکی است، بجز اینکه آمارهٔ MS_A/MS_{AB} به‌طور کلی همیشه وقتی $H_\circ : \tau_i = \circ$ درست است دارای توزیع F نیست.

به‌لحاظ تعدد مدلهای آمیخته یک سؤال منطقی این است که از کدام مدل استفاده کنیم؟ اکثر آماردانها مدل استاندارد را ترجیح می‌دهند، که در ادبیات آماری غالباً با این مدل مواجهاند. اگر ساختار همبستهٔ مؤلفه‌های تصادفی بزرگ نباشد، آن‌گاه مدل آمیخته مناسب است و بین این مدلها تنها تفاوتهای جزئی وجود دارد. بعدها وقتی به‌مدلهای آمیخته رجوع می‌شود، ساختار مدل استاندارد را می‌پذیریم. اما، اگر همبستگیهای داده‌ها زیاد باشد، آن‌گاه ممکن است از مدل شفه استفاده کنیم. انتخاب مدل همیشه باید به‌وسیلهٔ داده‌ها القا شود. مقالهٔ هاکینگ[1] (۱۹۷۳) خلاصهٔ روشنی از مدلهای آمیختهٔ مختلف است.

جدول ۱۷.۷ پارامترهای منحنی مشخصهٔ عملکرد برای جداول V و VI پیوست در مورد مدلهای دو عاملی با اثرهای تصادفی و آمیخته

مدل اثرهای تصادفی			
عامل	λ	درجات آزادی صورت	درجات آزادی مخرج
A	$\sqrt{1+\dfrac{bn\sigma_\tau^2}{\sigma^2+n\sigma_{\tau\beta}^2}}$	$a-1$	$(a-1)(b-1)$
B	$\sqrt{1+\dfrac{an\sigma_\beta^2}{\sigma^2+n\sigma_{\tau\beta}^2}}$	$b-1$	$(a-1)(b-1)$
AB	$\sqrt{1+\dfrac{n\sigma_{\tau\beta}^2}{\sigma^2}}$	$(a-1)(b-1)$	$ab(n-1)$

مدل آمیخته				
عامل	پارامتر	درجات آزادیٔ صورت	درجات آزادی مخرج	نمودار پیوست
A (تثبیت شده)	$\Phi^2 = \dfrac{bn\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2}{a[\sigma^2+n\sigma_{\tau\beta}^2]}$	$a-1$	$(a-1)(b-1)$	V
B (تصادفی)	$\lambda = \sqrt{1+\dfrac{an\sigma_\beta^2}{\sigma^2}}$	$b-1$	$ab(n-1)$	VI
AB	$\lambda = \sqrt{1+\dfrac{n\sigma_{\tau\beta}^2}{\sigma^2}}$	$(a-1)(b-1)$	$ab(n-1)$	VI

1. Hocking

۳.۴.۷ انتخاب حجم نمونه

از منحنیهای مشخصهٔ عملکرد در پیوست می‌توان برای تحلیل واریانس مدل اثرهای تصادفی و مدل آمیختهٔ دو عاملی استفاده کرد. برای مدل اثرهای تصادفی از نمودار VI پیوست استفاده می‌کنیم. پارامتر λ درجهٔ آزادی صورت است، و درجهٔ آزادی مخرج را در نیمهٔ بالای جدول ۱۷.۷ نشان داده‌ایم. برای مدلهای آمیخته باید از هر دو نمودار V و VI پیوست استفاده کنیم. مقادیر مناسب $\Phi^۲$ و λ را در نیمهٔ پایین جدول ۱۷.۷ آورده‌ایم.

۵.۷ طرح عاملی کلی

نتایج طرح عاملی را می‌توان به‌حالت کلی، وقتی‌که در یک آزمایش عاملی a سطح برای عامل A، b سطح برای عامل B، c سطح برای عامل C، و الی آخر وجود دارند، تعمیم داد. به‌طور کلی، اگر در آزمایش کامل n تکرار وجود داشته باشند، مجموعاً $abc\ldots n$ مشاهده خواهیم داشت. بار دیگر متذکر می‌شویم که اگر تمام اثرهای متقابل ممکن در مدل وجود داشته باشند برای تعیین مجموع مربعات مربوط به‌خطا باید حداقل ($n \geqslant ۲$) تکرار داشته باشیم.

اگر تمام عوامل در آزمایش، تثبیت شده باشند، می‌توانیم به‌سهولت مدل را فرمولبندی کرده و فرضهای مربوط به اثرهای اصلی و اثرهای متقابل را آزمون کنیم. برای مدل اثرهای تثبیت شده، آماره‌های آزمون برای هر اثر اصلی و اثر متقابل را می‌توان از تقسیم میانگین مربعات مربوط به اثر یا اثرهای متقابل بر میانگین مربع خطا به‌دست آورد. تمام این‌گونه آزمونهای F آزمونهای یک دنباله‌ای در دنبالهٔ بالای توزیع‌اند. تعداد درجات آزادی برای هر اثر اصلی برابر تعداد سطوح آن عامل منهای یک، و تعداد درجات آزادی برای اثر متقابل برابر حاصلضرب تعداد درجات آزادی مؤلفه‌های فردی اثر متقابل است.

مثلاً، مدل تحلیل واریانس سه‌عاملی

$$y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\tau\beta\gamma)_{ijk} + \epsilon_{ijkl} \begin{cases} i = ۱, ۲, \ldots, a \\ j = ۱, ۲, \ldots, b \\ k = ۱, ۲, \ldots, c \\ l = ۱, ۲, \ldots, n \end{cases} \qquad (۳۶.۷)$$

را در نظر بگیرید. با قبول اینکه A، B، و C تثبیت شده‌اند، جدول تحلیل واریانس را به‌صورت جدول ۱۸.۷ نشان داده‌ایم. آزمونهای F مربوط به اثرهای اصلی و اثرهای متقابل مستقیماً از امید ریاضی میانگین مربعات نتیجه می‌شوند.

جدول ۱۸.۷ جدول تحلیل واریانس برای مدل اثرهای تثبیت شده با سه عامل

منبع تغییر	مجموع مربعات	درجات آزادی	میانگین مربعات	امید ریاضی میانگین مربعات	F.
A	SS_A	$a-1$	MS_A	$\sigma^2 + \frac{bcn\sum \tau_i^2}{a-1}$	$F. = \frac{MS_A}{MS_{\text{خطا}}}$
B	SS_B	$b-1$	MS_B	$\sigma^2 + \frac{acn\sum \beta_j^2}{b-1}$	$F. = \frac{MS_B}{MS_{\text{خطا}}}$
C	SS_C	$c-1$	MS_C	$\sigma^2 + \frac{abn\sum \gamma_k^2}{c-1}$	$F. = \frac{MS_C}{MS_{\text{خطا}}}$
AB	SS_{AB}	$(a-1)(b-1)$	MS_{AB}	$\sigma^2 + \frac{cn\sum\sum(\tau\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$	$F. = \frac{MS_{AB}}{MS_{\text{خطا}}}$
AC	SS_{AC}	$(a-1)(c-1)$	MS_{AC}	$\sigma^2 + \frac{bn\sum\sum(\tau\gamma)_{ik}^2}{(a-1)(c-1)}$	$F. = \frac{MS_{AC}}{MS_{\text{خطا}}}$
BC	SS_{BC}	$(b-1)(c-1)$	MS_{BC}	$\sigma^2 + \frac{an\sum\sum(\beta\gamma)_{jk}^2}{(b-1)(c-1)}$	$F. = \frac{MS_{BC}}{MS_{\text{خطا}}}$
ABC	SS_{ABC}	$(a-1)(b-1)(c-1)$	MS_{ABC}	$\sigma^2 + \frac{n\sum\sum\sum(\tau\beta\gamma)_{ijk}^2}{(a-1)(b-1)(c-1)}$	$F. = \frac{MS_{ABC}}{MS_{\text{خطا}}}$
خطا	$SS_{\text{خطا}}$	$abc(n-1)$	$MS_{\text{خطا}}$	σ^2	
کل	$SS_{\text{کل}}$	$abcn-1$			

در جدول ۱۸.۷ فرمولهای محاسبهٔ مجموع مربعات را داده‌ایم. کل مجموع مربعات به‌روال معمول به‌صورت

$$SS_{\text{کل}} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{n} y_{ijkl}^{2} - \frac{y_{....}^{2}}{abcn} \qquad (۳۷.۷)$$

به‌دست می‌آید. مجموع مربعات برای اثرهای اصلی از روی مجموعهای عوامل، $A(y_{i...})$، $B(y_{.j..})$، و $C(y_{..k.})$ تعیین می‌شوند

$$SS_A = \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i...}^{2}}{bcn} - \frac{y_{....}^{2}}{abcn} \qquad (۳۸.۷)$$

$$SS_B = \sum_{j=1}^{b} \frac{y_{.j..}^{2}}{acn} - \frac{y_{....}^{2}}{abcn} \qquad (۳۹.۷)$$

$$SS_C = \sum_{k=1}^{c} \frac{y_{..k.}^{2}}{abn} - \frac{y_{....}^{2}}{abcn} \qquad (۴۰.۷)$$

برای محاسبهٔ مجموع مربعات مربوط به‌اثرهای متقابل دو عاملی، به‌مجموعهای عناصر خانه‌های $A \times B$، $A \times C$، و $B \times C$ نیاز است. اغلب تفکیک جدول اصلی داده‌ها به سه جدول دوطرفه برای محاسبهٔ این مقادیر مفید است. مجموع مربعات به‌صورت زیر تعیین می‌شوند

$$\begin{aligned} SS_{AB} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \frac{y_{ij..}^{2}}{cn} - \frac{y_{....}^{2}}{abcn} - SS_A - SS_B \\ &= SS_{\text{زیرمجموعها}(AB)} - SS_A - SS_B \end{aligned} \qquad (۴۱.۷)$$

$$\begin{aligned} SS_{AC} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{c} \frac{y_{i.k.}^{2}}{bn} - \frac{y_{....}^{2}}{abcn} - SS_A - SS_C \\ &= SS_{\text{زیرمجموعها}(AC)} - SS_A - SS_C \end{aligned} \qquad (۴۲.۷)$$

و

$$\begin{aligned} SS_{BC} &= \sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c} \frac{y_{.jk.}^{2}}{an} - \frac{y_{....}^{2}}{abcn} - SS_B - SS_C \\ &= SS_{\text{زیرمجموعها}(BC)} - SS_B - SS_C \end{aligned} \qquad (۴۳.۷)$$

توجه کنید که مجموع مربعات زیرمجموعهای دو عاملی از مجموع مربعات کل برای هر جدول دوطرفه پیدا می‌شود. مجموع مربعات مربوط به‌اثرهای متقابل سه عاملی از مجموعهای خانه‌ای

سه‌طرفه $\{y_{ijk.}\}$ به‌صورت

$$SS_{ABC} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\frac{y_{ijk.}^2}{n} - \frac{y_{....}^2}{abcn} - SS_A - SS_B - SS_C - SS_{AB} - SS_{AC} - SS_{BC} \tag{۴۴.۷ الف}$$

$$= SS_{(ABC)\text{زیرمجموعها}} - SS_A - SS_B - SS_C - SS_{AB} - SS_{AC} - SS_{BC} \tag{۴۴.۷ ب}$$

محاسبه می‌شود. مجموع مربعات خطا را می‌توان از تفریق مجموع مربعات برای هر اثر متقابل از مجموع کل مربعات، یا به‌وسیلهٔ

$$SS_{\text{خطا}} = SS_{\text{کل}} - SS_{(ABC)\text{زیرمجموعها}} \tag{۴۵.۷}$$

به‌دست آورد.

مثال ۴.۷

مسألهٔ پر کردن شیشه‌های نوشابه

مسؤول یک شرکت نوشابه پرکنی علاقه‌مند به‌یک نواخت کردن بیشتر ارتفاع نوشابه در داخل شیشه‌هایی است که در کارخانه پر می‌شوند. ماشین پر کن هر شیشه را به‌طور نظری در یک خط نشان صحیح پر می‌کند، اما عملاً تغییراتی حول این خط نشان وجود دارد، و مسؤول مربوطه علاقه‌مند به‌اطلاع بیشتر از این منبع تغییرپذیری و سرانجام، تقلیل آن است.

مهندس فرایند می‌تواند سه متغیر را طی فرایند پر کردن شیشه‌ها کنترل کند؛ درصد گازکربنیک (A)، فشار دستگاه پرکن (B)، و سرعت تسمه نقاله یا نرخ شیشه‌های پر شده در دقیقه. کنترل فشار و سرعت ساده است. اما کنترل درصد گازکربنیک طی پر کردن شیشه‌ها بسیار مشکل است. زیرا که با دمای فراورده تغییر می‌کند. اما برای هدفهای آزمایش مهندس فرایند می‌تواند گازکربنیک را در سه سطح ۱۰، ۱۲، ۱۴ درصد کنترل کند. وی دو سطح را برای فشار (۲۵ و ۳۰ پوند بر اینچ مربع) و دو سطح را برای سرعت نقاله (۲۰۰ و ۲۵۰ دور در دقیقه) در نظر گرفته است. او تصمیم می‌گیرد که با این سه عامل یک طرح عاملی با دو تکرار را اجرا کند، به‌گونه‌ای که تمامی ۲۴ اجرا به‌ترتیب تصادفی باشند. متغیر پاسخ مشاهده شده، متوسط انحراف از خط نشان مشاهده شده طی هر اجرا و طی هر مجموعه از شرایط است. داده‌های حاصل از این آزمایش را در جدول ۱۹.۷ نشان داده‌ایم. انحرافهای مثبت ارتفاع بالاتر از خط نشان‌اند، درصورتی‌که انحرافهای منفی ارتفاع پایینتر از خط نشان‌اند. اعداد داخل دایره در جدول ۱۹.۷ مجموعهای خانه‌ای سه‌طرفه $(y_{ijk.})$ هستند.

جدول ۱۹.۷ داده‌های انحراف ارتفاع سطح نوشابه برای مثال ۴.۷

	فشار دستگاه (B)				
	۲۵ پوند بر اینچ مربع		۳۰ پوند بر اینچ مربع		
	سرعت نقاله (C)		سرعت نقاله (C)		
درصد گازکربنیک (A)	۲۰۰	۲۵۰	۲۰۰	۲۵۰	$y_{i...}$
۱۰	−۳، −۱ (−۴)	−۱، ۰ (−۱)	−۱، ۰ (−۱)	۱، ۱ (۲)	−۴
۱۲	۰، ۱ (۱)	۲، ۱ (۳)	۲، ۳ (۵)	۶، ۵ (۱۱)	۲۰
۱۴	۵، ۴ (۹)	۷، ۶ (۱۳)	۷، ۹ (۱۶)	۱۰، ۱۱ (۲۱)	۵۹
مجموعهای $B \times C$ $y_{.jk.}$	۶	۱۵	۲۰	۳۴	$۷۵ = y_{....}$
$y_{.j..}$	۲۱		۵۴		

مجموعهای $A \times B$ ($y_{ij..}$)

A	B = ۲۵	۳۰
۱۰	−۵	۱
۱۲	۴	۱۶
۱۴	۲۲	۳۷

مجموعهای $A \times C$ ($y_{i.k.}$)

A	C = ۲۰۰	۲۵۰
۱۰	−۵	۱
۱۲	۶	۱۴
۱۴	۲۵	۳۴

کل مجموع مربعات تصحیح شده بنابر معادلهٔ (۳۷.۷) به‌صورت زیر تعیین می‌شود

$$SS_{\text{کل}} = \sum_{i=۱}^{a} \sum_{j=۱}^{b} \sum_{k=۱}^{c} \sum_{l=۱}^{n} y_{ijkl}^{۲} - \frac{y_{....}^{۲}}{abcn}$$

$$= ۵۷۱ - \frac{(۷۵)^{۲}}{۲۴} = ۳۳۶{,}۶۲۵$$

و مجموع مربعات مربوط به اثرهای اصلی بنابر معادلات (۳۸.۷)، (۳۹.۷)، و (۴۰.۷) به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند

$$SS_{\text{گازکربنیک}}=\sum_{i=۱}^{a}\frac{y_{i...}^{۲}}{bcn}-\frac{y_{....}^{۲}}{abcn}$$
$$=\frac{(-۴)^{۲}+(۲۰)^{۲}+(۵۹)^{۲}}{۸}-\frac{(۷۵)^{۲}}{۲۴}=۲۵۲٫۷۵۰$$

$$SS_{\text{فشار}}=\sum_{j=۱}^{b}\frac{y_{.j..}^{۲}}{acn}-\frac{y_{....}^{۲}}{abcn}$$
$$=\frac{(۲۱)^{۲}+(۵۴)^{۲}}{۱۲}-\frac{(۷۵)^{۲}}{۲۴}=۴۵٫۳۷۵$$

و

$$SS_{\text{سرعت}}=\sum_{k=۱}^{c}\frac{y_{..k.}^{۲}}{abn}-\frac{y_{....}^{۲}}{abcn}$$
$$=\frac{(۲۶)^{۲}+(۴۹)^{۲}}{۱۲}-\frac{(۷۵)^{۲}}{۲۴}=۲۲٫۰۴۲$$

برای محاسبهٔ مجموع مربعات اثرهای متقابل دو عاملی باید مجموعهای خانه‌ای دوطرفه را پیدا کنیم. مثلاً، برای تعیین اثر متقابل AB یا گازکربنیک و فشار به مجموعهای خانه‌ای $A\times B$، $\{y_{ij..}\}$ که آنها را در جدول ۱۹.۷ نشان داده‌ایم نیاز داریم. با استفاده از معادلهٔ(۴۱.۷) مجموع مربعات را به‌صورت

$$SS_{AB}=\sum_{i=۱}^{a}\sum_{j=۱}^{b}\frac{y_{ij..}^{۲}}{cn}-\frac{y_{....}^{۲}}{abcn}-SS_A-SS_B$$
$$=\frac{(-۵)^{۲}+(۱)^{۲}+(۴)^{۲}+(۱۶)^{۲}+(۲۲)^{۲}+(۳۷)^{۲}}{۴}-\frac{(۷۵)^{۲}}{۲۴}$$
$$-\,۲۵۲٫۷۵۰-۴۵٫۳۷۵$$
$$=۵٫۲۵۰$$

پیدا می‌کنیم. اثر متقابل گازکربنیک و سرعت یا اثر متقابل AC با استفاده از مجموعهای خانه‌ای $A\times C$ $\{y_{i.k.}\}$ که در جدول ۱۹.۷ نشان داده‌ایم و با استفاده از معادلهٔ (۴۲.۷) به‌این‌صورت است

$$SS_{AC}=\sum_{i=۱}^{a}\sum_{k=۱}^{c}\frac{y_{i.k.}^{۲}}{bn}-\frac{y_{....}^{۲}}{abcn}-SS_A-SS_C$$

$$=\frac{(-۵)^{۲}+(۱)^{۲}+(۶)^{۲}+(۱۴)^{۲}+(۲۵)^{۲}+(۳۴)^{۲}}{۴}-\frac{(۷۵)^{۲}}{۲۴}$$

$$-۲۵۲٫۷۵۰-۲۲٫۰۴۲$$

$$=۰٫۵۸۳$$

اثر متقابل فشار و سرعت یا اثر متقابل BC با استفاده از مجموعهای خانه‌ای $B\times C$، $\{y_{.jk.}\}$ که در جدول ۱۹.۷ نشان داده‌ایم و با استفاده از معادلهٔ (۴۳.۷) تعیین می‌شود:

$$SS_{BC}=\sum_{j=۱}^{b}\sum_{k=۱}^{c}\frac{y_{.jk.}^{۲}}{an}-\frac{y_{....}^{۲}}{abcn}-SS_B-SS_C$$

$$=\frac{(۶)^{۲}+(۱۵)^{۲}+(۲۰)^{۲}+(۳۴)^{۲}}{۶}-\frac{(۷۵)^{۲}}{۲۴}-۴۵٫۳۷۵-۲۲٫۰۴۲$$

$$=۱٫۰۴۲$$

مجموع مربعات اثر متقابل سه عاملی از طریق مجموعهای خانه‌ای $A\times B\times C$، $\{y_{ijk.}\}$ که در جدول ۱۹.۷ درون دایره‌ها مشخص شده‌اند تعیین می‌شود. بنابر معادلهٔ (۴۴.۷ الف) به‌دست می‌آوریم:

$$SS_{ABC}=\sum_{i=۱}^{a}\sum_{j=۱}^{b}\sum_{k=۱}^{c}\frac{y_{ijk.}^{۲}}{n}-\frac{y_{....}^{۲}}{abcn}-SS_A-SS_B-SS_C-SS_{AB}-SS_{AC}-SS_{BC}$$

$$=\frac{۱}{۲}[(-۴)^{۲}+(-۱)^{۲}+(-۱)^{۲}+\cdots+(۱۶)^{۲}+(۲۱)^{۲}]-\frac{(۷۵)^{۲}}{۲۴}$$

$$-۲۵۲٫۷۵۰-۴۵٫۳۷۵-۲۲٫۰۴۲-۵٫۲۵۰-۰٫۵۸۳-۱٫۰۴۲=۱٫۰۸۳$$

بالاخره با توجه به

$$SS_{(ABC)\text{زیرمجموعها}}=\sum_{i=۱}^{a}\sum_{j=۱}^{b}\sum_{k=۱}^{c}\frac{y_{ijk.}^{۲}}{n}-\frac{y_{....}^{۲}}{abcn}=۳۲۸٫۱۲۵$$

داریم

$$SS_{\text{خطا}} = SS_{\text{کل}} - SS_{(ABC)\text{زیرمجموعها}}$$
$$= ۳۳۶٫۶۲۵ - ۳۲۸٫۱۲۵$$
$$= ۸٫۵۰۰$$

تحلیل واریانس را در جدول ۲۰.۷ به‌اختصار آورده‌ایم. می‌بینیم که درصد گازکربنیک، فشار دستگاه، و سرعت نقاله به‌صورتی معنی‌دار بر حجم نوشابهٔ داخل شیشه مؤثرند. اثر متقابل گازکربنیک و فشار در ۱۰ درصد معنی‌دار است که نشان می‌دهد اثر متقابل خفیفی بین این دو عامل وجود دارد.

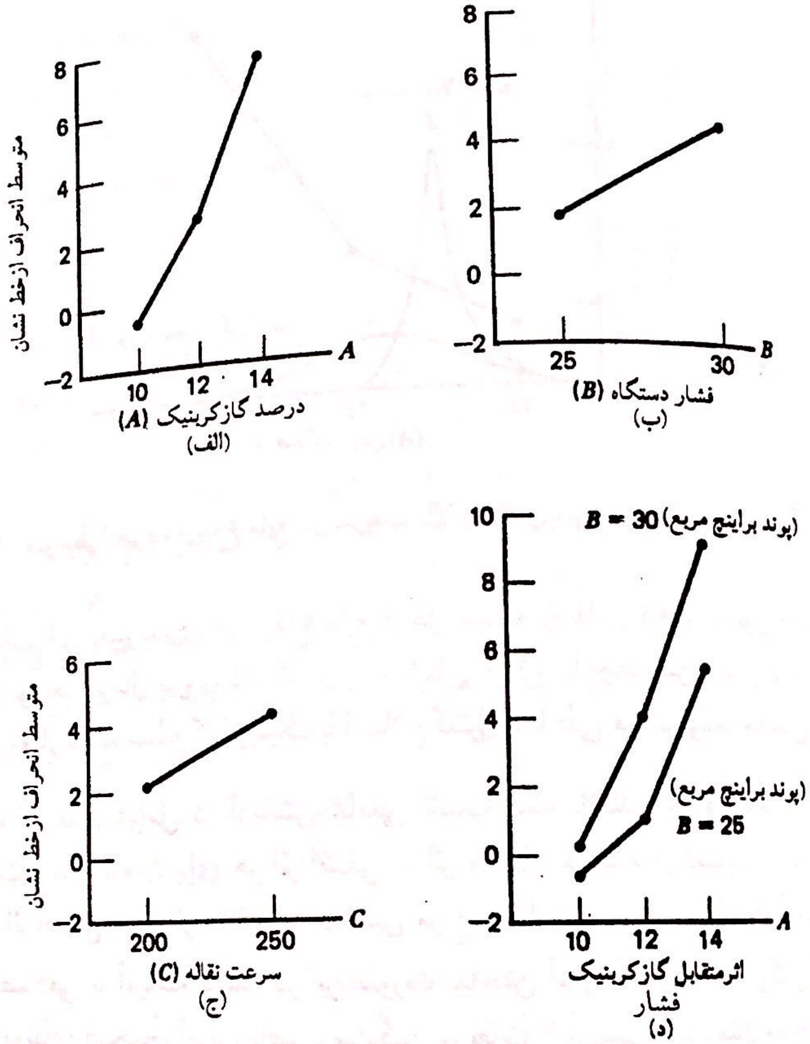
قدم بعدی باید تحلیل مانده‌های این آزمایش باشد. ما این مرحله را به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم، تنها به‌این نکته اشاره می‌کنیم که نمودار احتمال نرمال مانده‌ها و مشخصه‌های معمول دیگر هیچ‌گونه موضوع عمده‌ای را نشان نمی‌دهند.

برای کمک به‌تفسیر عملی این آزمایش، نمودارهای سه اثر اصلی و اثر متقابل AB (گازکربنیک، فشار دستگاه) را در شکل ۱۱.۷ آورده‌ایم. نمودارهای اثر اصلی در واقع متوسطهای پاسخ حاشیه‌ای در سطوح سه عامل‌اند. توجه کنید که هر سه متغیر دارای اثرهای اصلی مثبت‌اند؛ یعنی افزایش این متغیرها موجب حرکت مقدار متوسط انحراف از خط نشان به‌طرف بالا می‌شود. اثر متقابل میان گازکربنیک و فشار همچنان‌که با نمودارهای مشابه در شکل ۱۱.۷ (د) دیده می‌شود نسبتاً کم است

جدول ۲۰.۷ تحلیل واریانس برای مثال ۴.۷

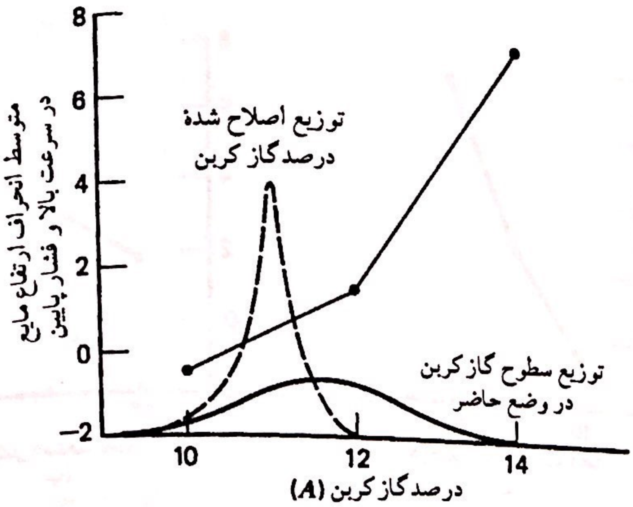
منبع تغییر	مجموع مربعات	درجات آزادی	میانگین مربعات	F_0
درصد گازکربنیک (A)	۲۵۲٫۷۵۰	۲	۱۲۶٫۳۷۵	*۱۷۸٫۴۱۲
فشار دستگاه (B)	۴۵٫۳۷۵	۱	۴۵٫۳۷۵	*۶۴٫۰۵۹
سرعت نقاله (C)	۲۲٫۰۴۲	۱	۲۲٫۰۴۲	*۳۱٫۱۱۸
AB	۵٫۲۵۰	۲	۲٫۶۲۵	**۳٫۷۰۶
AC	۰٫۵۸۳	۲	۰٫۲۹۲	۰٫۴۱۲
BC	۱٫۰۴۲	۱	۱٫۰۴۲	۱٫۴۷۱
ABC	۱٫۰۸۳	۲	۰٫۵۴۲	۰٫۷۶۵
خطا	۸٫۵۰۰	۱۲	۰٫۷۰۸	
کل	۳۳۶٫۶۲۵	۲۳		

* معنی‌دار در یک درصد.
** معنی‌دار در ده درصد.



شکل ۱۱.۷ نمودار اثرهای اصلی و اثر متقابل برای مثال ۴.۷. (الف) درصد گازکربنیک (A). (ب) فشار دستگاه (B). (ج) سرعت نقاله (C). (د) اثر متقابل گازکربنیک و فشار.

چون کارخانه می‌خواهد متوسط انحراف سطح نوشابه از خط نشان، نزدیک به‌صفر باشد، لذا مهندس فرایند تصمیم می‌گیرد که فشار دستگاه را در سطح پایین (۲۵ پوند بر اینچ مربع) و سرعت نقاله را در سطح بالا (۲۵۰ دور در دقیقه که موجب ماکسیمم نرخ تولید می‌شود) توصیه کند. شکل ۱۲.۷ نمودار متوسط انحراف مشاهده شده از خط نشان در سه سطح متفاوت گازکربنیک برای این مجموعه از شرایط عملکرد است. در اینجا سطح گازکربنیک را نمی‌توان کاملاً در فرایند تولید کنترل کرد، و توزیع نرمالی که با منحنی غیر خط‌چین در شکل ۱۲.۷ نشان داده‌ایم تغییرپذیری تقریبی سطح گازکربنیک تجزیه شده را ارائه می‌دهد. وقتی فرایند تحت تأثیر سطح گازکربنیک، براساس این توزیع، قرار می‌گیرد، سطح ارتفاع مایع داخل شیشه به‌صورتی قابل ملاحظه کم و زیاد می‌شود. در



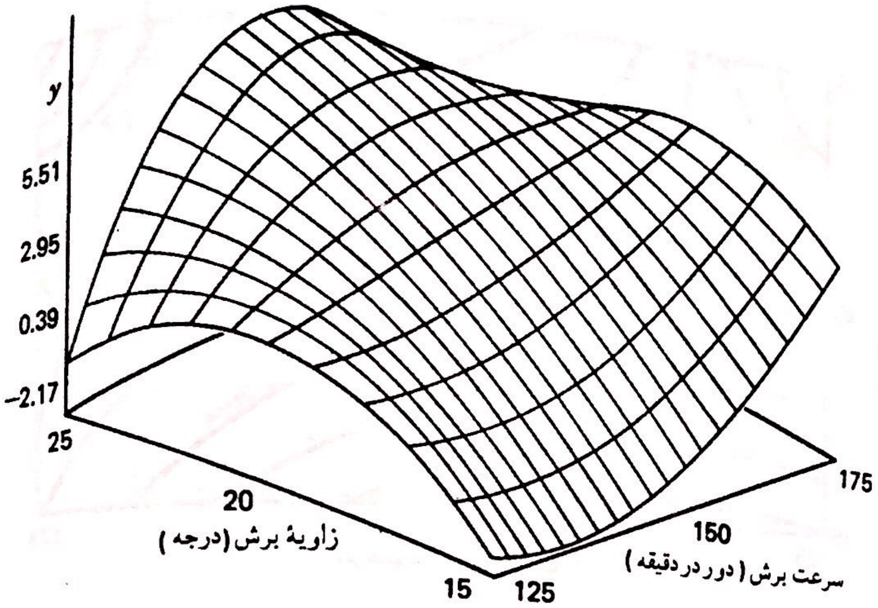
شکل ۱۲.۷ متوسط انحراف ارتفاع مایع در سرعت بالا و فشار پایین در سطوح متفاوت گازکربنیک.

صورتی می‌توانیم این تغییرپذیری در ارتفاع مایع داخل شیشه را تقلیل دهیم که توزیع مقادیر سطح گازکربنیک از توزیعی نرمال پیروی کند که آن‌را در شکل ۱۲.۷ با خط‌چین نشان داده‌ایم. بالاخره تقلیل انحراف معیار توزیع سطح گازکربنیک با اصلاح کنترل دما طی فرایند تولید حاصل می‌شود.

دیدیم که اگر تمام عوامل در آزمایش عاملی تثبیت شده باشند. آن‌گاه ساخت آمارهٔ آزمون سرراست است. آمارهٔ آزمون برای هر اثر اصلی یا اثر متقابل همیشه از تقسیم میانگین مربعات مربوط به آن اثر اصلی یا آن اثر متقابل بر میانگین مربع خطا پدید می‌آید. اما، اگر آزمایش عاملی شامل مدل تصادفی یا آمیخته باشد، در این‌صورت ساختن آمارهٔ آزمون بدواً روشن نیست. بله برای تعیین آزمونهای صحیح، امید ریاضی میانگین مربعات را باید بررسی کرد. مثلاً مدلهای تصادفی یا آمیختهٔ دو عاملی بخش ۴.۷ را یادآوری می‌کنیم، که در آنجا شیوهٔ مناسب آزمون مستقیماً از امیدریاضی میانگین مربعات به‌دست می‌آمد. پس به‌نظر می‌رسد که برای تعیین مقدار امیدریاضی میانگین مربعات به‌شیوه‌ای احتیاج داریم. بحث کامل این موضوع را تا فصل هشتم به تعویق می‌اندازیم. در آنجا مجموعهٔ قواعدی را برای به‌دست آوردن مجموع مربعات، درجات آزادی و امیدریاضی میانگین مربعات برای رده‌ای کلی از طرحها ارائه می‌دهیم.

۶.۷ برازش منحنیها و رویه‌های پاسخ

در بخش ۳.۴ متذکر شدیم که گهگاهی برازش منحنی پاسخ به سطوح یک عامل کمی، به‌طوری که آزمایشگر بتواند معادله‌ای داشته باشد که پاسخ را به‌عامل مربوط کند مفید خواهد بود. از این معادله می‌توان برای درونیابی، یعنی برای پیشگویی پاسخ به‌ازای سطوحی از عامل که واقعاً در آزمایش به‌کار رفته‌اند استفاده کرد. همان قواعد مورد بحث بخش ۳.۴ را می‌توان در مورد طرحهای عاملی که در



شکل ۱۶.۷ رویهٔ پاسخ سه بعدی طول عمر ابزار برای مثال ۶.۷.

۷.۷ رفتار با داده‌های نامتعادل

در این فصل توجه عمده معطوف تحلیل طرحهای عاملی متعادل بوده است، یعنی حالتهایی که در آنها تعداد مشاهدات در هر خانه مساوی‌اند. اما، مواجه شدن با وضعیتهایی که در آنها تعداد مشاهدات در خانه‌ها یکسان نیستند بعید نیست. این‌گونه طرحهای عاملی نامتعادل به‌دلایل مختلف پیش می‌آیند. مثلاً ممکن است آزمایشگر نخست طرح آزمایش متعادل را در نظر گرفته باشد، اما به‌دلیل مسائل پیش‌بینی نشده در جمع‌آوری داده‌ها، و در نتیجهٔ از دست دادن بعضی مشاهدات به‌داده‌های نامتعادل رسیده باشد. از طرف دیگر بعضی آزمایشهای نامتعادل عملاً طرح می‌شوند. مثلاً ممکن است بعضی ترکیبهای تیماری خاص نسبت به‌بقیه پر هزینه یا برای اجرا مشکلتر باشند، به‌طوری که مشاهدات کمتری بتوان در آن خانه‌ها برگزید. یا ممکن است بعضی ترکیبهای تیماری به‌دلیل اینکه شرایط جدید یا بررسی نشده‌ای فراهم می‌کنند که آزمایشگر را قادر می‌سازد تا تکرارهای دیگری در آن خانه‌هابه‌دست آورد بیشتر مورد نظر آزمایشگر باشند.

خاصیت متعامد بودن اثرهای اصلی و اثرهای متقابل موجود در داده‌های متعادل به‌حالت نامتعادل منتقل نمی‌شوند. این بدان معناست که تکنیکهای معمولی تحلیل واریانس کاربرد ندارند. در نتیجه تحلیل آزمایشهای عاملی نامتعادل بسیار مشکلتر از طرحهای متعادل است.

در این بخش به‌اختصار روشهای بررسی طرحهای عاملی نامتعادل را ارائه داده توجه خود را معطوف به‌حالت مدل دو عاملی با اثرهای تثبیت شده می‌کنیم. گیریم که تعداد مشاهدات در ijامین خانه n_{ij} باشد. به‌علاوه در نظر می‌گیریم که $n_{i.} = \sum_{j=1}^{b} n_{ij}$ تعداد مشاهدات در سطر iام (سطح iام عامل A)، $n_{.j} = \sum_{i=1}^{a} n_{ij}$ تعداد مشاهدات در ستون jام (سطح jام عامل B)، و $n_{..} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij}$ تعداد کل مشاهدات است.

۱.۷.۷ داده‌های متناسب: یک حالت ساده

وضعیتی مشتمل بر داده‌های نامتعادل که تحلیل آن کمتر اشکال دارد حالتی است که داده‌ها متناسب باشند. یعنی، تعداد مشاهدات در خانهٔ ijام برابر با

$$n_{ij} = \frac{n_{i.}n_{.j}}{n_{..}} \tag{۴۸.۷}$$

باشد. این حالت دلالت بر آن می‌کند که تعداد مشاهدات در هر دو سطر یا دو ستون متناسب‌اند. وقتی داده‌ها متناسب‌اند می‌توان تحلیل استاندارد واریانس را به‌کار برد. تنها اصلاحات جزئی در فرمولهای محاسباتی برای مجموع مربعات لازم می‌شود، که عبارت‌اند از:

$$SS_{\text{کل}} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk}^{2} - \frac{y_{...}^{2}}{n_{..}}$$

$$SS_A = \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i..}^{2}}{n_{i.}} - \frac{y_{...}^{2}}{n_{..}}$$

$$SS_B = \sum_{j=1}^{b} \frac{y_{.j.}^{2}}{n_{.j}} - \frac{y_{...}^{2}}{n_{..}}$$

$$SS_{AB} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \frac{y_{ij.}^{2}}{n_{ij}} - \frac{y_{...}^{2}}{n_{..}} - SS_A - SS_B$$

$$\begin{aligned} SS_{\text{خطا}} &= SS_{\text{کل}} - SS_A - SS_B - SS_{AB} \\ &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk}^{2} - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \frac{y_{ij.}}{n_{ij}} \end{aligned}$$

به‌عنوان مثالی از داده‌های متناسب، آزمایش طرح باطری مثال ۱.۷ را در نظر بگیرید. صورت اصلاح شدهٔ داده‌های اصلی را در جدول ۳۰.۷ نشان داده‌ایم. به‌وضوح داده‌ها متناسب‌اند؛ مثلاً تعداد مشاهدات در خانهٔ ۱ و ۱

$$n_{11} = \frac{n_{1.}n_{.1}}{n_{..}} = \frac{10(8)}{20} = 4$$

است. نتایج تحلیل واریانس معمولی این داده‌ها را در جدول ۳۱.۷ می‌بینید. هر دو نوع مواد و دما معنی‌دارند که با تحلیل داده‌های کامل مثال ۱.۷ مطابقت می‌کنند. اما اثر متقابل اشاره شده در مثال ۱.۷ در اینجا وجود ندارد.

جدول ۳۰.۷ آزمایش طرح باطری با داده‌های متناسب

نوع مواد	دما: ۱۵		دما: ۷۰		دما: ۱۲۵		
۱	$n_{۱۱} = ۴$		$n_{۱۲} = ۴$		$n_{۱۳} = ۲$		$n_{۱.} = ۱۰$
	۱۳۰	۱۵۵	۳۴	۴۰			
	۷۴	۱۸۰	۸۰	۷۵	۷۰	۵۸	$y_{۱..} = ۸۹۶$
۲	$n_{۲۱} = ۲$		$n_{۲۲} = ۲$		$n_{۲۳} = ۱$		$n_{۲.} = ۵$
	۱۵۹	۱۲۶	۱۳۶	۱۱۵	۴۵		$y_{۲..} = ۵۸۱$
۳	$n_{۳۱} = ۲$		$n_{۳۲} = ۲$		$n_{۳۳} = ۱$		$n_{۳.} = ۵$
	۱۳۸	۱۶۰	۱۵۰	۱۳۹	۹۶		$y_{۳..} = ۶۸۳$
	$n_{.۱} = ۸$		$n_{.۲} = ۸$		$n_{.۳} = ۴$		$n_{..} = ۲۰$
	$y_{.۱.} = ۱۱۲۲$		$y_{.۲.} = ۷۶۹$		$y_{.۳.} = ۲۶۹$		$y_{...} = ۲۱۶۰$

جدول ۳۱.۷ تحلیل واریانس برای داده‌های طرح باطری در جدول ۳۰.۷

منبع تغییر	مجموع مربعات	درجات آزادی	میانگین مربعات	$F_.$
انواع مواد	۸۱۷۰٫۴۰۰	۲	۴۰۸۵٫۲۰	۵٫۰۰
دما	۱۶۰۹۰٫۸۷۵	۲	۸۰۴۵٫۴۴	۹٫۸۵
اثر متقابل	۵۹۰۷٫۷۲۵	۴	۱۴۷۶٫۹۳	۱٫۱۸
خطا	۸۹۸۱٫۰۰۰	$N - ab$ ۱۱	۸۱۶٫۴۵	
کل	۳۹۱۵۰٫۰۰۰	۱۹		

$\boxed{df_E = N - ab}$

۲.۷.۷ روشهای تقریبی

وقتی داده‌های نامتعادل خیلی از حالت متعادل دور نیستند، گاهی به‌کار بردن شیوه‌های تقریبی به‌طوری که مسألهٔ نامتعادل را تبدیل به‌یک مسألهٔ متعادل کند ممکن است. این البته تحلیل را تنها به‌صورت تقریبی انجام می‌دهد، مع‌هذا تحلیل داده‌های متعادل به‌اندازه‌ای ساده است که اغلب در استفاده از این روش وسوسه می‌شویم. عملاً وقتی داده‌ها از حالت متعادل آن زیاد تفاوت ندارد باید در تعیین درجهٔ تقریب که نسبتاً بی‌اهمیت تلقی شده است تصمیم گرفت. در اینجا به‌اختصار بعضی از این روشهای تقریبی را شرح می‌دهیم. می‌پذیریم که هر خانه حداقل دارای یک مشاهده است (یعنی، $n_{ij} \geqslant ۱$).

جدول ۳۲.۷ مقادیر n_{ij} برای یک طرح نامتعادل

	ستونها		
سطرها	۱	۲	۳
۱	۴	۴	۴
۲	۴	۳	۴
۳	۴	۴	۴

برآورد مشاهدات گمشده. اگر تنها تعداد کمی از n_{ij}ها متفاوت باشند، یک شیوهٔ معقول برآورد مقادیر گمشده است. مثلاً، طرح نامتعادل جدول ۳۲.۷ را در نظر بگیرید. به‌وضوح برآورد یک مقدار گمشدهٔ خانهٔ ۲، ۲ روش معقولی است. برای مدلی با اثر متقابل، برآورد مقدار گمشدهٔ ij امین خانه که مجموع مربعات خطا را مینیمم کند، $\bar{y}_{ij.}$ است. یعنی، مقدار گمشده را به‌وسیلهٔ متوسط مشاهداتی که در آن خانه موجودند برآورد می‌کنیم.

با مقدار برآورد شده عیناً مانند داده‌های واقعی رفتار می‌شود. تنها اصلاح در تحلیل واریانس تقلیل درجهٔ آزادی خطا به تعداد مشاهدات گمشده‌ای است که برآورد شده‌اند. مثلاً اگر مقدار گمشده در خانهٔ ۲، ۲ جدول ۳۲.۷ را برآورد کرده باشیم باید به‌جای ۲۷ درجهٔ آزادی برای خطا ۲۶ درجهٔ آزادی منظور کنیم.

کنارگذاشتن داده‌ها. داده‌های جدول ۳۳.۷ را در نظر بگیرید. توجه کنید که خانهٔ ۲، ۲ تنها یک مشاهده بیشتر از دیگران دارد. در اینجا برآورد مقادیر گمشده برای ۸ خانهٔ باقیمانده احتمالاً فکر خوبی نیست، زیرا که به‌این ترتیب نزدیک به ۱۸ درصد داده‌های نهایی را این برآوردها تشکیل خواهند داد. راه دیگر، کنارگذاشتن یک مشاهده در خانهٔ ۲، ۲ است که در نتیجه یک طرح متعادل با $n = 4$ تکرار را به‌وجود می‌آورد.

مشاهده‌ای که کنار گذاشته می‌شود باید به‌تصادف انتخاب شود. به‌علاوه، به‌جای دور انداختن کامل مشاهده، می‌توان آن‌را دو مرتبه به‌طرح برگردانده و سپس مشاهدهٔ دیگری را به تصادف برای

جدول ۳۳.۷ مقادیر n_{ij} برای یک طرح نامتعادل

	ستونها		
سطرها	۱	۲	۳
۱	۴	۴	۴
۲	۴	۵	۴
۳	۴	۴	۴

کنارگذاشتن انتخاب و تحلیل را تکرار کرد، و امیدوار بود که این دو تحلیل به‌تفسیرهای مغایر داده‌ها منتهی نمی‌شوند. اگر چنین باشند، آن‌گاه حدس می‌زنیم مشاهده‌ای که کنار گذاشته شده است مقداری پرت افتاده یا بسیار متفاوت باشد که باید برطبق آن عمل کرد. عملاً، وقتی تنها تعداد کمی مشاهدات کنار گذاشته می‌شوند و تغییرپذیری بین خانه‌ها کوچک است وقوع چنین ابهامی غیر محتمل است.

روش میانگینهای ناموزون. در این روش که آن را یتس (۱۹۳۴) ارائه داده است متوسطهای خانه‌ها را به‌عنوان داده‌ها در نظر می‌گیریم و تعیین مجموع مربعات سطرها، ستونها، و اثر متقابل موکول به تحلیل داده‌های متعادل استاندارد است. میانگین مربع خطا به‌صورت زیر پیدا می‌شود

$$MS_{\text{خطا}} = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n_{ij}}(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.})^2}{n_{..}-ab} \qquad (۴۹.۷)$$

حال، $MS_{\text{خطا}}$ برآورد σ^2، واریانس مشاهدات فردی y_{ijk} است. اما، تحلیل واریانس را براساس متوسطهای خانه‌ها انجام می‌دهیم، و چون واریانس متوسط ij امین خانه برابر σ^2/n_{ij} است، لذا میانگین مربع خطا که در واقع در تحلیل واریانس به‌کار می‌رود باید برآورد متوسط واریانس $\bar{y}_{ij.}$ یعنی

$$\overline{V}(\bar{y}_{ij.}) = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sigma^2/n_{ij}}{ab} = \frac{\sigma^2}{ab}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{1}{n_{ij}} \qquad (۵۰.۷)$$

باشد. با استفاده از $MS_{\text{خطا}}$ در معادلهٔ (۴۹.۷)، برای برآورد σ^2 در معادلهٔ (۵۰.۷)، میانگین مربع خطا (با $n_{..}-ab$ درجهٔ آزادی) را برای استفاده در تحلیل واریانس به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$MS'_{\text{خطا}} = \frac{MS_{\text{خطا}}}{ab}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{1}{n_{ij}} \qquad (۵۱.۷)$$

روش میانگینهای ناموزون یک شیوهٔ تقریبی است زیرا که توزیع مجموع مربعات سطرها، ستونها، و اثر متقابل، متغیرهای تصادفی با توزیع خی دو نیستند. به‌نظر می‌رسد که مزیت عمدهٔ این روش سادگی انجام محاسبات آن‌است. وقتی n_{ij}ها تفاوت عمده ندارند، اغلب روش میانگینهای ناموزون به‌صورتی معقول نتیجه‌بخش است.

یک تکنیک وابسته، روش میانگین مربعات موزون شده است که این روش را نیز یتس (۱۹۳۴) پیشنهاد کرده است. این تکنیک نیز مبتنی بر مجموع مربعات میانگینهای خانه‌هاست. اما جملات

موجود در مجموع مربعات به‌نسبت عکس واریانسهای آن موزون می‌شوند. برای شرح بیشتر این شیوه سیرل (a۱۹۷۱) و اسپید[1]، هاکینگ و هکنی[2] (۱۹۷۸) را ببینید.

۳.۷.۷ روش دقیق

در وضعیتهایی که در آنها روشهای تقریبی نامناسب‌اند، مانند وقتی‌که خانه‌های خالی وجود دارند (بعضی n_{ij}ها صفرند) یا وقتی n_{ij}ها تفاوت عمده دارند، آزمایشگر باید از تحلیل دقیق استفاده کند. شیوه‌ای که در بسط مجموع مربعات برای آزمون اثرهای اصلی و اثر متقابل به کار می‌رود عبارت از بیان مدل تحلیل واریانس به‌صورت یک مدل رگرسیونی است، که آن مدل را به‌داده‌ها می‌برازاند، و شیوهٔ آزمون معنی‌دار بودن رگرسیون کلی را به‌کار می‌برد. اما، چندین راه برای انجام آن وجود دارد، و ممکن است با استفاده از این روشها مقادیر متفاوتی برای مجموع مربعات نتیجه شوند. به‌علاوه، فرضهایی که آزمون می‌شوند همیشه مستقیماً مشابه آنهایی که برای حالت متعادل بررسی می‌شوند یا آنهایی که همیشه به‌سهولت قابل تعبیرند نیستند. برای مطالعهٔ بیشتر این موضوعها سیرل (a۱۹۷۱)، اسپید و هاکینگ (۱۹۶۷)، هاکینگ و اسپید (۱۹۷۵)؛ هاکینگ، هکنی، و اسپید (۱۹۷۸)؛ اسپید، هاکینگ و هکنی (۱۹۷۸)؛ سیرل، اسپید و هندرسن[3] (۱۹۸۱)؛ و سیرل (۱۹۸۷) را ببینید.

۸.۷ مسائل

۱.۷ محصول یک فراوردهٔ شیمیایی تحت مطالعه است. تصور می‌شود که دو تا از مهمترین متغیرها فشار و دما باشند. برای هر عامل سه سطح انتخاب شده، و آزمایش عاملی با دو تکرار انجام شده است. داده‌های حاصل به‌صورت زیرند.

(الف) داده‌ها را تحلیل و نتایج را به‌دست آورید.

	فشار		
دما	۲۰۰	۲۱۵	۲۳۰
کم	۹۰٫۴	۹۰٫۷	۹۰٫۲
	۹۰٫۲	۹۰٫۶	۹۰٫۴
متوسط	۹۰٫۱	۹۰٫۵	۸۹٫۹
	۹۰٫۳	۹۰٫۶	۹۰٫۱
زیاد	۹۰٫۵	۹۰٫۸	۹۰٫۴
	۹۰٫۷	۹۰٫۹	۹۰٫۱

1. Speed 2. Hackney 3. Henderson

و در کفایت مدل اظهارنظر کنید.

(ب) نمودارهای مانده‌ای مناسب را تهیه و در کفایت مدل اظهارنظر کنید.

(ج) تحت چه شرایطی این فرایند را انجام می‌دهید؟

۲.۷ مهندسی گمان می‌کند که میزان پرداخت رویهٔ قسمت فلزی یک قطعه تحت تأثیر نرخ کار و عمق برش باشد. او سه نرخ کار انتخاب کرده و به‌تصادف چهار عمق برش را در نظر می‌گیرد. سپس یک آزمایش عاملی را اجرا کرده و داده‌های زیر را به‌دست می‌آورد.

نرخ کار (اینچ در دقیقه)	عمق برش (اینچ) ۱۵ر۰	۱۸ر۰	۲۰ر۰	۲۵ر۰
	۷۴	۷۹	۸۲	۹۹
۲۰ر۰	۶۴	۶۸	۸۸	۱۰۴
	۶۰	۷۳	۹۲	۹۶
	۹۲	۹۸	۹۹	۱۰۴
۲۵ر۰	۸۶	۱۰۴	۱۰۸	۱۱۰
	۸۸	۸۸	۹۵	۹۹
	۹۹	۱۰۴	۱۰۸	۱۱۴
۳۰ر۰	۹۸	۹۹	۱۱۰	۱۱۱
	۱۰۲	۹۵	۹۹	۱۰۷

(الف) داده‌ها را تحلیل و نتایج را استخراج کنید.

(ب) نمودارهای مانده‌ای مناسب را تهیه و در کفایت مدل اظهارنظر کنید.

(ج) برآوردهای نقطه‌ای میانگین میزان پرداخت سطح را برای هر نرخ کار به‌دست آورید.

(د) مؤلفهٔ واریانس عمق برش را برآورد کنید.

۳.۷ با در نظرگرفتن داده‌های مسألهٔ ۲.۷، یک بازهٔ برآورد ۹۵ درصد برای تفاوت میانگین پاسخ نرخ کار ۲۰ر۰ و ۲۵ر۰ اینچ در دقیقه حساب کنید.

۴.۷ مقاله‌ای در مجلهٔ کنترل کیفیت صنعتی* آزمایشی را شرح می‌دهد که اثر نوع شیشه و نوع فسفر در روشنایی لامپهای تصویر تلویزیون را بررسی می‌کند. متغیر پاسخ، جریان لازم (برحسب میکرو آمپر) برای به‌دست آوردن سطح روشنایی مشخص است. داده‌ها به‌صورت زیرند

* *Industrial Quality Control* (1956, pp 5-8).

نوع شیشه	نوع فسفر ۱	۲	۳
	۲۸۰	۳۰۰	۲۹۰
۱	۲۹۰	۳۱۰	۲۸۵
	۲۸۵	۲۹۵	۲۹۰
	۲۳۰	۲۶۰	۲۲۰
۲	۲۳۵	۲۴۰	۲۲۵
	۲۴۰	۲۳۵	۲۳۰

(الف) آیا هیچ نشانی از اینکه یکی از عوامل در روشنایی مؤثر باشد وجود دارد؟

(ب) آیا دو عامل اثر متقابل دارند؟

(ج) مانده‌های این آزمایش را تحلیل کنید.

۵.۷ جنسن و لئون* (درکتابی تحت عنوان آمار و طرحهای آزمایشی در مهندسی و علوم فیزیک) آزمایشی را برای بررسی تاب برداشتن ورقهای مسی شرح داده‌اند. دو عامل مورد مطالعه، دما و میزان مس در ورقهاست. متغیر پاسخ اندازه‌ای از میزان تاب‌خوردگی است. داده‌ها به‌صورت زیر بوده‌اند:

دما (سانتیگراد)	میزان مس (٪) ۴۰	۶۰	۸۰	۱۰۰
۵۰	۱۷۲۰	۱۶۲۱	۲۴۲۲	۲۸۲۷
۷۵	۱۲۹	۱۸۱۳	۱۷۱۲	۲۷۳۱
۱۰۰	۱۶۱۲	۱۸۲۱	۲۵۲۳	۳۰۲۳
۱۲۵	۲۱۱۷	۲۳۲۱	۲۳۲۲	۲۹۳۱

(الف) آیا نشانه‌ای از اینکه هر یک از عوامل در میزان تاب‌خوردگی مؤثر باشد وجود دارد؟ آیا اثر متقابلی بین عوامل وجود دارد؟

(ب) مانده‌ها را برای این آزمایش تحلیل کنید.

(ج) متوسط تاب‌خوردگی را در هر سطح میزان مس مشخص کرده و آنها را با توزیع مناسب t مقیاس‌بندی شده مقایسه کنید. در تفاوت اثرهای سطوح متفاوت میزان مس در تاب‌خوردگی بحث کنید. اگر تاب‌خوردگی کم مطلوب باشد چه سطحی از میزان مس را مشخص می‌کنید؟

(د) فرض کنید که دما را نتوان در محیطی که از ورقهای مسی استفاده می‌شود کنترل کرد. آیا این موضوع، پاسخ شما دربند (ج) را تغییر می‌دهد؟

* Johnson and Leone (*Statistics and Experimental Design in Engineering and the Physical Sciences*, Wiley, 1977).

۶.۷ عوامل مؤثر در مقاومت یک الیاف مصنوعی در برابر پاره شدن تحت مطالعه است. چهار ماشین تولید و سه عملگر به‌تصادف انتخاب و یک آزمایش عاملی با استفاده از همان الیاف اجرا شده است. نتایج به‌صورت زیر بوده‌اند.

عملگر	ماشین ۱	۲	۳	۴
۱	۱۰۹	۱۱۰	۱۰۸	۱۱۰
	۱۱۰	۱۱۵	۱۰۹	۱۰۸
۲	۱۱۰	۱۱۰	۱۱۱	۱۱۴
	۱۱۲	۱۱۱	۱۰۹	۱۱۲
۳	۱۱۶	۱۱۲	۱۱۴	۱۲۰
	۱۱۴	۱۱۵	۱۱۹	۱۱۷

(الف) داده‌ها را تحلیل و نتایج را ارائه دهید.

(ب) نمودارهای مانده‌ای مناسب را تهیه کرده و در خصوص کفایت مدل توضیح دهید.

(ج) مؤلفه‌های واریانس را برآورد کنید.

۷.۷ گیریم در مسألهٔ ۶.۷ عملگرها به‌تصادف انتخاب شوند، اما تنها چهار ماشین در اختیار باشند که برای آزمون از آنها استفاده می‌شود. اثرهای اصلی و متقابل را در سطح ۵ درصد آزمون کنید. آیا این وضعیت آزمایشی جدید در تحلیل یا در نتایج شما مؤثر است؟

۸.۷ یک مهندس مکانیک، نیروی فشار حاصل از یک مته را در کیفیت کار مطالعه می‌کند. او گمان می‌کند که سرعت مته و نرخ کار از مهمترین عوامل در کیفیت کار باشند. وی چهار نرخ کار را به‌تصادف انتخاب کرده و از سرعت بالا و پایین مته برای مشخص کردن نحوهٔ عمل استفاده می‌کند. او نتایج زیر را به‌دست آورده است. داده‌ها را تحلیل و نتایج را استخراج کنید.

سرعت مته	نرخ کار ۰٫۰۱۵	۰٫۰۳۰	۰٫۰۴۵	۰٫۰۶۰
۱۲۵	۲٫۷۰	۲٫۴۵	۲٫۶۰	۲٫۷۵
	۲٫۷۸	۲٫۴۹	۲٫۷۲	۲٫۸۶
۲۰۰	۲٫۸۳	۲٫۸۵	۲٫۸۶	۲٫۹۴
	۲٫۸۶	۲٫۸۰	۲٫۸۷	۲٫۸۸

۹.۷ آزمایشی برای مطالعهٔ اثر عملکرد دما و سه نوع شیشه در روشنایی ساطع از لامپهای نوسان‌نما اجرا شده، و داده‌های زیر جمع‌آوری شده‌اند.

نوع شیشه	دما ۱۰۰	۱۲۵	۱۵۰
	۵۸۰	۱۰۹۰	۱۳۹۲
	۵۶۸	۱۰۸۷	۱۳۸۰
۱	۵۷۰	۱۰۸۵	۱۳۸۶
	۵۵۰	۱۰۷۰	۱۳۲۸
	۵۳۰	۱۰۳۵	۱۳۱۲
۲	۵۷۹	۱۰۰۰	۱۲۹۹
	۵۴۶	۱۰۴۵	۸۶۷
	۵۷۵	۱۰۵۳	۹۰۴
۳	۵۹۹	۱۰۶۶	۸۸۹

گیریم هر دو عامل تثبیت شده‌اند. آیا اثر متقابل معنی‌دار است؟ آیا نوع شیشه یا اثر دما در پاسخ مؤثر است؟ چه نتایجی می‌توانید استخراج کنید؟ با استفاده از روشی که در متن از آن بحث شد اثر دما را به مؤلفه‌های خطی و درجهٔ دوم افراز کنید. اثر متقابل را به‌مؤلفه‌های مناسب تفکیک نمایید.

۱۰.۷ داده‌های مسألهٔ ۱.۷ را در نظر بگیرید. با استفاده از روشی که در متن توصیف شده اثرهای خطی و درجهٔ دوم فشار را استخراج کنید.

۱۱.۷ با استفاده از آزمون دامنهٔ چندگانهٔ دانکن تعیین کنید که برای داده‌های مسألهٔ ۱.۷ کدام سطوح عامل فشار به‌صورتی معنی‌دار متفاوت‌اند.

۱۲.۷ آزمایشی برای تعیین اثر دمای کوره یا اثرهای موقعیت کوره بر چگالی یک آنودکربنی اجرا شده است. داده‌ها را در زیر نشان داده‌ایم.

موقعیت	دما ۸۰۰	۸۲۵	۸۵۰
	۵۷۰	۱۰۶۳	۵۶۵
۱	۵۶۵	۱۰۸۰	۵۱۰
	۵۸۳	۱۰۴۳	۵۹۰
	۵۲۸	۹۸۸	۵۲۶
۲	۵۴۷	۱۰۲۶	۵۳۸
	۵۲۱	۱۰۰۴	۵۳۲

گیریم که اثر متقابلی وجود نداشته باشد. مدل آماری را بنویسید. تخلیل واریانس را وقتی اثرهای هر دو عامل تثبیت شده باشند اجرا کنید. چه نتایجی می‌توان استخراج کرد؟ امیدریاضی میانگین مربعات را محاسبه کنید. کفایت مدل را توضیح دهید.

۱۳.۷ امیدریاضی میانگین مربعات را برای تحلیل واریانس دو عامل با یک مشاهده در هر خانه، وقتی‌که هر دو عامل تثبیت شده‌اند، به‌دست آورید.

۱۴.۷ یک تحلیل واریانس دو عاملی را با یک مشاهده در هر خانه در نظر بگیرید. امید ریاضی میانگین مربعات را وقتی که هر دو عامل سطر و ستون تصادفی‌اند تعیین کنید. تحت چه شرایطی آزمونهای کامل برای اثرهای اصلی وجود دارد؟ جدول تحلیل واریانس را بسازید.

۱۵.۷ یک تحلیل واریانس دو عاملی را با یک مشاهده در هر خانه در نظر بگیرید. امیدریاضی میانگین مربعات را وقتی عامل سطر تثبیت شده و عامل ستون تصادفی است تعیین کنید. تحت چه شرایطی آزمونهایی دقیق برای اثرهای اصلی وجود دارند؟ جدول تحلیل واریانس را بسازید.

۱۶.۷ داده‌های زیر را در نظر بگیرید. که در آن عوامل سطر و ستون هر دو تثبیت شده باشند. داده‌ها را تحلیل و نتایج را استخراج کنید. آزمونی برای جمع‌ناپذیری انجام دهید.

عامل سطر	عامل ستون			
	۱	۲	۳	۴
۱	۳۶	۳۹	۳۶	۳۲
۲	۱۸	۲۰	۲۲	۲۰
۳	۳۰	۳۷	۳۳	۳۴

۱۷.۷ تصور می‌شود که نیروی چسبندگی چسبی تحت تأثیر عملکرد فشار و دما در موقع کار با آن باشد. یک آزمایش عاملی را وقتی‌که هر دو عامل را تثبیت شده در نظر گرفته‌ایم انجام داده و داده‌های زیر را به‌دست آورده‌ایم. داده‌ها را تحلیل و نتایج را به‌دست آورید. آزمون جمع‌ناپذیری را انجام دهید.

فشار (پوند بر اینچ مربع)	دما (فارنهایت)		
	۲۵۰	۲۶۰	۲۷۰
۱۲۰	۹٫۶۰	۱۱٫۲۸	۹٫۰۰
۱۳۰	۹٫۶۹	۱۰٫۱۰	۹٫۵۷
۱۴۰	۸٫۴۳	۱۱٫۰۱	۹٫۰۳
۱۵۰	۹٫۹۸	۱۰٫۴۴	۹٫۸۰

۱۸.۷ برای داده‌های مسألهٔ ۱۷.۷ گیریم سطوح دما و فشار به‌تصادف انتخاب شده باشند. فرض کنید اثر متقابلی وجود نداشته باشد. تحلیل واریانس را اجرا کنید. نتایج شما کلاً نسبت به‌نتایج مسألهٔ ۱۷.۷ چه تفاوتی کرده‌اند؟

۱۹.۷ مدل سه عاملی زیر را در نظر بگیرید.

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\beta\gamma)_{jk} + \epsilon_{ijk} \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, a \\ j = 1, 2, \ldots, b \\ k = 1, 2, \ldots, c \end{cases}$$

توجه کنید که تنها یک تکرار وجود دارد. گیریم تمام عوامل تثبیت شده‌اند، جدول تحلیل واریانس و امید ریاضی میانگین مربعات را بنویسید. از «خطای آزمایشی» در آزمون فرضها چه استفاده‌ای می‌برید؟

۲۰.۷ درصد تراکم چوب در خمیر خام کاغذ، فشار مخزن، و زمان پخت خمیر کاغذ برای بررسی اثرشان در مقاومت کاغذ به‌دست آمده، تحت مطالعه‌اند. سه سطح برای تراکم چوب، سه سطح فشار، و دو زمان پخت انتخاب شده‌اند. تمام این عوامل را می‌توان تثبیت شده در نظر گرفت. یک آزمایش عاملی با دو تکرار اجرا شده و داده‌های زیر به‌دست آمده‌اند:

درصد تراکم چوب	زمان پخت ۳ ساعت، فشار ۴۰۰	۵۰۰	۶۵۰	زمان پخت ۴ ساعت، فشار ۴۰۰	۵۰۰	۶۵۰
۲	۱۹۶٫۶	۱۹۷٫۷	۱۹۹٫۸	۱۹۸٫۴	۱۹۹٫۶	۲۰۰٫۶
	۱۹۶٫۰	۱۹۶٫۰	۱۹۹٫۴	۱۹۸٫۶	۲۰۰٫۴	۲۰۰٫۹
۴	۱۹۸٫۵	۱۹۶٫۰	۱۹۸٫۴	۱۹۷٫۵	۱۹۸٫۷	۱۹۹٫۶
	۱۹۷٫۲	۱۹۶٫۹	۱۹۷٫۶	۱۹۸٫۱	۱۹۸٫۰	۱۹۹٫۰
۸	۱۹۷٫۵	۱۹۵٫۶	۱۹۷٫۴	۱۹۷٫۶	۱۹۷٫۰	۱۹۸٫۵
	۱۹۶٫۶	۱۹۶٫۲	۱۹۸٫۱	۱۹۸٫۴	۱۹۷٫۸	۱۹۹٫۸

(الف) داده‌ها را تحلیل و نتایج را استخراج کنید.

(ب) نمودارهای مانده‌ای مناسب را تهیه کرده و در کفایت مدل اظهارنظر کنید.

(ج) تحت چه مجموعه شرایطی این فرایند را انجام می‌دهید؟ چرا؟

۲۱.۷ بخش کنترل کیفیت یک کارخانهٔ نساجی، اثر چندین عامل را در رنگرزی پارچه‌های بافته شده با الیاف مصنوعی و پنبه که در دوخت پیراهنهای مردانه به‌کار می‌رود مطالعه می‌کند. سه عملگر، سه زمان گردش، دو دما، و سه نمونهٔ کوچک از پارچه‌ها را که تحت هر یک از این مجموعه شرایط رنگرزی شده‌اند انتخاب کرده‌اند. پارچه‌های آماده شده با استاندارد آن مقایسه شده و نمره‌ای به‌آن تخصیص داده‌اند. نتایج به‌صورت زیر بوده‌اند. داده‌ها را تحلیل و نتایج را استخراج کنید. دربارهٔ کفایت مدل توضیح دهید.

	دما					
	۳۰۰°			۳۵۰°		
زمان گردش	عملگر			عملگر		
	۱	۲	۳	۱	۲	۳
	۲۳	۲۷	۳۱	۲۴	۳۸	۳۴
۴۰	۲۴	۲۸	۳۲	۲۳	۳۶	۳۶
	۲۵	۲۶	۲۹	۲۸	۳۵	۳۹
	۳۶	۳۴	۳۳	۳۷	۳۴	۳۴
۵۰	۳۵	۳۸	۳۴	۳۹	۳۸	۳۶
	۳۶	۳۹	۳۵	۳۵	۳۶	۳۱
	۲۸	۳۵	۲۶	۲۶	۳۶	۲۸
۶۰	۲۴	۳۵	۲۷	۲۹	۳۷	۲۶
	۲۷	۳۴	۲۵	۲۵	۳۴	۲۴

۲۲.۷ گیریم در مسألهٔ ۱.۷ بخواهیم فرض صفر را با احتمال بالا درصورتی‌که تفاوت میانگین واقعی محصول در هر دو فشار بیشتر از ۵ر۰ باشد رد کنیم. برآورد پیشین معقول از انحراف معیار محصول ۱ر۰ است. چه تعداد تکرار را باید اجرا کرد؟

۲۳.۷ در مسألهٔ ۶.۷ توان آزمون را برای آشکار کردن اثر ماشین تعیین کنید به‌طوری که وقتی σ_β^2 مؤلفهٔ واریانس برای عامل ماشین است $\sigma_\beta^2 = \sigma^2$ باشد. آیا دو تکرار کافی است؟

۲۴.۷ در تحلیل واریانس مدل آمیختهٔ دو عاملی، نشان دهید که برای مقادیر $i \neq i'$ $\mathrm{Cov}[(\tau\beta)_{ij}, (\tau\beta)_{i'j}] = -(1/a)\sigma_{\tau\beta}^2$.

۲۵.۷ نشان دهید که روش تحلیل واریانس، همیشه در مدلهای تصادفی یا آمیخته، برای مؤلفه‌های واریانس، برآوردهای نقطه‌ای ناااریب فراهم می‌کند.

۲۶.۷ با توسل به‌پذیره‌های معمولی نرمال بودن، برای احتمال آنکه با روش تحلیل واریانس برای مؤلفهٔ واریانس برآوردی منفی به‌دست آید رابطه‌ای پیدا کنید. با استفاده از این نتیجه احتمال این را که در تحلیل واریانس یک عاملی، $\hat{\sigma}_\tau^2 < 0$ باشد به‌صورت حکمی بیان کنید. مفید بودن این حکم احتمال را توضیح دهید.

۲۷.۷ داده‌های مسألهٔ ۲.۷ را در نظر بگیرید، و قبول کنید که هر دو عامل تثبیت شده‌اند. گیریم که اولین مشاهده در خانه‌های ۱, ۱ و ۳, ۲ گمشده باشند. داده‌ها را با برآورد مقادیر گمشده تحلیل کنید. این تحلیل را با آنچه در مسألهٔ ۲.۷ به‌دست آمده است مقایسه کنید. در این حالت دربارهٔ کفایت این تحلیل توضیح دهید.

۸

قوانین تعیین مجموع مربعات و امید ریاضی میانگین مربعات

بخش مهم هر مسألهٔ طرح آزمایش، انجام تحلیل واریانس است. که این خود مستلزم تعیین مجموع مربعات برای هر مؤلفهٔ مدل و تعیین تعداد درجات آزادی مربوط به هر یک از مجموع مربعات است. پس، برای ساختن آمارهٔ مناسب آزمون لازم است که امید ریاضی میانگین مربعات تعیین شود. بالاخص در وضعیتهای پیچیدهٔ طرح، مثل آنهایی که شامل مدلهای تصادفی یا آمیخته‌اند اغلب داشتن یک شیوهٔ رسمی برای این فرایند مفید است.

در اینجا برای هر طرح عاملی متعادل تودرتو*، یا آزمایش عاملی تودرتو، برای نوشتن مجموع مربعات اثرهای مدل (در اینجا اصطلاح اثر شامل هر دو اثر اصلی و اثر متقابل است.)، تعداد درجات آزادی، و امید ریاضی میانگین مربعات، مجموعه قواعدی را ارائه می‌کنیم. (توجه کنید که آرایشهای جزئی ـ متعادل، مثل مربعات لاتین و طرحهای بلوکی ناکامل مشخصاً مستثنی هستند.) برخی مؤلفین از جمله شفه (۱۹۵۹)، بنت و فرانکلین (۱۹۵۴)، سیرل (۱۹۷۱ a, ۱۹۷۱b) و هیکز[1] (۱۹۷۳) از این قواعد بحث کرده‌اند. برای روشن کردن کاربرد این قواعد از مدل دوعاملی استفاده می‌کنیم

* از طرحهای تودرتو در فصل ۱۳ بحث کرده‌ایم.

1. Hicks

۱.۸ قواعد تعیین مجموع مربعات

قاعدهٔ ۱. مؤلفهٔ خطا در مدل، یعنی $\epsilon_{ij\cdots m}$ را به‌صورت $\epsilon_{(ij\cdots)m}$ می‌نویسیم، که در آن زیرنویس m، تکرار را نشان می‌دهد. برای مدل دو عاملی، این قاعده نتیجه می‌دهد که ϵ_{ijk} به‌صورت $\epsilon_{(ij)k}$ در می‌آید.

قاعدهٔ ۲. علاوه بر میانگین کل (μ) و جملهٔ خطا $[\epsilon_{(ij\ldots)m}]$، مدل شامل تمام اثرهای اصلی و اثرهای متقابلی است که آزمایشگر وجود آنها را می‌پذیرد. اگر بین k عامل تمام اثرهای متقابل ممکن وجود داشته باشند، آن‌گاه $\binom{k}{۲}$ اثر متقابل دو عاملی، $\binom{k}{۳}$ اثر متقابل سه‌عاملی، $\cdots$ و بالاخره یک اثر متقابل k عاملی وجود دارد. اگر یکی از عوامل جمله، داخل پرانتز ظاهر شود، آن‌گاه هیچ اثر متقابلی بین آن عامل و عوامل دیگر موجود در آن جمله وجود نخواهد داشت.

قاعدهٔ ۳. برای هر جمله در مدل، زیرنویسها را به سه‌رده تقسیم می‌کنیم: (الف) جاری. زیرنویسهایی که در جمله وجود دارند و داخل پرانتز نیستند؛ (ب) راکد. زیرنویسهایی که در جمله وجود دارند و داخل پرانتز هستند؛ و (ج) غائب. زیرنویسهایی که در مدل هستند امّا در آن جملهٔ خاص نیامده‌اند.

پس، در $(\tau\beta)_{ij}$، i و j جاری و k غائب است، و در $\epsilon_{(ij)k}$، k جاری و i و j راکدند.

قاعدهٔ ۴. تعیین درجات آزادی. تعداد درجات آزادی هر جملهٔ مدل برابر حاصلضرب تعداد سطوح مربوط به هر زیرنویس راکد، و تعداد سطوح منهای یک، مربوط به هر زیرنویس جاری است.

مثلاً، تعداد درجات آزادی مربوط به $(\tau\beta)_{ij}$، $(a-۱)(b-۱)$، و تعداد درجات آزادی مربوط به $\epsilon_{(ij)k}$، $ab(n-۱)$ است.

قاعدهٔ ۵. تعیین مجموع مربعات. برای به‌دست آوردن فرمولهایی محاسباتی برای مجموع مربعات مربوط به هر اثر، ابتدا تعداد درجات آزادی آن اثر را باز می‌کنیم. مثلاً برای β_j تعداد درجات آزادی باز شده فقط $b-۱$ است. هر جمله در این کمیت شکلی نمادی از مجموع مربعات تصحیح نشده است. پس از آن برای تعیین مجموع مربعات تصحیح نشدهٔ مربوط به هر شکل نمادی از شیوهٔ زیر استفاده می‌کنیم.

(الف) عدد ۱ معرف عامل تصحیح است؛ یعنی

$$۱ = \frac{\left(\sum\limits_{i=۱}^{a}\sum\limits_{j=۱}^{b}\cdots\sum\limits_{m=۱}^{n} y_{ij\cdots m}\right)^{۲}}{ab\cdots n}$$

برای هر شکل نمادی دیگر، مجموع تمام مشاهدات را به‌صورت مجموعیابی می‌نویسیم. پس، برای b می‌نویسیم $\sum_{i=۱}^{a}\sum_{j=۱}^{b}\sum_{k=۱}^{c} y_{ijk}$.

(ب) ترتیب مجموعیابی را عوض می‌کنیم به‌طوری که مجموعهای مربوط به حروف در شکل

نمادی مورد نظر (در اینجا b) ابتدا بیاید، و عناصر دیگر را در پرانتز می‌آوریم. بنابراین برای ب می‌نویسیم:

$$\sum_{j=1}^{b}\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}\right)$$

(ج) مقدار داخل پرانتز را به نماد متعارف «زیرنویس نقطه» تبدیل می‌کنیم، که در آن، هر نقطه در زیرنویس معرف مجموعیابی نسبت به‌همان زیرنویس است. پس،

$$\sum_{j=1}^{b}\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}\right) = \sum_{j=1}^{b}(y_{.j.})$$

(د) مقدار داخل پرانتز را مربع کرده و آن‌را برحاصلضرب تعداد سطوح زیرنویسهای نقطه تقسیم می‌کنیم. پس، برای مثال بالا جملهٔ b به‌صورت $\sum_{j=1}^{b} y_{.j.}^2/an$ در می‌آید، که مجموع مربعات تصحیح نشده است. مجموع مربعات تصحیح شدهٔ هر اثر با قرار دادن مجموع مربعات تصحیح نشدهٔ مربوط به هر شکل نمادی در درجهٔ آزادی آن اثر حاصل می‌شود. پس مثلاً برای به‌دست آوردن مجموع مربعات برای β_j، شکل نمادی $b-1$ را به‌صورت مجموع مربعات تصحیح نشدهٔ بالا می‌نویسیم. می‌بینیم

$$SS_B = \sum_{j=1}^{b}\frac{y_{.j.}^2}{an} - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

که به‌وضوح همان مجموع مربعات برای اثر اصلی B در تحلیل دو عاملی است.

به‌منظور توضیح بیشتر قاعدهٔ ۵، مجموع مربعات برای اثر $(\tau\beta)_{ij}$، یعنی SS_{AB} را تعیین می‌کنیم. تعداد درجات آزادی باز شده برابر است با $ab-a-b+1 = (a-1)(b-1)$. بنابراین مجموع مربعات به‌صورت زیر تعیین می‌شوند:

	$+1$	$-b$	$-a$	ab
قسمت (الف)	$\frac{y_{...}^2}{abn}$	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}$	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}$	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}$
قسمت (ب)	$\frac{y_{...}^2}{abn}$	$\sum_{j=1}^{b}(\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk})$	$\sum_{i=1}^{a}(\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk})$	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\sum_{k=1}^{n} y_{ijk})$
قسمت (ج)	$\frac{y_{...}^2}{abn}$	$\sum_{j=1}^{b}(y_{.j.})$	$\sum_{i=1}^{a}(y_{i..})$	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij.})$
قسمت (د)	$\frac{y_{...}^2}{abn}$	$\sum_{j=1}^{b}\frac{y_{.j.}^2}{an}$	$\sum_{i=1}^{a}\frac{y_{i..}^2}{bn}$	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{y_{ij.}^2}{n}$

حال، با ترکیب مجموع مربعات تصحیح نشده در آخرین سطر و با توجه به‌علائم بالای هر ستون، به‌دست می‌آوریم

$$SS_{AB} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{y_{ij.}^{2}}{n} - \sum_{i=1}^{a}\frac{y_{i..}^{2}}{bn} - \sum_{j=1}^{b}\frac{y_{.j.}^{2}}{an} + \frac{y_{...}^{2}}{abn}$$

این آخرین معادله هم‌ارز $SS_{AB} = SS_{\text{زیرمجموعه‌ها}} - SS_A - SS_B$ است، که قبلاً در معادلهٔ (۹.۷) آن‌را به‌دست آورده‌ایم.

۲.۸ قواعد تعیین امید ریاضی میانگین مربعات

دیدیم که امید ریاضی میانگین مربعات، نقشی عمده در تحلیل واریانس ایفا می‌کند. با بررسی امید ریاضی میانگین مربعات، می‌توانیم برای آزمون فرضهای موردنظر در خصوص پارامترها آمارهٔ مناسب آزمون را بسازیم. آمارهٔ آزمون نسبتی از میانگینهای مربعات است که به‌گونه‌ای انتخاب می‌شوند که مقدار امید ریاضی میانگین مربعات صورت از مقدار امید ریاضی میانگین مربعات مخرج تنها در مؤلفهٔ واریانس یا عامل تثبیت شده مورد نظر اختلاف داشته باشند.

همان‌طور که در فصل ۳ دیدیم، همیشه تعیین امید ریاضی میانگین مربعات برای هر مدل امکان‌پذیر است؛ یعنی با کاربرد مستقیم عملگر امید ریاضی می‌توان امید ریاضی میانگین مربعات را پیدا کرد. این روش که اغلب آن‌را «بی‌نیاز به‌اندیشه» می‌نامند می‌تواند بسیار خسته کننده باشد. قواعد زیر همیشه برای هر طرحی، بی‌آنکه نیاز به‌توسل به‌روش مزبور باشد، امید ریاضی میانگین مربعات را می‌دهند، و با ممارست استفاده از آنها نسبتاً آسان می‌شود. وقتی این قواعد را در مورد مدل آمیخته به‌کار می‌بریم، امید ریاضی میانگین مربعاتی را به‌دست می‌دهند که با پذیره‌های مدل آمیختهٔ متعارف بخش ۴.۷ سازگارند. این قواعد را با استفاده از مدل دو عاملی با اثرهای تثبیت شده توضیح می‌دهیم.

قاعدهٔ ۱. هر اثر یا دارای مؤلفهٔ واریانس است (اثر تصادفی) و یا عامل تثبیت شده همراه با آن است (اثر تثبیت شده). اگر اثر متقابلی حداقل شامل یک اثر تصادفی باشد، در این‌صورت تمام اثر متقابل را تصادفی می‌گیریم. مؤلفهٔ واریانس در زیرنویس دارای حروف یونانی است که معرف آن اثر تصادفی است. پس، در مدل دو عاملی آمیخته وقتی عامل A تثبیت شده و عامل B تصادفی است، مؤلفهٔ واریانس برای B، σ_{β}^{2} و مؤلفهٔ واریانس برای AB، $\sigma_{\tau\beta}^{2}$ است. اثر تثبیت شده همیشه به‌وسیلهٔ مجموع مربعات مؤلفه‌های مربوط به‌آن عامل در مدل، تقسیم بر درجات آزادی آن معرفی می‌شود. در مثال بالا اثر A عبارت است از

$$\frac{\sum_{i=1}^{a}\tau_i^{2}}{a-1}$$

قاعدهٔ ۲. امید ریاضی میانگین مربعات. برای به‌دست آوردن امید ریاضی میانگین مربعات جدول زیر را آماده می‌کنیم. برای هر مؤلفهٔ مدل (میانگین مربعات) یک سطر و برای هر زیرنویس یک ستون در نظر می‌گیریم. بالای هر زیرنویس تعداد سطوح عامل مربوط به‌آن زیرنویس را نوشته و مشخص می‌کنیم که آیا آن عامل تثبیت شده (F) است یا تصادفی (R). تکرارها را همیشه تصادفی می‌گیریم.

(الف) اگر زیرنویس راکد سطری با زیرنویس ستونی یکی شد آن‌گاه در آن خانهٔ عدد ۱ را قرار می‌دهیم:

	F	F	R
	a	b	n
عامل	i	j	k
τ_i			
β_j			
$(\tau\beta)_{ij}$			
$\epsilon_{(ij)k}$	۱	۱	

(ب) اگر زیرنویس جاری مؤلفه سطری با زیرنویس ستونی یکی باشد، در این‌صورت اگر عنوان ستون، عامل تثبیت شده باشد در آن خانه عدد ۰ و اگر عنوان ستون عامل تصادفی باشد در آن خانه عدد ۱ را قرار می‌دهیم:

	F	F	R
	a	b	n
عامل	i	j	k
τ_i	۰		
β_j		۰	
$(\tau\beta)_{ij}$	۰	۰	
$\epsilon_{(ij)k}$	۱	۱	۱

(ج) در مکانهای خالی باقیمانده، تعداد سطوح عاملی را که در ستون مربوط مشخص شده است قرار می‌دهیم:

	F	F	R
	a	b	n
عامل	i	j	k
τ_i	۰	b	n
β_j	a	۰	n
$(\tau\beta)_{ij}$	۰	۰	n
$\epsilon_{(ij)k}$	۱	۱	۱

جدول ۱.۸ تعیین امیدریاضی میانگین مربعات برای مدل دو عاملی با اثرهای تثبیت شده

عامل	F a i	F b j	R n k	امیدریاضی میانگین مربعات
τ_i	۰	b	n	$\sigma^2 + \frac{bn\sum \tau_i^2}{a-1}$
β_j	a	۰	n	$\sigma^2 + \frac{an\sum \beta_j^2}{b-1}$
$(\tau\beta)_{ij}$	۰	۰	n	$\sigma^2 + \frac{n\sum\sum(\tau\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$
$\epsilon_{(ij)k}$	۱	۱	۱	σ^2

(د) برای به‌دست آوردن امیدریاضی میانگین مربعات برای هر مؤلفهٔ مدل، ابتدا تمام ستونهایی را که تحت عنوان زیرنویسهای جاری آن مؤلفه آمده‌اند می‌پوشانیم. سپس، در هر سطر که شامل حداقل همان زیرنویسهایی باشد که در مؤلفهٔ موردنظر آمده‌اند حاصلضرب اعدادی را که دیده می‌شوند به‌دست می‌آوریم و در عامل تصادفی یا تثبیت شدهٔ مناسب بنابر قاعدهٔ ۱ ضرب می‌کنیم، مجموع این مقادیر امید ریاضی میانگین مربعات مؤلفهٔ موردنظر در مدل است. مثلاً برای تعیین $E(MS_A)$، ستون i را می‌پوشانیم. در سطرهایی که حداقل شامل زیرنویس i هستند حاصلضرب اعدادی را که می‌بینیم عبارت‌اند از: bn (سطر اول)، ۰(سطر سوم)، و ۱ (سطر چهارم). توجه کنید که در سطر دوّم i وجود ندارد. بنابراین امید ریاضی میانگین مربعات عبارت است از

$$E(MS_A) = \sigma^2 + \frac{bn\sum_{i=1}^{a} \tau_i^2}{a-1}$$

جدول کامل امیدریاضی میانگین مربعات این طرح را در جدول ۱.۸ نشان داده‌ایم. جداول ۲.۸ و ۳.۸ امید ریاضی میانگین مربعات به ترتیب برای مدلهای دو عاملی تصادفی و آمیخته‌اند. طرح سه عاملی در مثال زیر آمده است.

مثال ۱.۸

یک آزمایش سه عاملی با a سطح برای عامل A، b سطح برای عامل B، c سطح برای عامل C، و n تکرار را در نظر بگیرید. تحلیل این طرح را با قبول آنکه تمام عوامل تثبیت شده‌اند در بخش ۵.۷ داده‌ایم. در اینجا امیدریاضی میانگین مربعات را وقتی‌که همهٔ عاملها تصادفی باشند تعیین

جدول ۲.۸ تعیین امیدریاضی میانگین مربعات برای مدل دو عاملی با اثرهای تصادفی

	R	R	R	
	a	b	n	امیدریاضی میانگین مربعات
عامل	i	j	k	
τ_i	۱	b	n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta} + bn\sigma^2_\tau$
β_j	a	۱	n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta} + an\sigma^2_\beta$
$(\tau\beta)_{ij}$	۱	۱	n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta}$
$\epsilon_{(ij)k}$	۱	۱	۱	σ^2

جدول ۳.۸ تعیین امیدریاضی میانگین مربعات، برای مدل آمیختهٔ دو عاملی

	F	R	R	
	a	b	n	امیدریاضی میانگین مربعات
عامل	i	j	k	
τ_i	۰	b	n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta} + \frac{bn\sum \tau_i^2}{a-1}$
β_j	a	۱	n	$\sigma^2 + an\sigma^2_\beta$
$(\tau\beta)_{ij}$	۰	۱	n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta}$
$\epsilon_{(ij)k}$	۱	۱	۱	σ^2

می‌کنیم. مدل آماری مناسب عبارت است از

$$y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\tau\beta\gamma)_{ijk} + \epsilon_{ijkl}$$

با استفاده از قواعدی که قبلاً گفتیم، امیدریاضی میانگین مربعات را به‌صورت جدول ۴.۸ به‌دست می‌آوریم.

با بررسی امیدریاضی میانگین مربعات در جدول ۴.۸، متذکر می‌شویم که اگر A، B، و C همگی عوامل تصادفی باشند، آن‌گاه هیچ آزمون دقیقی برای اثرهای اصلی وجود ندارد. یعنی، اگر بخواهیم فرض $\sigma^2_\tau = 0$ را آزمون کنیم، نمی‌توانیم نسبتی از دو امیدریاضی میانگین مربعات را طوری در نظر بگیریم که تنها مؤلفه‌ای از صورت که در مخرج نیست $bcn\sigma^2_\tau$ باشد. همین موضوع

جدول ۴.۸ تعیین امیدریاضی میانگین مربعات برای مدل سه عاملی با اثرهای تصادفی

عامل	R a i	R b j	R c k	R n l	امیدریاضی میانگین مربعات
τ_i	۱	b	c	n	$\sigma^2 + cn\sigma^2_{\tau\beta} + bn\sigma^2_{\tau\gamma} + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma} + bcn\sigma^2_{\tau}$
β_j	a	۱	c	n	$\sigma^2 + cn\sigma^2_{\tau\beta} + an\sigma^2_{\beta\gamma} + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma} + acn\sigma^2_{\beta}$
γ_k	a	b	۱	n	$\sigma^2 + bn\sigma^2_{\tau\gamma} + an\sigma^2_{\beta\gamma} + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma} + abn\sigma^2_{\gamma}$
$(\tau\beta)_{ij}$	۱	۱	c	n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma} + cn\sigma^2_{\tau\beta}$
$(\tau\gamma)_{jk}$	۱	b	۱	n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma} + bn\sigma^2_{\tau\gamma}$
$(\beta\gamma)_{jk}$	a	۱	۱	n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma} + bn\sigma^2_{\beta\gamma}$
$(\tau\beta\gamma)_{ijk}$	۱	۱	۱	n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma}$
$\epsilon_{(ijk)l}$	۱	۱	۱	۱	σ^2

برای اثرهای اصلی B و C صادق است. همچنین توجه کنید که آزمونهای دقیقی برای اثرهای متقابل دو و سه عاملی نیز وجود دارند. امّا احتمالاً آزمونهای اثرهای اصلی از دید آزمایشگر اهمیت خاص دارند. پس، چگونه باید اثرهای اصلی را آزمون کرد؟ این مسأله را در بخش بعد بررسی می‌کنیم. ■

۳.۸ آزمونهای تقریبی F

درمدلهای تصادفی یا آمیختهٔ آزمایشهای عاملی با سه عامل یا بیشتر و بعضی طرحهای پیچیده‌تر دیگر، غالباً هیچ آمارهٔ آزمون دقیقی برای اثرهای خاص این مدلها وجود ندارد. یک راه‌حل ممکن در چنین وضعی مشکل، آن‌است که بپذیریم بعضی اثرهای متقابل قابل اغماض‌اند. برای توضیح مطلب، مثلاً اگر در مثال ۱.۸ بتوانیم به‌صورتی معقول بپذیریم که اثرهای متقابل دو عاملی ناچیزند، آن‌گاه می‌توانیم قرار دهیم $\sigma^2_{\tau\beta} = \sigma^2_{\tau\gamma} = \sigma^2_{\beta\gamma} = 0$، و می‌توانیم اثرهای اصلی را آزمون کنیم.

هر چند ممکن است این موضوع به‌نظر جالب برسد، اما باید به‌این نکته اشاره کنیم که لازم است در پذیرش قابل اغماض بودن یک یا چند اثر متقابل، از قبل چیزی در طبیعت فرایند ببینیم یا شناختی کافی از آن داشته باشیم. به‌طور کلی نمی‌توان به‌سادگی این پذیره را عنوان کرد و نباید آن‌را کم اهمیت گرفت. نباید اثرهای متقابل مدل را بدون داشتن دلیل قاطع حذف کرد. روشی که برخی آزمایشگرها طرفدار آن هستند آن‌است که نخست اثرهای متقابل آزمون شوند، سپس اثرهای متقابلی را که معلوم شده است معنی‌دار نیستند مساوی صفر قرار داده و بعد از آن اثرهای دیگر

آزمایش آزمون شوند. امّا، عملاً گاهی این شیوه می‌تواند خطرناک باشد زیرا که هر تصمیمی در خصوص اثر متقابل، وابسته به هر دو خطای نوع اول و دوم است.

فکر دیگر ادغام میانگین مربعات در تحلیل واریانس برای به‌دست آوردن برآوردی از خطاست که درجهٔ آزادی بیشتری داشته باشد. مثلاً گیریم در مثال ۱.۸ آمارهٔ آزمون $F_\circ = MS_{ABC}/MS_{\text{خطا}}$ معنی‌دار نباشد. پس $H_\circ : \sigma^2_{\tau\beta\gamma} = \circ$ رد نمی‌شود، و MS_{ABC} و $MS_{\text{خطا}}$، هر دو، برآوردهای واریانس خطا، σ^2، هستند. آزمایشگر ممکن است MS_{ABC} و $MS_{\text{خطا}}$ را به‌صورت

$$MS_{\text{خطا}'} = \frac{abc(n-1)MS_{\text{خطا}} + (a-1)(b-1)(c-1)MS_{ABC}}{abc(n-1) + (a-1)(b-1)(c-1)}$$

به‌طوری که $E(MS_{\text{خطا}'}) = \sigma^2$ شود، در هم ادغام یا ترکیب کند و آن‌را به‌عنوان میانگین مربع خطا در نظر بگیرد. توجه کنید که $MS_{\text{خطا}'}$ در مقایسه با $abc(n-1)$ درجهٔ آزادی برای $MS_{\text{خطا}}$ دارای $abc(n-1) + (a-1)(b-1)(c-1)$ درجهٔ آزادی است. خطر ادغام کردن آن است که می‌تواند موجب ایجاد یک خطای نوع دوم شود که با میانگین مربع عاملی که واقعاً به‌خطا معنی‌دار است ترکیب شده در نتیجه میانگین مربع ماندهٔ جدیدی [$MS_{\text{خطا}'}$] به‌وجود آورد که بسیار بزرگ است. این کشف، معنی‌دار بودن اثرهای دیگر را مشکلتر می‌کند. از طرف دیگر، اگر میانگین مربعات اصلی خطا تعداد درجات آزادی بسیار کمی (مثلاً، کمتر از ۶) داشته باشد، آن‌گاه ممکن است آزمایشگر با ادغام کردن بیشتر سود ببرد، زیرا که این موضوع می‌تواند بالقوه دقت آزمونهای دیگر را به‌صورتی قابل ملاحظه افزایش دهد. شیوهٔ عملی معقول چنین است. اگر میانگین مربع خطای اصلی بیشتر از ۶ درجهٔ آزادی داشته باشد، ادغام نمی‌کنیم. اگر میانگین مربع خطای اصلی کمتر از ۶ درجهٔ آزادی داشته باشد، تنها در صورتی ادغام می‌کنیم که آمارهٔ F برای میانگین مربعات ادغام شده به‌ازای مقدار بزرگ α مثلاً، $\alpha = \circ/25$ معنی‌دار نباشد.

اگر نتوانیم بپذیریم که بعضی اثرهای متقابل قابل اغماض‌اند و هنوز به‌استنباطهایی دربارهٔ اثرهایی که برای آنها آزمونهای دقیق وجود ندارد نیاز داشته باشیم، می‌توانیم از شیوه‌ای منتسب به سترتوایت[1] (۱۹۴۶) استفاده کنیم. در روش سترتوایت از ترکیبهای خطی میانگین مربعات استفاده می‌کنند، مثلاً

(۱.۸)
$$MS' = MS_r + \cdots + MS_s$$

و

(۲.۸)
$$MS'' = MS_u + \cdots + MS_v$$

که در آن میانگین مربعات در معادلات (۱.۸) و (۲.۸) به‌گونه‌ای انتخاب شده‌اند که $E(MS') - E(MS'')$ برابر اثر مورد نظر (پارامتر مدل یا مؤلفهٔ واریانس) در فرض صفر باشد.

1. Satterthwaite

به‌این ترتیب آمارهٔ آزمون عبارت است از،

$$F = \frac{MS'}{MS''} \tag{۳.۸}$$

که تقریباً توزیع $F_{p,q}$ دارد، که در آن

$$p = \frac{(MS_r + \cdots + MS_s)^2}{MS_r^2/f_r + \cdots + MS_r^2/f_s} \tag{۴.۸}$$

و

$$q = \frac{(MS_u + \cdots + MS_v)^2}{MS_u^2/f_u + \cdots + MS_v^2/f_v} \tag{۵.۸}$$

در عبارتهای p و q، f_i تعداد درجات آزادی میانگین مربعات MS_i است. اطمینان نداریم که p و q اعداد صحیحی باشند، لذا لازم است که جداول توزیع F درونیابی شوند. مثلاً، در مدل اثرهای تصادفی سه عاملی (جدول ۴.۸)، نسبتاً ساده است که ملاحظه کنید آمارهٔ آزمون مناسب برای $H_0 : \sigma_\tau^2 = 0$، $F = MS'/MS''$ است، که در آن

$$MS' = MS_A + MS_{ABC}$$

و

$$MS'' = MS_{AB} + MS_{AC}$$

درجات آزادی برای F بنابر معادلات (۴.۸) و (۵.۸) محاسبه می‌شوند.

نظریهٔ زیربنایی این آزمون آن‌است که صورت و مخرج آمارهٔ آزمون [معادلهٔ (۳.۸)] هر دو تقریباً توزیعی به‌صورت مضاربی از متغیرهای تصادفی مربع خی دارند، و به‌دلیل اینکه هیچ میانگین مربعی در صورت و مخرج معادلهٔ (۳.۸) نیامده است، صورت و مخرج از هم مستقل‌اند. پس F در معادلهٔ (۳.۸) تقریباً توزیع $F_{p,q}$ دارد. سترتوایت می‌گوید که در به‌کار بردن این شیوه باید وقتی بعضی میانگین مربعها در MS' و MS'' با علامت منفی ظاهر می‌شوند جانب احتیاط را رعایت کرد. گیلر و هوپر[1] (۱۹۶۹) گزارش داده‌اند که اگر $MS' = MS_1 - MS_2$، آن‌گاه تقریب سترتوایت در صورتی به‌طور معقول برقرار است که

$$\frac{MS_1}{MS_2} > F_{0.025, f_2, f_1} \times F_{0.50, f_2, f_2}$$

و $f_1 \leq 100$ و $f_2 \geqslant f_1/2$ باشد.

1. Gaylor and Hopper

مثال ۲.۸ افت فشار در شیر انبساط یک توربین تحت مطالعه است. مهندس طرح، متغیرهای مهمی که در افت فشار مؤثرند، دمای گاز در مدخل (A)، سرعت توربین (B)، و فشارگاز در مدخل (C) را در نظر گرفته است. این سه عامل در یک طرح عاملی وقتی‌که دمای گاز تثبیت شده و سرعت توربین و فشار تصادفی بوده‌اند تنظیم شده‌اند. داده‌ها برای دو تکرار در جدول ۵.۸ کدبندی شده‌اند. مدل خطی برای این طرح عبارت است از:

$$y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\tau\beta\gamma)_{ijk} + \epsilon_{ijkl}$$

که در آن τ_i اثر دمای گاز (A)، β_j اثر سرعت توربین (B)، و γ_k اثر فشار گاز (C) است.

تحلیل واریانس را در جدول ۶.۸ آورده‌ایم. ستونی تحت عنوان «امید ریاضی میانگین مربعات» را به‌این جدول اضافه کرده‌ایم، و درایه‌های موجود در این ستون را به‌روشی که در بخش ۲.۸ بحث آن گذشت تعیین نموده‌ایم. بنابر ستون امید ریاضی میانگین مربعات، ملاحظه می‌کنیم که آزمونهای

جدول ۵.۸ داده‌های افت فشار کدبندی شده برای آزمایش توربین

فشار (C)	دمای گاز (A): ۶۰°F، سرعت (B): ۱۵۰	۲۰۰	۲۲۵	۳۰۰	۷۵°F، سرعت (B): ۱۵۰	۲۰۰	۲۲۵	۳۰۰	۹۰°F، سرعت (B): ۱۵۰	۲۰۰	۲۲۵	۳۰۰
۵۰ پوند بر اینچ مربع	−۲	۰	−۱	۴	۱۴	۶	۱	−۷	−۸	−۲	−۱	−۲
	−۳	−۹	−۸	۴	۱۴	۰	۲	۶	−۸	۲۰	−۲	۱
۷۵ پوند بر اینچ مربع	−۶	−۵	−۸	−۳	۲۲	۸	۶	−۵	−۸	۱	−۹	−۸
	۴	−۱	−۲	−۷	۲۴	۶	۲	۲	۳	−۷	−۸	۳
۸۵ پوند بر اینچ مربع	−۱	−۴	۰	−۲	۲۰	۲	۳	−۵	−۲	−۱	−۴	۱
	−۲	−۸	−۷	۴	۱۶	۰	۰	−۱	−۱	−۲	−۷	۳

دقیق برای تمام اثرها بجز اثر اصلی A وجود دارند. نتایج این آزمونها را در جدول ۶.۸ نشان داده‌ایم. برای آزمون $H_0 : \tau_i = 0$، می‌توان از آمارهٔ

$$F = \frac{MS'}{MS''}$$

که در آن:

$$MS' = MS_A + MS_{ABC}$$

و

$$MS'' = MS_{AB} + MS_{AC}$$

جدول ۶.۸ تحلیل واریانس برای داده‌های افت فشار

منبع تغییر	مجموع مربعات	درجات آزادی	امیدریاضی میانگین مربعات	میانگین مربعات	F_0
دما (A)	۶۱۶٫۷۸	۲	$\sigma^2 + bn\sigma^2_{\tau\gamma} + cn\sigma^2_{\tau\beta} + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma} + \frac{bnc\sum \tau_i^2}{a-1}$	۳۰۸٫۳۹	۱٫۸۲
سرعت (B)	۱۷۵٫۵۶	۳	$\sigma^2 + an\sigma^2_{\beta\gamma} + acn\sigma^2_{\beta}$	۵۸٫۵۲	۱٫۴۵
فشار (C)	۵٫۰۳	۲	$\sigma^2 + an\sigma^2_{\beta\gamma} + abn\sigma^2_{\gamma}$	۲٫۵۲	۰٫۰۶
AB	۸۰۹٫۴۴	۶	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma} + cn\sigma^2_{\tau\beta}$	۱۳۴٫۹۱	۷٫۰۰*
AC	۱۷۹٫۰۶	۴	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma} + bn\sigma^2_{\tau\gamma}$	۴۴٫۷۷	۲٫۳۲**
BC	۲۴۲٫۱۹	۶	$\sigma^2 + an\sigma^2_{\beta\gamma}$	۴۰٫۳۷	۱٫۱۶
ABC	۲۳۱٫۰۷	۱۲	$\sigma^2 + an\sigma^2_{\tau\beta\gamma}$	۱۹٫۲۶	۰٫۵۶
خطا	۱۲۴۸٫۰۰	۳۶	σ^2	۳۴٫۶۷	
کل	۳۵۰۷٫۱۱	۷۱			

* معنادار در ۱ درصد.

** معنادار در ۲۵ درصد.

است استفاده کرد، زیرا

$$E(MS') - E(MS'') = \frac{bcn \sum \tau_i^۲}{a - ۱}$$

به‌منظور تعیین آمارهٔ آزمون برای $H_۰ : \tau_i = ۰$، مقادیر زیر را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} MS' =& MS_A + MS_{ABC} \\ =& ۳۰۸٫۳۹ + ۱۹٫۲۶ = ۳۲۷٫۶۵ \\ MS'' =& MS_{AB} + MS_{AC} \\ =& ۱۳۴٫۹۱ + ۴۴٫۷۷ = ۱۷۹٫۶۸ \end{aligned}$$

و

$$F = \frac{MS'}{MS''} = \frac{۳۲۷٫۶۵}{۱۷۹٫۶۸} = ۱٫۸۲$$

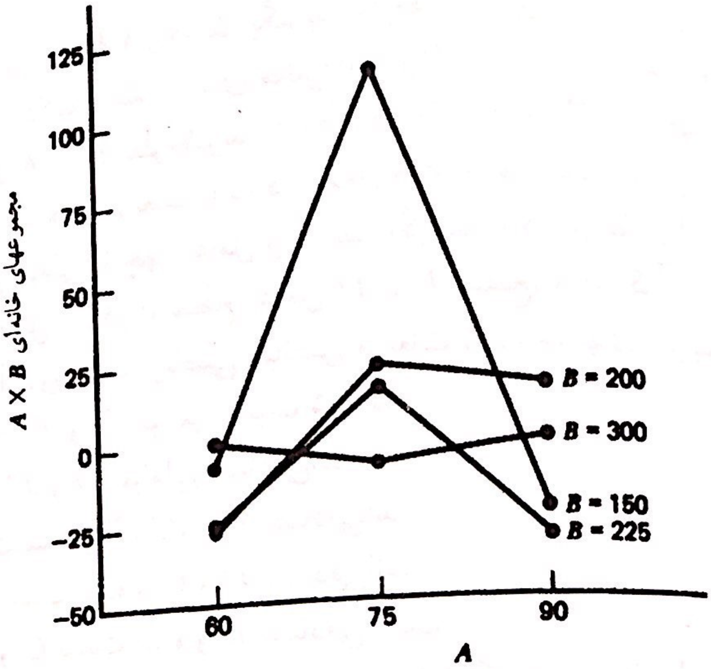
درجه‌های آزادی این آماره عبارت‌اند از:

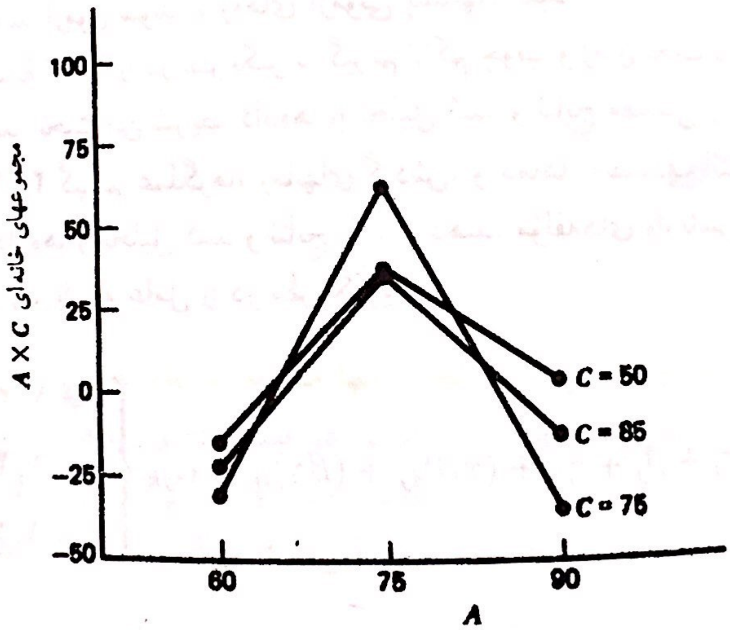
$$\begin{aligned} p =& \frac{(MS_A + MS_{ABC})^۲}{MS_A^۲/۲ + MS_{ABC}^۲/۱۲} \\ =& \frac{(۳۲۷٫۶۵)^۲}{(۳۰۸٫۳۹)^۲/۲ + (۱۹٫۲۶)^۲/۱۲} = ۲٫۲۶ \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} q =& \frac{(MS_{AB} + MS_{AC})^۲}{MS_{AB}^۲/۶ + MS_{AC}^۲/۴} \\ =& \frac{(۱۷۹٫۶۸)^۲}{(۱۳۴٫۹۱)^۲/۶ + (۴۴٫۷۷)^۲/۴} = ۶٫۳۴ \end{aligned}$$

از مقایسهٔ $F = ۱٫۸۲$ با $F_{۰٫۰۵,۲٫۲۶,۶٫۳۴}$ فرض $H_۰$ را نمی‌توان رد کرد. اثر متقابل AB بزرگ است و نشانه‌هایی از اثر متقابل AC وجود دارد. تحلیل نموداری اثرهای متقابل AB و AC را در شکل ۱.۸ نشان داده‌ایم، که مشخص می‌کند اثر A در سطوح پایین B و $C = ۷۵$ ممکن است بزرگ باشد. پس به‌نظر ممکن می‌آید که اثرهای اصلی A و B به‌وسیلهٔ اثر متقابل بزرگ AB پنهان شده باشند. ■





شکل ۱.۸ اثرهای متقابل در آزمایش افت فشار.

۴.۸ مسائل

۱.۸ با استفاده از شیوهٔ مورد بحث در بخش ۲.۸، امیدریاضی میانگین مربعات را برای مدل عاملی با سه عامل و مدل اثرهای تثبیت شده تعیین کنید.

۲.۸ باکاربرد عملگر امیدریاضی، امیدریاضی میانگین مربعات را برای مدل آمیخته با دو عامل بدست آورید. نتایج خود را، برای ملاحظهٔ مطابقت، با امید ریاضی میانگین مربعاتی که در جدول ۳.۸ داده شده‌اند مقایسه کنید.

۳.۸ طرح سه عاملی مثال ۱.۸ را در نظر بگیرید. آماره‌های آزمون مناسبی برای کلیهٔ اثرهای اصلی و اثرهای متقابل پیشنهادکنید. مطلب را برای حالتی که A و B تثبیت شده و C تصادفی است تکرارکنید.

۴.۸ داده‌های مثال ۲.۸ را در نظر بگیرید. داده‌ها را در حالتی که A، B، و C تصادفی‌اند تحلیل کنید.

۵.۸ امیدریاضی میانگین مربعات را که در جدول ۶.۸ آمده‌اند به‌دست آورید.

۶.۸ یک آزمایش عاملی با چهار عامل را در نظر بگیرید که در آن عامل A در a سطح، عامل B در b سطح، عامل C در c سطح، عامل D در d سطح، و n تکرار داشته باشیم. مجموع مربعات، درجات آزادی، و امیدریاضی میانگین مربعات را در حالتهای زیر بنویسید.

(الف) A، B، C، و D عواملی تثبیت شده‌اند.

(ب) A، B، C، و D عواملی تصادفی‌اند.

(ج) A تثبیت شده و B، C، و D تصادفی‌اند.

(د) A و B تثبیت شده و C و D تصادفی‌اند.

(ه) A، B، و C تثبیت شده و D تصادفی است.

آیا آزمونهای دقیق برای تمام این اثرها وجود دارند؟ اگر جواب منفی است، برای آن اثرهایی که مستقیماً نمی‌توانند آزمون شوند آماره‌های آزمونی پیشنهاد کنید.

۷.۸ داده‌های مسألهٔ ۲۰.۷ را در نظر بگیرید. گیریم تراکم چوب و زمان پخت تثبیت شده و عامل فشار تصادفی باشد. تحت این شرایط داده‌ها را تحلیل کنید و نتایج مقتضی را ارائه دهید.

۸.۸ در مسألهٔ ۲۱.۷ گیریم عملگرها، زمانهای گردش، و دماها به‌تصادف انتخاب شده باشند. تحت این شرایط داده‌ها را تحلیل کنید و نتایج را ارائه دهید. مؤلفه‌های واریانس را برآورد کنید.

۹.۸ مدل عاملی زیر با سه عامل را در نظر بگیرید

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\beta\gamma)_{ik} + \epsilon_{ijk} \begin{cases} i = ۱, ۲, \ldots, a \\ j = ۱, ۲, \ldots, b \\ k = ۱, ۲, \ldots, c \end{cases}$$

گیریم تمام عوامل تصادفی‌اند. جدول تحلیل واریانس از جمله امیدریاضی میانگین مربعات را بنویسید. آماره‌های مناسب آزمون را برای تمام اثرها پیشنهاد کنید.

۱۰.۸ مدل عاملی زیر را با سه عامل و یک تکرار در نظر بگیرید.

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\beta\gamma)_{jk} + (\tau\gamma)_{ik} + (\tau\beta\gamma)_{ijk} + \epsilon_{ijk}$$

اگر تمام عوامل تصادفی باشند، آیا هیچ اثری را می‌توان آزمون کرد؟ اگر اثر متقابل سه عاملی و اثر متقابل $(\tau\beta)_{ij}$ وجود نداشته باشند، آیا می‌توان بقیهٔ اثرها را آزمون کرد؟

۹

طرح عاملی ۲^k

۱.۹ مقدمه

در آزمایشهای مشتمل بر چندین عامل که در آنها مطالعهٔ اثر توأم عوامل بر پاسخ ضروری است طرحهای عاملی به صورتی وسیع کاربرد دارند. در فصل هفتم روشهای کلی تحلیل طرحهای عاملی را معرفی کردیم. اما چندین مورد خاص از طرحهای کلی عاملی وجود دارند که به دلیل کاربرد وسیع در کارهای پژوهشی همچنین به دلیل اینکه اساس طرحهای قابل ملاحظهٔ دیگری هستند که عملاً باارزش‌اند، اهمیت دارند.

مهمترین این موارد خاص، k عامل هر یک تنها در دو سطح است. این سطوح می‌توانند کمّی، مثل دو مقدار دما، فشار، یا زمان؛ یا می‌توانند کیفی، مثل دو ماشین، دو عملگر، سطوح «بالا» و «پایین» عامل، یا حتی حضور یا عدم حضور یک عامل باشند. تکرار کامل چنین طرحی نیاز به $۲ \times ۲ \times \cdots \times ۲ = ۲^k$ مشاهده دارد که آن‌را طرح عاملی ۲^k می‌گویند.

در این فصل روشهای خاص تحلیل این سری طرحهای مفید را معرفی می‌کنیم. در این فصل می‌پذیریم که (۱) عوامل تثبیت شده‌اند، (۲) طرحها کاملاً تصادفی‌شده‌اند، و (۳) پذیره‌های معمول نرمال بودن برقرارند.

طرح عاملی ۲^k به‌خصوص در مراحل اولیهٔ عملیات آزمایشی وقتی احتمالاً عوامل زیادی

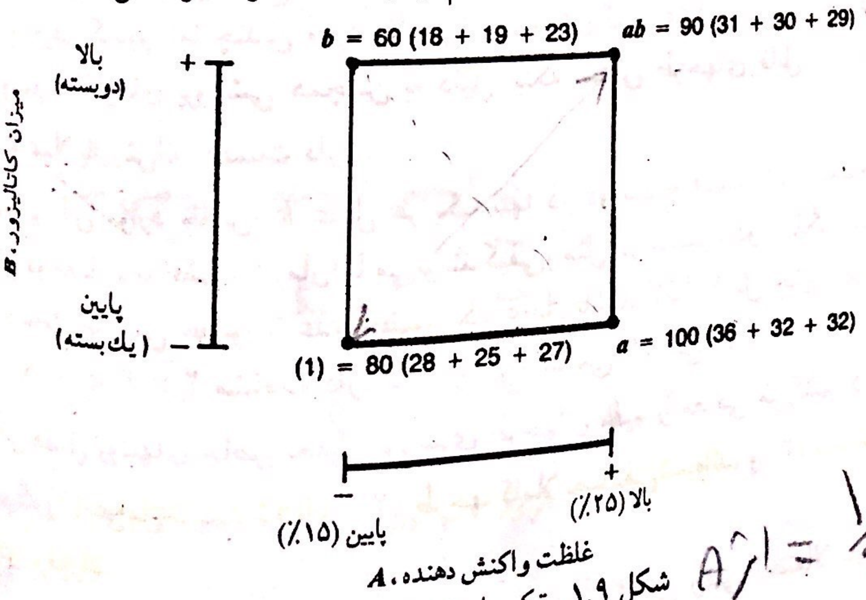
باید بررسی شوند مفید است. این طرح کمترین تعداد اجرا را، وقتی‌که k عامل می‌توانند در یک طرح کامل عاملی مطالعه شوند، طلب می‌کند. به دلیل اینکه برای هر عامل تنها دو سطح وجود دارد، لذا باید بپذیریم که پاسخ روی دامنهٔ سطوح انتخابی عامل تقریباً خطی است.

۲.۹ طرح 2^2

اولین طرح در سری طرحهای 2^k طرحی تنها با دو عامل است، مثلاً A و B، هریک در دو سطح. این طرح را طرح عاملی 2^2 می‌گویند. سطوح عوامل می‌توانند دلخواه باشند که آنها را «پایین» و «بالا» می‌نامیم. مثلاً، در یک فرایند شیمی بررسی اثر غلظت یک واکنش‌دهنده و میزان کاتالیزور را در زمان واکنش در نظر بگیرید. گیریم غلظت واکنش‌دهنده، عامل A باشد و دو سطح موردنظر ۱۵ درصد و ۲۵ درصد باشند. کاتالیزور، عامل B است که در سطح بالا معرف استفاده از دو بسته کاتالیزور و در سطح پایین معرف استفاده از تنها یک بسته کاتالیزور است. آزمایش سه بار تکرار شده است و داده‌ها را ذیلاً نشان داده‌ایم.

ترکیب تیماری	تکرار I	تکرار II	تکرار III	کل
A پایین، B پایین	۲۸	۲۵	۲۷	۸۰
A بالا، B پایین	۳۶	۳۲	۳۲	۱۰۰
A پایین، B بالا	۱۸	۱۹	۲۳	۶۰
A بالا، B بالا	۳۱	۳۰	۲۹	۹۰

در این طرح ترکیبهای تیماری را به‌صورت نموداری در شکل ۱.۹ نشان داده‌ایم. بنابه قرارداد، اثر یک عامل را با حرف بزرگ لاتین نشان داده‌ایم. پس، «A» معرف اثر عامل A، «B» معرف اثر



شکل ۱.۹ ترکیبهای تیماری در طرح 2^2.

$\frac{ab-b}{n}$

$\frac{a-(1)}{n}$

$A = \frac{1}{2}\left(\frac{ab-a}{n} + \frac{a-(1)}{n}\right.$

$AB = \frac{[ab-a] - [a-(1)]}{2n}$

B، و «AB» معرف اثر متقابل AB است. در طرح 2^2 سطوح پایین و بالای A و B را به‌ترتیب روی محورهای A و B با «$-$» و «$+$» مشخص کرده‌ایم. پس، $-$ روی محور A معرف سطح پایین غلظت (۱۵٪) است در صورتی‌که $+$ معرف سطح بالا (۲۵٪)، و $-$ روی محور B معرف سطح پایین کاتالیزور و $+$ معرف سطح بالای کاتالیزور است.

معمولاً چهار ترکیب تیمار در طرح را همان‌طورکه در شکل ۱.۹ نشان داده‌ایم با حروف کوچک نشان می‌دهیم. از شکل می‌بینیم که سطح بالای هر عامل در ترکیب تیمار با حرف کوچک متناظر آن مشخص شده و سطح پایین عامل در ترکیب تیمار با نادیده‌گرفتن حرف متناظر آن بیان گردیده است. پس، a ترکیب تیمار را در سطح بالای A و در سطح پایین B نشان می‌دهد، b سطح پایین A و سطح بالای B را مشخص می‌نماید، و ab هر دو عامل را در سطوح بالا مشخص می‌کند. بنا به قرارداد، (۱) را برای معرفی هر دو عامل در سطوح پایین به‌کار می‌بریم. از این نماد در تمام طرحهای 2^k استفاده خواهیم کرد.

متوسط اثر یک عامل را برابر اختلاف متوسطهای اثر آن عامل در سطوح عامل دیگر تعریف می‌کنیم. همچنین، در اینجا نمادهای (۱)، a، b، و ab همان‌طور که شکل ۱.۹ نشان می‌دهد کل همهٔ n تکرار حاصل در ترکیبهای تیمارند. حال اثر A در سطح پایین B، $[a-(1)]/n$ و اثر A در سطح بالای B، $[ab-b]/n$ است. متوسط این دو مقدار عبارت است از

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2n}\{[ab-b]+[a-(1)]\} \\ &= \frac{1}{2n}[ab+a-b-(1)] \end{aligned} \tag{۱.۹}$$

متوسط اثر B از اثر B در سطح پایین A (یعنی؛ $[b-(1)]/n$) و در سطح بالای A (یعنی؛ $[ab-a]/n$) به‌صورت

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2n}\{[ab-a]+[b-(1)]\} \\ &= \frac{1}{2n}[ab+b-a-(1)] \end{aligned} \tag{۲.۹}$$

تعیین می‌شود.

اثر متقابل AB را به‌صورت متوسط اختلاف بین اثر A در سطح بالای B و اثر A در سطح پایین B تعریف می‌کنیم. پس،

$$\begin{aligned} AB &= \frac{1}{2n}\{[ab-b]-[a-(1)]\} \\ &= \frac{1}{2n}[ab+(1)-a-b] \end{aligned} \tag{۳.۹}$$

به شکل دیگر، می‌توان اثر متقابل AB را به‌صورت اختلاف بین اثر B در سطح بالای A و اثر B در سطح پایین A تعریف کرد. این نیز به معادلهٔ (۳.۹) منتهی می‌شود.

فرمولهای اثرهای A، B، و AB را می‌توان به روش دیگر به‌دست آورد. اثر A را می‌توان به‌صورت اختلاف در متوسط پاسخ دو ترکیب تیمار در طرف راست مربع شکل ۱.۹ (این متوسط را $\overline{y}_{A+}$ نامیده‌ایم، زیرا متوسط پاسخ در ترکیبهای تیمارها در سطح بالای A است) و دو ترکیب تیمار در طرف چپ (یا $\overline{y}_{A-}$) پیدا کرد. یعنی،

$$\begin{aligned} A &= \overline{y}_{A+} - \overline{y}_{A-} \\ &= \frac{ab+a}{۲n} - \frac{b+(۱)}{۲n} \\ &= \frac{۱}{۲n}[ab+a-b-(۱)] \end{aligned}$$

این دقیقاً همان نتیجه در معادلهٔ (۱.۹) است. اثر B، معادلهٔ (۲.۹)، به‌صورت اختلاف بین متوسط دو ترکیب تیماری در بالای مربع ($\overline{y}_{B+}$) و متوسط دو ترکیب تیماری در پایین مربع ($\overline{y}_{B-}$)، با به‌صورت

$$\begin{aligned} B &= \overline{y}_{B+} - \overline{y}_{B-} \\ &= \frac{ab+b}{۲n} - \frac{a+(۱)}{۲n} \\ &= \frac{۱}{۲n}[ab+b-a-(۱)] \end{aligned}$$

تعیین می‌شود. بالاخره، اثر متقابل AB متوسط ترکیبهای تیماری روی قطر مربع از راست به چپ [ab و (۱)] منهای متوسط ترکیبهای تیماری روی قطر از چپ به راست (a و b)، یا

$$\begin{aligned} AB &= \frac{ab+(۱)}{۲n} - \frac{a+b}{۲n} \\ &= \frac{۱}{۲n}[ab+(۱)-a-b] \end{aligned}$$

است که همان معادلهٔ (۳.۹) است.

بااستفاده از داده‌های مثال شکل ۱.۹، می‌توان متوسط اثرها را به‌صورت زیر برآورد کرد

$$A = \frac{۱}{۲(۳)}(۹۰ + ۱۰۰ - ۶۰ - ۸۰) = ۸٫۳۳$$
$$B = \frac{۱}{۲(۳)}(۹۰ + ۶۰ - ۱۰۰ - ۸۰) = -۵٫۰۰$$
$$AB = \frac{۱}{۲(۳)}(۹۰ + ۸۰ - ۱۰۰ - ۶۰) = ۱٫۶۷$$

اثر A (غلظت واکنش‌دهنده) مثبت است؛ این معلوم می‌کند که افزایش A از سطح پایین (۱۵٪) به سطح بالا (۲۵٪) نتیجه را افزایش خواهد داد. اثر B (کاتالیزور) منفی است؛ این معلوم می‌کند که افزایش مقدار کاتالیزور به فرایند نتیجه را کاهش می‌دهد. اثر متقابل نسبت به دو اثر اصلی کوچک به‌نظر می‌رسد.

در بسیاری از آزمایشهای مربوط به طرحهای ۲^k، برای تعیین آنکه چه متغیرهایی احتمالاً مهم هستند مقدار و جهت اثرهای عامل را بررسی می‌کنیم. معمولاً از تحلیل واریانس می‌توان برای تأیید چنین تفسیرهایی استفاده کرد. در طرح ۲^k برای انجام محاسبات تحلیل واریانس روشهای خاصی وجود دارند که کمتر وقت‌گیرند.

مجموع مربعات برای A، B، و AB را در نظر بگیرید. توجه کنید که بنابر معادلهٔ (۱.۹) مقابله‌ای که از آن در برآورد A استفاده شده است بدین‌صورت است

$$A \text{ مقابلهٔ} = ab + a - b - (۱) \qquad (۴.۹)$$

معمولاً این مقابله را کل اثر A می‌نامیم. بنابر معادلات (۲.۹) و (۳.۹) می‌بینیم که در برآورد B و AB نیز از مقابله‌ها استفاده کرده‌ایم. به‌علاوه این سه مقابله متعامدند. مجموع مربعات هر مقابله را می‌توان از روی معادلهٔ (۱۹.۳) محاسبه کرد که می‌گوید مجموع مربعات هر مقابله برابر است با مربع آن مقابله تقسیم بر تعداد مشاهدات مقابله ضربدر مجموع مربعات ضرایب آن مقابله. در نتیجه، برای مجموع مربعات A، B، و AB داریم:

$$SS_A = \frac{[ab + a - b - (۱)]^۲}{n \times ۴} \qquad (۵.۹)$$

$$SS_B = \frac{[ab + b - a - (۱)]^۲}{n \times ۴} \qquad (۶.۹)$$

و

$$SS_{AB} = \frac{[ab + (۱) - a - b]^۲}{n \times ۴} \qquad (۷.۹)$$

بااستفاده از داده‌های شکل ۱.۹ می‌توانیم مجموع مربعات را از معادلات (۵.۹)، (۶.۹)، و (۷.۹) به‌صورت زیر به‌دست آوریم

$$SS_A = \frac{(۵۰)^۲}{۴(۳)} = ۲۰۸٫۳۳$$

$$SS_B = \frac{(-۳۰)^۲}{۴(۳)} = ۷۵٫۰۰ \qquad (۸.۹)$$

و

$$SS_{AB} = \frac{(۱۰)^۲}{۴(۳)} = ۸٫۳۳$$

کل مجموع مربعات مطابق معمول پیدا می‌شود، یعنی

$$SS_{\text{کل}} = \sum_{i=۱}^{۲}\sum_{j=۱}^{۲}\sum_{k=۱}^{n} y_{ijk}^{۲} - \frac{y_{...}^{۲}}{۴n} \qquad (۹.۹)$$

به‌طورکلی، $SS_{\text{کل}}$، $۴n - ۱$ درجهٔ آزادی دارد. مجموع مربعات خطا، با $۴(n-۱)$ درجهٔ آزادی مطابق معمول با تفریق کردن محاسبه می‌شود، یعنی

$$SS_{\text{خطا}} = SS_{\text{کل}} - SS_A - SS_B - SS_{AB} \qquad (۱۰.۹)$$

برای داده‌های شکل ۱.۹، به‌دست می‌آوریم

$$SS_{\text{کل}} = \sum_{i=۱}^{۲}\sum_{j=۱}^{۲}\sum_{k=۱}^{۳} y_{ijk}^{۲} - \frac{y_{...}^{۲}}{۴(۳)}$$
$$= ۹۳۹۸٫۰۰ - ۹۰۷۵٫۰۰ = ۳۲۳٫۰۰$$

و بااستفاده از مقادیر SS_A، SS_B، و SS_{AB} در معادلات (۸.۹)،

$$SS_{\text{خطا}} = SS_{\text{کل}} - SS_A - SS_B - SS_{AB}$$
$$= ۳۲۳٫۰۰ - ۲۰۸٫۳۳ - ۷۵٫۰۰ - ۸٫۳۳$$
$$= ۳۱٫۳۴$$

تحلیل کامل واریانس در جدول ۱.۹ خلاصه می‌شود. هر دو اثر اصلی به‌طور آماری در یک

جدول ۱.۹ تحلیل واریانس برای داده‌های شکل ۱.۹

منبع تغییر	مجموع مربعات	درجات آزادی	میانگین مربعات	F_0
A	۲۰۸٫۳۳	۱	۲۰۸٫۳۳	۵۳٫۱۵*
B	۷۵٫۰۰	۱	۷۵٫۰۰	۱۹٫۱۳*
AB	۸٫۳۳	۱	۸٫۳۳	۲٫۱۳
خطا	۳۱٫۳۴	۸	۳٫۹۲	
کل	۳۲۳٫۰۰	۱۱		

* معنی‌دار در یک درصد.

درصد معنی‌دارند. این موضوع تفسیر اولیهٔ ما را از داده‌ها براساس اندازهٔ اثرهای عامل تأیید می‌کند.

اغلب راحت‌تر است که ترکیبهای تیماری را به‌ترتیب (۱)، a، b، و ab بنویسیم. این ترتیب را ترتیب استاندارد می‌گویند. بااستفاده از ترتیب استاندارد می‌بینیم که ضرایب مقابله که در برآورد اثرها استفاده کرده‌ایم عبارت‌اند از:

اثرها	(۱)	a	b	ab
A :	−۱	+۱	−۱	+۱
B :	−۱	−۱	+۱	+۱
AB :	+۱	−۱	−۱	+۱

توجه کنید که ضرایب مقابله برای برآورد اثر متقابل دقیقاً برابر حاصلضرب ضرایب متناظر دو اثرهای اصلی‌اند. ضریب مقابله همیشه ۱+ یا ۱− است، و از جدولی با علامتهای + یا − مانند جدول ۲.۹ می‌توان برای تعیین علامت درست هر ترکیب تیماری استفاده کرد. در جدول ۲.۹ عنوان ستونها اثرهای اصلی (A و B)، اثر متقابل AB و ۱ است که مجموع یا متوسط کل آزمایش را نشان می‌دهد. توجه کنید که ستون متناظر با ۱، تنها دارای علامتهای مثبت است. مشخصه‌های سطری، ترکیبهای تیماری‌اند. برای تعیین مقابله برآورد هر اثر، تنها علامتهای ستون مربوط در جدول را در ترکیبهای تیماری متناظر آن ضرب نموده و آنها را با هم جمع می‌کنیم. مثلاً برآورد A، مقابلهٔ $-(1)+a-b+ab$ است که با معادلهٔ (۱.۹) مطابقت می‌کند.

جدول ۲.۹ علامتهای جبری برای محاسبهٔ اثرها در طرح 2^2

ترکیبهای تیماری	اثر عاملی			
	۱	A	B	AB
(۱)	+	−	−	+
a	+	+	−	−
b	+	−	+	−
ab	+	+	+	+

تحلیل مانده‌ای. محاسبهٔ مانده‌های یک طرح 2^k از طریق مدل رگرسیون ساده است. برای آزمایش فرایند شیمی، مدل رگرسیون

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \epsilon$$

است، که در آن x_1 متغیر کدگذاری‌شده غلظت واکنش‌دهنده، x_2 متغیر کدگذاری‌شده میزان کاتالیزور و βها ضرایب رگرسیون‌اند. بستگی بین متغیرهای اصلی غلظت واکنش‌دهنده و میزان کاتالیزور و متغیرهای x_1 و x_2 عبارت‌اند از:

$$x_1 = \frac{\text{غلظت} - [\text{غلظت (کم)} + \text{غلظت (زیاد)}]/2}{[\text{غلظت (زیاد)} - \text{غلظت (کم)}]/2}$$

و

$$x_2 = \frac{\text{کاتالیزور} - [\text{کاتالیزور (کم)} + \text{کاتالیزور (زیاد)}]/2}{[\text{کاتالیزور (زیاد)} - \text{کاتالیزور (کم)}]/2}$$

وقتی متغیرهای اصلی تنها دو سطح دارند به‌موجب این کدگذاری مقادیر معمولی ± 1 را برای سطوح متغیرهای کدگذاری‌شده فراهم می‌کند. برای روشن‌شدن موضوع توجه کنید که در مثال موردبحث،

$$x_1 = \frac{\text{غلظت} - (15 + 25)/2}{(25 - 15)/2} = \frac{\text{غلظت} - 20}{5}$$

پس، اگر غلظت در سطح بالا باشد (۲۵٪=غلظت)، آن‌گاه ۱+ = x_1 و اگر غلظت در سطح پایین باشد (۱۵٪=غلظت)، آن‌گاه ۱− = x_1. به‌علاوه

$$x_2 = \frac{\text{کاتالیزور} - (۱ + ۲)/۲}{(۲ - ۱)/۲}$$
$$= \frac{\text{کاتالیزور} - ۱٫۵}{۰٫۵}$$

بنابراین، اگر کاتالیزور در سطح بالا باشد (دو بسته=کاتالیزور)، آن‌گاه ۱+ = x_2 و اگر کاتالیزور در سطح پایین باشد (یک بسته=کاتالیزور)، آن‌گاه ۱− = x_2.

مدل رگرسیون برازانده‌شده، عبارت است از

$$\hat{y} = \underbrace{۲۷٫۵}_{\text{میانگین کل}} + \overbrace{\left(\frac{۸٫۳۳}{۲}\right)}^{\text{نصف اثر A}} x_1 + \overbrace{\left(\frac{-۵٫۰۰}{۲}\right)}^{\text{نصف اثر B}} x_2$$

که در آن عرض از مبدأ متوسط کل تمام ۱۲ مشاهده، و ضرایب رگرسیون $\hat{\beta}_1$ و $\hat{\beta}_2$ هر کدام نصف برآوردهای اثر عوامل متناظرند. دلیل اینکه ضرایب رگرسیون نصف برآورد اثر است آن‌است که ضریب رگرسیون، اثر یک واحد تغییر x را در میانگین y نشان می‌دهد، و برآورد اثر براساس دو واحد تغییر (از ۱− تا ۱+) بوده است.

از این مدل می‌توان در پیش‌بینی مقادیر y در چهار نقطهٔ طرح استفاده کرد. مثلاً، وقتی غلظت واکنش‌دهنده در سطح پایین (۱− = x_1) و کاتالیزور نیز در سطح پایین است (۱− = x_2)، پیش‌بینی محصول عبارت است از

$$\hat{y} = ۲۷٫۵ + \left(\frac{۸٫۳۳}{۲}\right)(-۱) + \left(\frac{-۵٫۰۰}{۲}\right)(-۱)$$
$$= ۲۵٫۸۳۵$$

در این ترکیب تیماری سه مشاهده داریم و مانده‌ها عبارت‌اند از:

$$e_1 = ۲۸ - ۲۵٫۸۳۵ = ۲٫۱۶۵$$
$$e_2 = ۲۵ - ۲۵٫۸۳۵ = -۰٫۸۳۵$$
$$e_3 = ۲۷ - ۲۵٫۸۳۵ = ۱٫۱۶۵$$

مابقی مقادیر پیش‌بینی‌شده و مانده‌ها به تشابه محاسبه می‌شوند. برای سطح بالای غلظت واکنش‌دهنده و سطح پایین کاتالیزور:

$$\hat{y} = ۲۷٫۵ + \left(\frac{۸٫۳۳}{۲}\right)(+۱) + \left(\frac{-۵٫۰۰}{۲}\right)(-۱)$$
$$= ۳۴٫۱۶۵$$

و

$$e_۴ = ۳۶ - ۳۴٫۱۶۵ = ۱٫۸۳۵$$
$$e_۵ = ۳۲ - ۳۴٫۱۶۵ = -۲٫۱۶۵$$
$$e_۶ = ۳۲ - ۳۴٫۱۶۵ = -۲٫۱۶۵$$

برای سطح پایین غلظت واکنش‌دهنده و سطح بالای کاتالیزور:

$$\hat{y} = ۲۷٫۵ + \left(\frac{۸٫۳۳}{۲}\right)(-۱) + \left(\frac{-۵٫۰۰}{۲}\right)(+۱)$$
$$= ۲۰٫۸۳۵$$

و

$$e_۷ = ۱۸ - ۲۰٫۸۳۵ = -۲٫۸۳۵$$
$$e_۸ = ۱۹ - ۲۰٫۸۳۵ = -۱٫۸۳۵$$
$$e_۹ = ۲۳ - ۲۰٫۸۳۵ = ۲٫۱۶۵$$

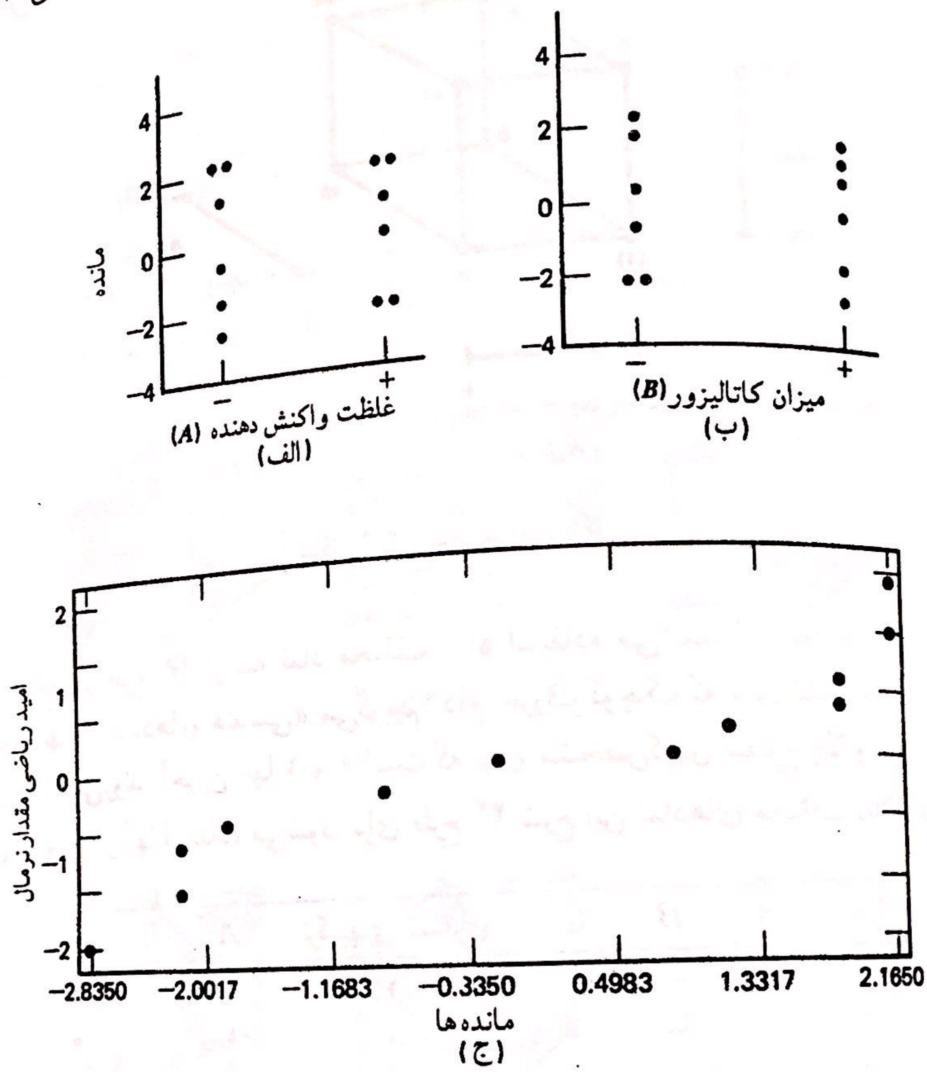
بالاخره در سطوح بالای هر دو عامل داریم:

$$\hat{y} = ۲۷٫۵ + \left(\frac{۸٫۳۳}{۲}\right)(+۱) + \left(\frac{-۵٫۰۰}{۲}\right)(+۱)$$
$$= ۲۹٫۱۶۵$$

و

$$e_{۱۰} = ۳۱ - ۲۹٫۱۶۵ = ۱٫۸۳۵$$
$$e_{۱۱} = ۳۰ - ۲۹٫۱۶۵ = ۰٫۸۳۵$$
$$e_{۱۲} = ۲۹ - ۲۹٫۱۶۵ = -۰٫۱۶۵$$

شکل ۲.۹ نمودار احتمال نرمال این مانده‌ها و نمودار مانده‌ها را نسبت به دو عامل، غلظت

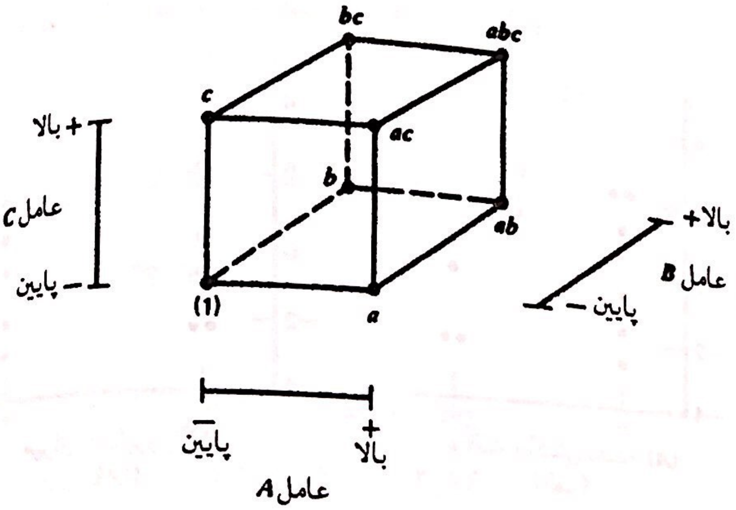


شکل ۲.۹ نمودارهای مانده‌ای برای آزمایش فرایند شیمی. (الف) غلظت واکنش‌دهنده (A). (ب) میزان کاتالیزور (B). (ج) مانده‌ها.

واکنش‌دهنده و میزان کاتالیزور، نشان می‌دهد. این نمودارها به‌نظر رضایتبخش می‌آیند، بنابراین دلیلی برای اینکه گمان بریم در اعتبار نتایج مشکلی وجود دارد نداریم.

۳.۹ طرح 2^3

گیریم سه عامل A، B، و C هر کدام در دو سطح مورد نظر باشند. این طرح را، طرح عاملی 2^3 می‌گویند و هشت ترکیب تیماری را می‌توان از نظر نموداری به‌صورت مکعبی که در شکل ۳.۹ نشان داده‌ایم نمایش داد. با گسترش نمادگذاری که در بخش ۲.۹ از آن بحث شد، ترکیبهای تیماری را به‌ترتیب استاندارد (۱)، a، b، ab، c، ac، bc، و abc می‌نویسیم. به‌خاطر بیاورید که این علائم نیز کل تمام n مشاهده را که در هر ترکیب خاص تیمار گرفته‌ایم نشان می‌دهند.



شکل ۳.۹ طرح عاملی 2^3.

در واقع در طرح 2^k از سه نماد مختلف زیاد استفاده می‌کنیم. اول نمادهای «+ و −» که اغلب آنها را «نمادهای هندسی» می‌گوییم. دوم حروف کوچک که برای نشان دادن ترکیبهای تیماری به‌کار می‌روند. آخرین آنها ۱ و ۰ است که برای مشخص‌کردن سطوح بالا و پایین به‌ترتیب به‌جای + و − از آنها استفاده می‌شود. برای طرح 2^3 شرح این نمادهای مختلف ذیلاً آمده است:

اجرا	A	B	C	ترکیبهای تیماری	A	B	C
۱	−	−	−	(1)	۰	۰	۰
۲	+	−	−	a	۱	۰	۰
۳	−	+	−	b	۰	۱	۰
۴	+	+	−	ab	۱	۱	۰
۵	−	−	+	c	۰	۰	۱
۶	+	−	+	ac	۱	۰	۱
۷	−	+	+	bc	۰	۱	۱
۸	+	+	+	abc	۱	۱	۱

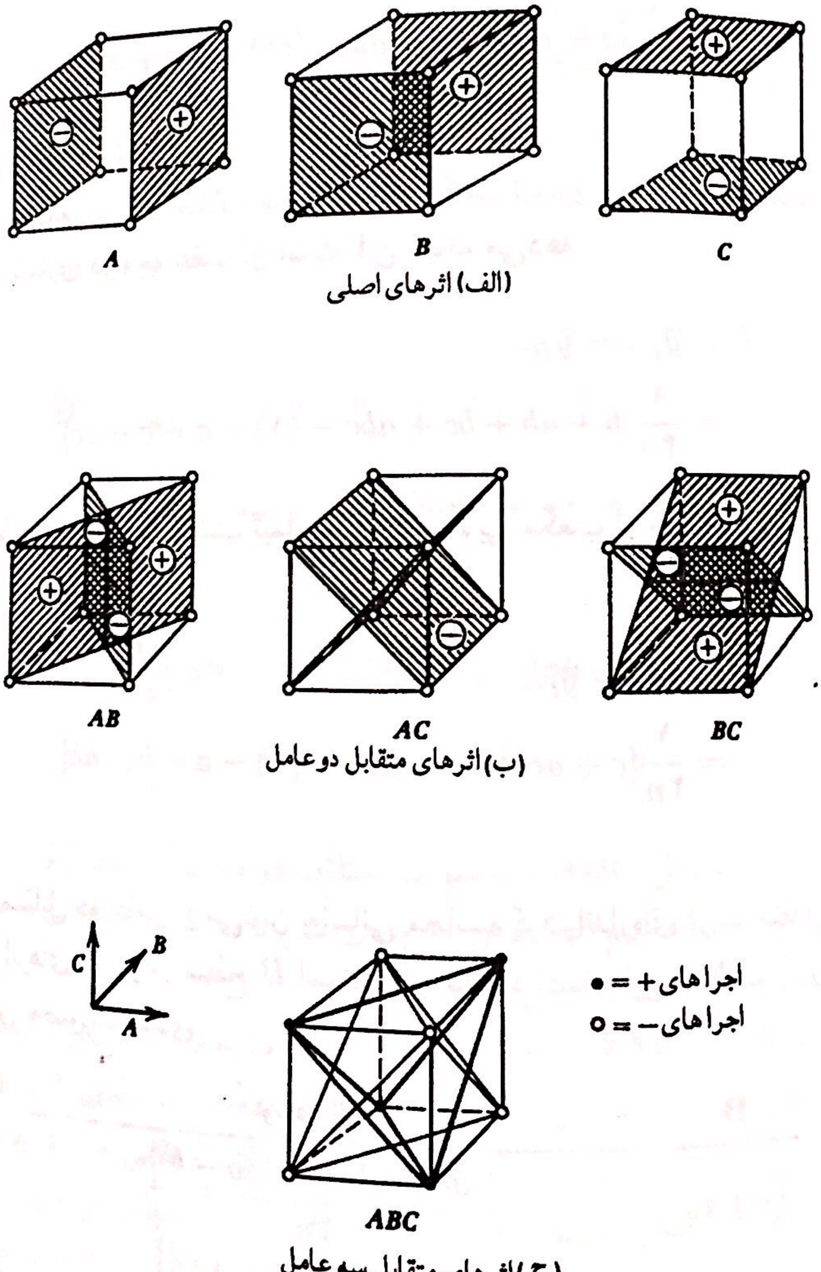
در طرح 2^3، بین هشت ترکیب تیماری هفت درجهٔ آزادی وجود دارد. سه درجهٔ آزادی مربوط به اثرهای اصلی A، B، و C است. چهار درجهٔ آزادی مربوط به اثرهای متقابل است که هر یک از اثرهای AB، AC، BC، و ABC یک درجهٔ آزادی دارند.

برآوردکردن اثرهای اصلی را بررسی می‌کنیم. ابتدا، برآوردکردن اثر اصلی A را در نظر بگیرید. اثر A وقتی B و C در سطح پایین قرار دارند $[a-(1)]/n$ است. به تشابه وقتی B در سطح بالا و C در سطح پایین است اثر A، $[ab-b]/n$ است. وقتی C در سطح بالا و B در سطح پایین است اثر A، $[ac-c]/n$ است. بالاخره وقتی هر دو عامل B و C در سطوح بالا قرار دارند

اثر A، $[abc - bc]/n$ است. پس، متوسط اثر A دقیقاً متوسط این چهار اثر، یا

$$A = \frac{1}{4n}[a - (1) + ab - b + ac - c + abc - bc] \qquad (۱۱.۹)$$

است. این معادله را نیز می‌توان به‌صورت مقابلهٔ بین چهار ترکیب تیماری در وجه طرف راست مکعب شکل ۴.۹ (الف) (که در آن وجه A در سطح بالاست) و چهار ترکیب تیماری در وجه طرف چپ



شکل ۴.۹ نمایش هندسی مقابله‌های مربوط به اثرهای اصلی و اثرهای متقابل در طرح 2^3. (الف) اثرهای اصلی. (ب) اثرهای متقابل دو عامل. (ج) اثرهای متقابل سه عامل.

مکعب (که در آن A در سطح پایین است) بیان کرد. یعنی اثر A دقیقاً متوسط چهار اجراست که در آن
متوسط A در سطح بالا $(\overline{y}_{A+})$ از متوسط چهار اجرای A در سطح پایین $(\overline{y}_{A-})$ کسر شده است، یا

$$A = \overline{y}_{A+} - \overline{y}_{A-}$$
$$= \frac{a + ab + ac + abc}{۴n} - \frac{(۱) + b + c + bc}{۴n}$$

این معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$A = \frac{۱}{۴n}[a + ab + ac + abc - (۱) - b - c - bc]$$

که همان معادلهٔ (۱۱.۹) است.

به‌طریق مشابه، اثر B، اختلاف متوسط چهار ترکیب تیماری در وجه جلو مکعب از متوسط چهار ترکیب تیماری در وجه عقب آن است. این نتیجه می‌دهد

$$B = \overline{y}_{B+} - \overline{y}_{B-}$$
$$= \frac{۱}{۴n}[b + ab + bc + abc - (۱) - a - c - ac] \qquad (۱۲.۹)$$

اثر C اختلاف متوسط چهار ترکیب تیماری در وجه بالایی مکعب از متوسط چهار ترکیب تیماری در وجه زیر آن است، یعنی،

$$C = \overline{y}_{C+} - \overline{y}_{C-} \qquad (۱۳.۹)$$
$$= \frac{۱}{۴n}[c + ac + bc + abc - (۱) - a - b - ab]$$

اثرهای متقابل دو عامل را می‌توان به‌آسانی محاسبه کرد. اندازه‌ای از اثر متقابل AB تفاوت بین متوسط اثرهای A در دو سطح B است. بنابه قرارداد نصف این اختلاف را اثر متقابل AB می‌نامیم. پس به‌صورت نمادی

B	متوسط اثر A
بالا (+)	$\frac{[(abc - bc) + (ab - b)]}{۲n}$
پایین (−)	$\frac{\{(ac - c) + [a - (۱)]\}}{۲n}$
اختلاف	$\frac{[abc - bc + ab - b - ac + c - a + (۱)]}{۲n}$

چون اثر متقابل AB نصف این اختلاف است، لذا

$$AB = \frac{[abc - bc + ab - b - ac + c - a + (۱)]}{۴n} \qquad (۱۴.۹)$$

می‌توان معادلهٔ (۱۴.۹) را به‌صورت زیر نوشت:

$$AB = \frac{abc + ab + c + (۱)}{۴n} - \frac{bc + b + ac + a}{۴n}$$

در این شکل به سهولت دیده می‌شود که اثر متقابل AB اختلاف متوسطهای بین اجراها در دو صفحهٔ قطری مکعب شکل ۴.۹ (ب) است. با استفاده از منطق مشابه و مراجعه به شکل ۴.۹ (ب)، اثرهای متقابل AC و BC عبارت‌اند از:

$$AC = \frac{۱}{۴n}[(۱) - a + b - ab - c + ac - bc + abc] \qquad (۱۵.۹)$$

و

$$BC = \frac{۱}{۴n}[(۱) + a - b - ab - c - ac + bc + abc] \qquad (۱۶.۹)$$

اثر متقابل ABC به‌صورت متوسط اختلاف بین اثر متقابل AB در دو سطح متفاوت C تعریف می‌شود. پس،

$$\begin{aligned} ABC &= \frac{۱}{۴n}\{[abc - bc] - [ac - c] - [ab - b] + [a - (۱)]\} \\ &= \frac{۱}{۴n}[abc - bc - ac + c - ab + b + a - (۱)] \qquad (۱۷.۹) \end{aligned}$$

مانند قبل، می‌توان اثر متقابل ABC را به‌صورت اختلاف دو متوسط در نظر گرفت. اگر اجراهای دو متوسط را از هم تفکیک کنیم آنها رئوس دو چهاروجهی را در شکل ۴.۹ (ج) تعریف می‌کنند که کلاً تشکیل هشت رأس مکعب را می‌دهند.

در معادلات (۱۱.۹) تا (۱۷.۹) مقادیر داخل کروشه‌ها مقابله‌های ترکیبهای تیماری‌اند. جدول علائم مثبت و منفی را می‌توان از روی مقابله‌ها به‌دست آورد که آنها را در جدول ۳.۹ نشان داده‌ایم. برای اثرهای اصلی علامت مثبت مربوط به سطح بالا و علامت منفی مربوط به سطح پایین است. به محض مشخص‌شدن علائم اثرهای اصلی، علائم بقیهٔ ستونها را می‌توان از ضرب‌کردن علائم ستونهای متناظر قبلی سطر به سطر به‌دست آورد. مثلاً علائم ستون AB از ضرب علائم ستونهای A و B در هر سطر به‌دست می‌آیند. مقابلهٔ هر اثر را می‌شود به‌سادگی از این جدول به‌دست آورد.

جدول ۳.۹ علائم جبری برای محاسبهٔ اثرها در طرح 2^3

ترکیب تیماری	اثر عاملی							
	۱	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
(۱)	+	−	−	+	−	+	+	−
a	+	+	−	−	−	−	+	+
b	+	−	+	−	−	+	−	+
ab	+	+	+	+	−	−	−	−
c	+	−	−	+	+	−	−	+
ac	+	+	−	−	+	+	−	−
bc	+	−	+	−	+	−	+	−
abc	+	+	+	+	+	+	+	+

جدول ۳.۹ چندین خواص جالب دارد: (۱) بجز ستون ۱، هر ستون به تعداد مساوی علامتهای مثبت و منفی دارد. (۲) مجموع حاصلضربهای علائم هر دو ستون برابر صفر است. (۳) ستون ۱ را هرچند بار در هر ستون ضرب کنیم همان ستون به‌دست می‌آید. یعنی، ستون ۱ عنصر همانی است. (۴) حاصلضرب هر دو ستون، ستون دیگری از جدول است. مثلاً $A \times B = AB$ و

$$AB \times B = AB^2 = A$$

ملاحظه می‌شود که نماها در حاصلضربها بااستفاده از حساب به پیمانهٔ ۲ به‌دست آمده‌اند. (یعنی نما می‌تواند تنها صفر یا یک باشد؛ اگر نما بزرگتر از یک شد باید به‌اندازهٔ مضارب دو از آن کم کنیم تا صفر یا یک به‌دست آید.) تمام این خواص از متعامدبودن مقابله‌ها که در برآورد اثرها از آن استفاده شده است نتیجه می‌شوند.

مجموع مربعات اثرها به‌سهولت محاسبه می‌شوند. چون هر اثر، متناظر با مقابله‌ای با یک درجهٔ آزادی است. در طرح 2^3 با n تکرار مجموع مربعات هر اثر

$$SS = \frac{(\text{مقابله})^2}{8n} \qquad (۱۸.۹)$$

است.

$$\text{اثر عامل} = \frac{\text{مقابله عامل}}{n \cdot 2^{K-1}}$$

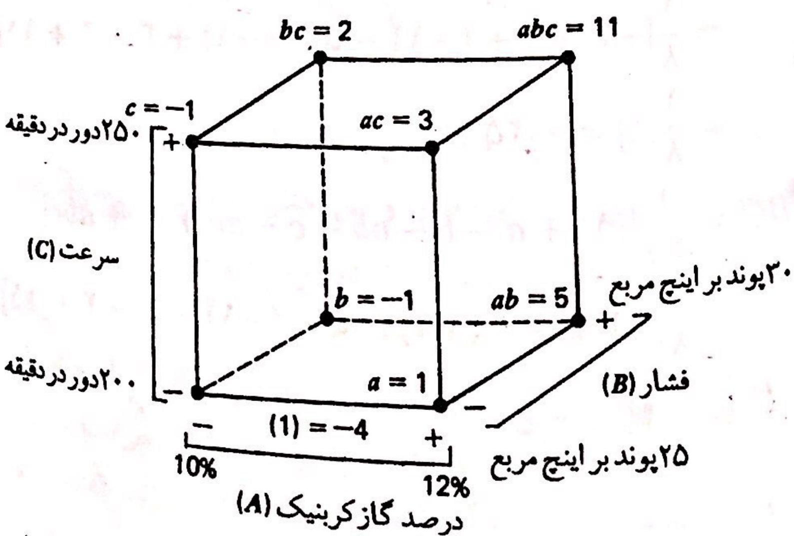
مثال ۱.۹

مثال ۴.۷ را به‌یاد آورید که اثر درصد گازکربنیک، فشار دستگاه، و سرعت تسمه نقاله را در سطح ارتفاع مواد داخل شیشه‌ها مطالعه می‌کند. گیریم تنها از دو سطح برای درصد گازکربنیک استفاده شده باشد، به‌طوری که آزمایش طرح عاملی $۲^۳$ با دو تکرار باشد. داده‌های مربوط به انحراف از خط نشان را در جدول ۴.۹ آورده‌ایم، و طرح را در شکل ۵.۹ نشان داده‌ایم.

بااستفاده از مجموع داده‌ها تحت ترکیبهای تیماری که در جدول ۴.۹ آمده‌اند می‌توانیم اثر

جدول ۴.۹ داده‌های مسألهٔ سطح ارتفاع برای مسألهٔ ۱.۹

	فشار دستگاه (B)			
	۲۵پوند بر اینچ مربع سرعت تسمهٔ نقاله (C)		۳۰پوند بر اینچ مربع سرعت تسمهٔ نقاله (C)	
درصد گازکربنیک (A)	۲۰۰	۲۵۰	۲۰۰	۲۵۰
۱۰	-۳ -۱ $-۴=(۱)$	-۱ ۰ $-۱=c$	-۱ ۰ $-۱=b$	۱ ۱ $۲=bc$
۱۲	۰ ۱ $۱=a$	۲ ۱ $۳=ac$	۲ ۳ $۵=ab$	۶ ۵ $۱۱=abc$



شکل ۵.۹ طرح $۲^۳$ برای آزمایش انحراف سطح ارتفاع در مثال ۱.۹.

عوامل را به‌صورت زیر برآورد کنیم:

$$A=\frac{۱}{۴n}[a-(۱)+ab-b+ac-c+abc-bc]$$
$$=\frac{۱}{۸}[۱-(-۴)+۵-(-۱)+۳-(-۱)+۱۱-۲]$$
$$=\frac{۱}{۸}[۲۴]=۳٫۰۰$$

$$B=\frac{۱}{۴n}[b+ab+bc+abc-(۱)-a-c-ac]$$
$$=\frac{۱}{۸}[-۱+۵+۲+۱۱-(-۴)-۱-(-۱)-۳]$$
$$=\frac{۱}{۸}[۱۸]=۲٫۲۵$$

$$C=\frac{۱}{۴n}[c+ac+bc+abc-(۱)-a-b-ab]$$
$$=\frac{۱}{۸}[-۱+۳+۲+۱۱-(-۴)-۱-(-۱)-۵]$$
$$=\frac{۱}{۸}[۱۴]=۱٫۷۵$$

$$AB=\frac{۱}{۴n}[ab-a-b+(۱)+abc-bc-ac+c]$$
$$=\frac{۱}{۸}[۵-۱-(-۱)+(-۴)+۱۱-۲-۳+(-۱)]$$
$$=\frac{۱}{۸}[۶]=۰٫۷۵$$

$$AC=\frac{۱}{۴n}[(۱)-a+b-ab-c+ac-bc+abc]$$
$$=\frac{۱}{۸}[-۴-۱+(-۱)-۵-(-۱)+۳-۲+۱۱]$$
$$=\frac{۱}{۸}[۲]=۰٫۲۵$$

$$BC=\frac{۱}{۴n}[(۱)+a-b-ab-c-ac+bc+abc]$$
$$=\frac{۱}{۸}[-۴+۱-(-۱)-۵-(-۱)-۳+۲+۱۱]$$
$$=\frac{۱}{۸}[۴]=۰٫۵۰$$

و

$$ABC=\frac{۱}{۴n}[abc-bc-ac+c-ab+b+a-(۱)]$$

$$= \frac{۱}{۸}[۱۱ - ۲ - ۳ + (-۱) - ۵ + (-۱) + ۱ - (-۴)]$$
$$= \frac{۱}{۸}[۴] = ۰٫۵۰$$

بیشترین اثرها به‌ترتیب مربوط‌اند به درصد گازکربنیک ($A = ۳٫۰۰$)، فشار دستگاه ($B = ۲٫۲۵$)، سرعت تسمه نقاله ($C = ۱٫۷۵$) و اثر متقابل درصد گازکربنیک و فشار دستگاه ($AB = ۰٫۷۵$)، هرچند به‌نظر نمی‌رسد که اثر متقابل به‌اندازهٔ اثرهای اصلی در انحراف ارتفاع سطح مؤثر باشد.

می‌توان از تحلیل واریانس در تأیید اندازهٔ این اثرها استفاده کرد. بنابر معادلهٔ (۱۸.۹) مجموع مربعات عبارت‌اند از:

$$SS_A = \frac{(۲۴)^۲}{۱۶} = ۳۶٫۰۰$$
$$SS_B = \frac{(۱۸)^۲}{۱۶} = ۲۰٫۲۵$$
$$SS_C = \frac{(۱۴)^۲}{۱۶} = ۱۲٫۲۵$$
$$SS_{AB} = \frac{(۶)^۲}{۱۶} = ۲٫۲۵$$
$$SS_{AC} = \frac{(۲)^۲}{۱۶} = ۰٫۲۵$$
$$SS_{BC} = \frac{(۴)^۲}{۱۶} = ۱٫۰۰$$

و

$$SS_{ABC} = \frac{(۴)^۲}{۱۶} = ۱٫۰۰$$

کل مجموع مربعات $SS_{کل} = ۷۸٫۰۰$ ، و با عمل تفریق $SS_{خطا} = ۵٫۰۰$ به‌دست می‌آید. تحلیل واریانس را به اختصار در جدول ۵.۹ آورده‌ایم، و این جدول معنی‌دار بودن اثرهای اصلی را تأیید کرده است. اثر متقابل AB حدوداً در سطح ۱۰ درصد معنی‌دار است؛ پس اثر متقابل خفیفی بین درصد گازکربنیک و فشار دستگاه وجود دارد.

ممکن است خواننده بخواهد برای این آزمایش با مراجعه به مثال ۴.۷ نتایج را عملاً تفسیر کند. بهره‌بردار فرایند تصمیم می‌گیرد که فرایند را در فشار پایین دستگاه و سرعت بالای تسمه نقاله اجرا کند و تغییرپذیری درصد گازکربنیک را با کنترل‌کردن دما با دقت بیشتر تقلیل دهد. این عملکرد موجب تقلیل اساسی در انحراف ارتفاع سطح از خط نشان می‌شود. ■

جدول ۵.۹ تحلیل واریانس برای داده‌های سطح ارتفاع

منبع تغییر	مجموع مربعات	درجات آزادی	میانگین مربعات	F.
درصد گازکربنیک (A)	۳۶٫۰۰	۱	۳۶٫۰۰	۵۷٫۶۰*
فشار دستگاه (B)	۲۰٫۲۵	۱	۲۰٫۲۵	۳۲٫۴۰*
سرعت تسمه نقاله (C)	۱۲٫۲۵	۱	۱۲٫۲۵	۱۹٫۶۰*
AB	۲٫۲۵	۱	۲٫۲۵	۳٫۶۰
AC	۰٫۲۵	۱	۰٫۲۵	۰٫۴۰
BC	۱٫۰۰	۱	۱٫۰۰	۱٫۶۰
ABC	۱٫۰۰	۱	۱٫۰۰	۱٫۶۰
خطا	۵٫۰۰	۸	۰٫۶۲۵	
مجموع	۷۸٫۰۰	۱۵		

* معنی‌دار در یک درصد.

مانده‌ها و بررسی تشخیصی. مانده‌های این آزمایش را می‌شود به روش مدل رگرسیون که قبلاً از آن استفاده کردیم تولید کرد. مدل رگرسیون برای پیشگویی انحراف ارتفاع سطح عبارت است از

$$\hat{y} = \hat{\beta}_{۰} + \hat{\beta}_{۱}x_{۱} + \hat{\beta}_{۲}x_{۲} + \hat{\beta}_{۳}x_{۳} + \hat{\beta}_{۱۲}x_{۱}x_{۲}$$

$$= ۱٫۰۰ + \left(\frac{۳٫۰۰}{۲}\right)x_{۱} + \left(\frac{۲٫۲۵}{۲}\right)x_{۲} + \left(\frac{۱٫۷۵}{۲}\right)x_{۳} + \left(\frac{۰٫۷۵}{۲}\right)x_{۱}x_{۲}$$

که در آن متغیرهای کدگذاری‌شدهٔ $x_{۱}$، $x_{۲}$، و $x_{۳}$ به‌ترتیب معرف A، B، و C هستند. جملهٔ $x_{۱}x_{۲}$ اثر متقابل AB است. می‌توان مانده‌ها را به‌صورت اختلاف بین انحرافهای ارتفاع سطح مشاهده‌شده و پیش‌بینی‌شده به‌دست آورد. تحلیل این مانده‌ها را به‌عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده گذاشته‌ایم.

روشهای دیگر برای داوری معنی‌دار بودن اثرها. تحلیل واریانس، یک راه رسمی برای تعیین این موضوع است که کدام اثرهای عاملی صفر نیستند. دو روش مفید دیگر وجود دارند. در روش اول خطای معیار اثرها را محاسبه کرده و اندازهٔ اثرها را با خطای معیار آنها مقایسه می‌کنیم. در روش دوم، که آن‌را در بخش ۵.۹ شرح خواهیم داد در ارزیابی اهمیت اثرها از نمودارهای احتمال نرمال استفاده می‌کنند.

Scanned with CamScanner

تعیین خطای معیار هر اثر آسان است. اگر بپذیریم که در هریک از ۲^k اجرای طرح n تکرار وجود دارند، و اگر $y_{i۱}, y_{i۲}, \ldots, y_{in}$ مشاهدات مربوط به iامین اجرا باشند، آن‌گاه

$$S_i^۲ = \frac{۱}{n-۱}\sum_{j=۱}^{n}(y_{ij}-\overline{y}_i)^۲,\ i = ۱, ۲, \ldots, ۲^k$$

برآورد واریانس iامین اجراست. می‌توان برای به‌دست‌آوردن برآورد کلی واریانس، این ۲^k برآورد واریانس را با هم ترکیب کرد

$$S^۲ = \frac{۱}{۲^k(n-۱)}\sum_{i=۱}^{۲^k}\sum_{j=۱}^{n}(y_{ij}-\overline{y}_i)^۲$$

این همان برآورد واریانس است که در تحلیل واریانس آن‌را به‌وسیلهٔ میانگین مربع خطا داده‌ایم. واریانس برآورد هر اثر

$$V(\text{اثر}) = V\left(\frac{\text{مقابله}}{n۲^{k-۱}}\right) = \frac{۱}{(n۲^{k-۱})^۲}V(\text{مقابله})$$

هر مقابله یک ترکیب خطی از مجموعهای ۲^k تیمار است، و هر مجموع شامل n مشاهده است. بنابراین،

$$V(\text{مقابله}) = n۲^k\sigma^۲$$

و واریانس هر اثر

$$V(\text{اثر}) = \frac{۱}{(n۲^{k-۱})^۲}n۲^k\sigma^۲ = \frac{۱}{n۲^{k-۲}}\sigma^۲ \qquad (۱۹.۹)$$

برآورد خطای معیار را می‌توان با قراردادن برآورد $\sigma^۲$، یعنی $S^۲$ به‌جای آن و در نظر گرفتن ریشهٔ دوم معادلهٔ (۱۹.۹) به‌دست آورد.

در توضیح این روش آزمایش، انحراف سطح ارتفاع را در نظر بگیرید. میانگین مربع خطا $MS_{\text{خطا}} = ۰٫۶۲۵$ است. بنابراین خطای معیار هر اثر (با استفاده از $S^۲ = MS_{\text{خطا}}$) عبارت است از

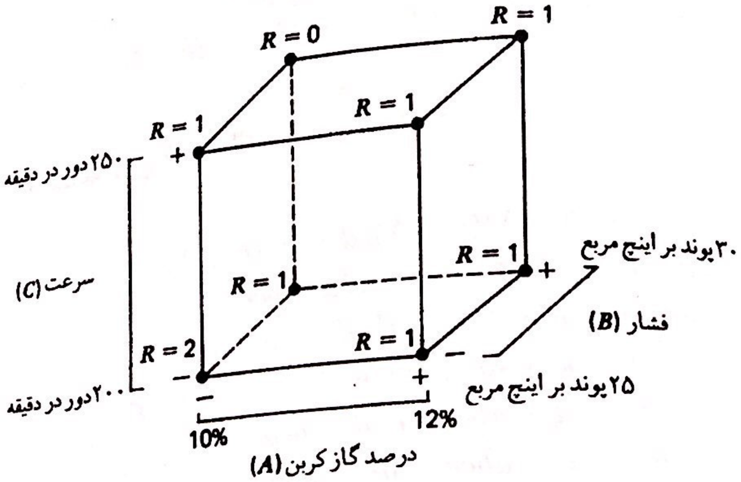
$$
\begin{aligned}
SE(\text{ اثر }) &= \sqrt{\frac{۱}{n۲^{k-۲}}S^۲} \\
&= \sqrt{\frac{۱}{۲(۲^{۳-۲})}۰٫۶۲۵} \\
&= ۰٫۴۰
\end{aligned}
$$

لذا در برآورد اثرها دو حد خطای معیار عبارت‌اند از:

$$
\begin{aligned}
A &: ۳٫۰۰ \pm ۰٫۸۰ \\
B &: ۲٫۲۵ \pm ۰٫۸۰ \\
C &: ۱٫۷۵ \pm ۰٫۸۰ \\
AB &: ۰٫۷۵ \pm ۰٫۸۰ \\
AC &: ۰٫۲۵ \pm ۰٫۸۰ \\
BC &: ۰٫۵۰ \pm ۰٫۸۰ \\
ABC &: ۰٫۵۰ \pm ۰٫۸۰
\end{aligned}
$$

اینها بازهٔ اطمینان تقریبی ۹۵ درصد هستند. این تحلیل نشان می‌دهد که A، B، و C عوامل مهم‌اند، زیرا که تنها عواملی هستند که برآورد بازه‌ای اثرشان شامل صفر نیست.

اثرهای پراکندگی. مهندسی که در بخش فرایند پرکردن شیشه‌ها کار می‌کند به اثرهای پراکندگی نیز علاقه‌مند است. یعنی می‌خواهد بداند آیا هیچ عاملی در تغییرپذیری انحراف سطح ارتفاع از یک اجرا به اجرایی دیگر مؤثر است یا نه. یک راه پاسخ به‌این پرسش آن‌است که برای هر یک از هشت اجرا در طرح $۲^۳$ به دامنهٔ انحرافهای سطح ارتفاع نگاه کنیم. این دامنه‌ها را در مکعب شکل ۶.۹ با حرف R مشخص کرده‌ایم. توجه کنید که دامنه‌ها برای تمام هشت اجرا در طرح تقریباً یکسان هستند. در نتیجه گواهی قوی که نشان دهد بعضی متغیرهای فرایند مستقیماً در تغییرپذیری انحراف سطح ارتفاع مؤثر باشند وجود ندارد.



شکل ۶.۹ دامنه‌های سطح ارتفاع برای مثال ۱.۹.

۴.۹ طرح کلی ۲^k

روشهای تحلیل ارائه‌شده را می‌توان به یک طرح عاملی ۲^k، یعنی طرحی با k عامل، هریک در دو سطح، تعمیم داد. مدل آماری برای یک طرح ۲^k شامل k اثر اصلی، $\binom{k}{۲}$ اثر متقابل دوعاملی، $\binom{k}{۳}$ اثر متقابل سه‌عاملی، ...، و یک اثر متقابل k عاملی است. یعنی برای طرح ۲^k مدل کامل آماری شامل $۲^k - ۱$ اثر است. از نمادهایی که قبلاً برای ترکیبهای تیماری معرفی کردیم در اینجا نیز استفاده می‌کنیم. مثلاً، دریک طرح $۲^۵$، نماد abd، ترکیب تیماری را برای عوامل A، B، و D در سطح بالا و عوامل C و E در سطح پایین نشان می‌دهد. ترکیبهای تیماری را می‌توان به‌ترتیب استاندارد آن، هر بار با معرفی یک عامل، وقتی‌که هر عامل جدید متوالیاً با عوامل قبل از خود ترکیب می‌شود نوشت. مثلاً، ترتیب استاندارد برای یک طرح $۲^۴$ عبارت است از (۱)، a، b، ab، c، ac، bc، abc، d، ad، bd، abd، cd، acd، bcd، $abcd$.

برای برآورد یک اثر یا برای محاسبهٔ مجموع مربعات یک اثر، ابتدا باید مقابلهٔ مربوط به‌آن اثر را تعیین کنیم. همیشه می‌توانیم این مقابله را با استفاده از جدول علائم مثبت و منفی، مانند جدول ۲.۹ یا جدول ۳.۹، به‌دست آوریم. اما برای مقادیر بزرگ k این روش چندان مناسب نیست، و می‌توان از روش دیگری استفاده کرد. به‌طور کلی مقابلهٔ اثر $AB\cdots K$ را با بازکردن طرف راست معادلهٔ

$$(\text{مقابلهٔ})_{AB\cdots K} = (a \pm ۱)(b \pm ۱)\cdots(k \pm ۱) \qquad (۲۰.۹)$$

تعیین می‌کنیم. در بسط معادلهٔ (۲۰.۹)، با قراردادن نماد (۱) به‌جای عدد ۱ در عبارت نهایی از جبر معمولی استفاده می‌کنیم. داخل هر پرانتز علامت ۱ را منفی می‌گیریم اگر عامل شامل اثر باشد، و آن‌را مثبت می‌گیریم اگر عامل شامل اثر نباشد.

برای روشن‌شدن نحوهٔ استفاده از معادلهٔ (۲۰.۹) یک طرح عاملی $۲^۳$ را در نظر بگیرید. مقابله برای AB

$$(\text{مقابله})_{AB} = (a-۱)(b-۱)(c+۱)$$
$$= abc + ab + c + (۱) - ac - bc - a - b$$

و در یک طرح $۲^۵$ مقابله برای $ABCD$،

$$\begin{aligned}(\text{مقابله})_{ABCD} =& (a-۱)(b-۱)(c-۱)(d-۱)(e+۱)\\ =& abcde + cde + bde + ade + bce\\ &+ ace + abe + e + abcd + cd + bd\\ &+ ad + bc + ac + ab + (۱) - a - b - c\\ &- abc - d - abd - acd - bcd - ae\\ &- be - ce - abce - de - abde - acde - bcde\end{aligned}$$

است.

جدول ۶.۹ تحلیل واریانس برای طرح ۲^k

منبع تغییر	مجموع مربعات	درجات آزادی
k اثر اصلی		
A	SS_A	۱
B	SS_B	۱
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
K	SS_K	۱
$\binom{k}{۲}$ اثر متقابل دوعاملی		
AB	SS_{AB}	۱
AC	SS_{AC}	۱
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
JK	SS_{JK}	۱
$\binom{k}{۳}$ اثر متقابل سه‌عاملی		
ABC	SS_{ABC}	۱
ABD	SS_{ABD}	۱
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
IJK	SS_{IJK}	۱
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\binom{k}{k} = ۱$ اثر متقابل kعاملی		
$ABC\cdots K$	$SS_{ABC\cdots K}$	۱
خطا	$SS_{\text{خطا}}$	$۲^k(n-۱)$
مجموع	$SS_{\text{کل}}$	$n۲^k - ۱$

به‌محض محاسبهٔ مقابلهٔ اثرها، می‌شود برآورد اثرها و مجموع مربعات اثرها را به‌ترتیب براساس

$$AB\cdots K = \frac{\text{۲}}{n\text{۲}^k}[(\text{مقابله})_{AB\cdots K}] \tag{۲۱.۹}$$

و

$$SS_{AB\cdots K} = \frac{\text{۱}}{n\text{۲}^k}[(\text{مقابله})_{AB\cdots K}]^{\text{۲}} \tag{۲۲.۹}$$

محاسبه کرد، که در آن n تعداد تکرارهاست. برای طرح ۲^k تحلیل واریانس را به‌اختصار در جدول ۶.۹ آورده‌ایم. در بخش ۶.۹ روش دیگری برای برآوردکردن اثرها در طرح ۲^k ارائه می‌کنیم.

۵.۹ طرح تک‌تکراری ۲^k

حتی برای تعداد نسبتاً کمی از عوامل، تعداد کل ترکیبهای تیماری در یک طرح ۲^k زیاد است. مثلاً طرح $۲^۵$، ۳۲ ترکیب تیماری دارد، طرح $۲^۶$، ۶۴ ترکیب تیماری دارد، و الی آخر. چون معمولاً منابع محدودند تعداد تکرارهایی که آزمایشگر می‌تواند در نظر بگیرد ممکن است محدود باشد. اغلب منابع موجود تنها اجازهٔ یک اجرای طرح را می‌دهند، مگر اینکه آزمایشگر بخواهد بعضی عوامل اصلی را نادیده بگیرد.

گاهی طرح تک‌تکراری ۲^k را طرح عاملی تکرارنشده می‌گویند. با تنها یک تکرار برآوردی برای خطا وجود ندارد. یک راه تحلیل عاملی تکرارنشده آن‌است که بپذیریم بعضی اثرهای متقابل مرتبهٔ بالا ناچیزند و میانگین مربعات آنها را برای برآورد خطا درهم ادغام کنیم. این، اصل توسل به تُنُک‌کردن اثرهاست؛ یعنی اکثر سیستمها تحت سلطهٔ بعضی اثرهای اصلی و اثرهای متقابل مرتبهٔ پایین قرار می‌گیرند، و بیشتر اثرهای متقابل مرتبهٔ بالا قابل اغماض‌اند.

وقتی در طرحهای عاملی تکرارنشده داده‌ها را تحلیل می‌کنیم، گهگاهی اثرهای متقابل واقعی مرتبهٔ بالا وجود دارند. در این موارد استفاده از میانگین مربع خطا که با ادغام کردن اثرهای متقابل مرتبهٔ بالا به‌دست می‌آید نامناسب است. یک روش تحلیل منسوب به دانیل[1] (۱۹۵۹) راه ساده‌ای برای فائق‌آمدن به‌این مشکل است. دانیل پیشنهاد می‌کند که برآورد اثرها را روی کاغذ احتمال نرمال رسم کنیم. اثرهایی که ناچیزند دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 هستند و در این نمودار تمایل دارند که روی خطی مستقیم قرار بگیرند، در صورتی‌که اثرهای معنی‌دار، میانگین غیرصفر خواهند داشت و در طول خط مستقیم قرار نمی‌گیرند. این روش را در مثال بعد توضیح می‌دهیم.

1. Daniel

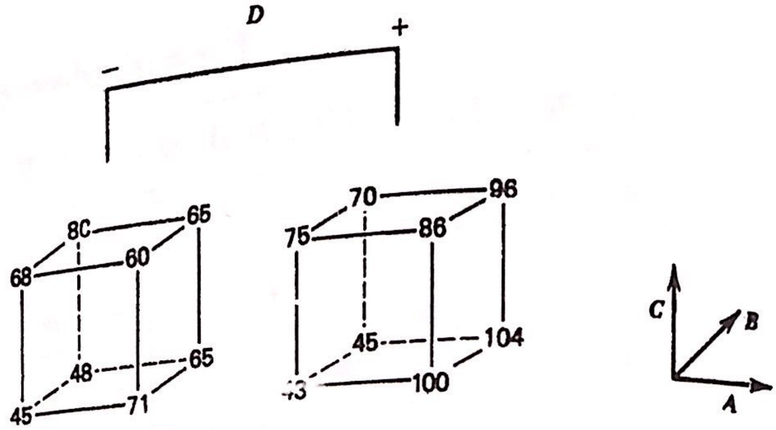
مثال ۲.۹

طرح تک‌تکراری 2^4

یک فراوردهٔ شیمیایی در دیگ فشار تولید می‌شود. برای مطالعهٔ عواملی که تصور می‌شود در نرخ تصفیه محصول مؤثرند یک آزمایش عاملی در واحد صنعتی آزمایشگاهی انجام می‌شود. چهار عامل عبارت‌اند از دما (A)، فشار (B)، غلظت فرمالدئید (C)، و نرخ هم‌زن (D). هر عامل در دو سطح اعمال می‌شود، و داده‌های حاصل از یک آزمایش تک‌تکراری 2^4 را در جدول ۷.۹ و شکل ۷.۹ نشان داده‌ایم. ۱۶ اجرا به‌ترتیب تصادفی انجام شده‌اند. مهندس فرایند به ماکسیمم‌سازی نرخ تصفیه علاقه‌مند است. در شرایط جاری فرایند، نرخ تصفیه نزدیک به ۷۵ گالن در ساعت است. همچنین فرایند در حال حاضر از غلظت فرمالدئید؛ یعنی عامل C در سطح بالا استفاده می‌کند. مهندس فرایند علاقه‌مند به تقلیل غلظت فرمالدئید تا حد ممکن است، اما به دلیل آنکه این موضوع همیشه موجب افت نرخهای تصفیه می‌شود قادر به انجام آن نیست.

جدول ۷.۹ آزمایش نرخ تصفیه در واحد صنعتی آزمایشگاهی

شمارهٔ اجرا	عامل A	B	C	D	ترکیبهای تیماری	نرخ تصفیه (گالن در ساعت)
۱	−	−	−	−	(۱)	۴۵
۲	+	−	−	−	a	۷۱
۳	−	+	−	−	b	۴۸
۴	+	+	−	−	ab	۶۵
۵	−	−	+	−	c	۶۸
۶	+	−	+	−	ac	۶۰
۷	−	+	+	−	bc	۸۰
۸	+	+	+	−	abc	۶۵
۹	−	−	−	+	d	۴۳
۱۰	+	−	−	+	ad	۱۰۰
۱۱	−	+	−	+	bd	۴۵
۱۲	+	+	−	+	abd	۱۰۴
۱۳	−	−	+	+	cd	۷۵
۱۴	+	−	+	+	acd	۸۶
۱۵	−	+	+	+	bcd	۷۰
۱۶	+	+	+	+	$abcd$	۹۶



شکل ۷.۹ داده‌های آزمایش نرخ تصفیه برای مثال ۲.۹.

تحلیل این داده‌ها را با رسم برآوردهای اثرها روی کاغذ احتمال نرمال شروع می‌کنیم. برای ثابتهای مقابله‌ای طرح $۲^۴$، جدول علائم مثبت و منفی را در جدول ۸.۹ نشان داده‌ایم. از این مقابله‌ها می‌شود ۱۵ اثر عاملی را به‌صورت زیر برآورد کرد.

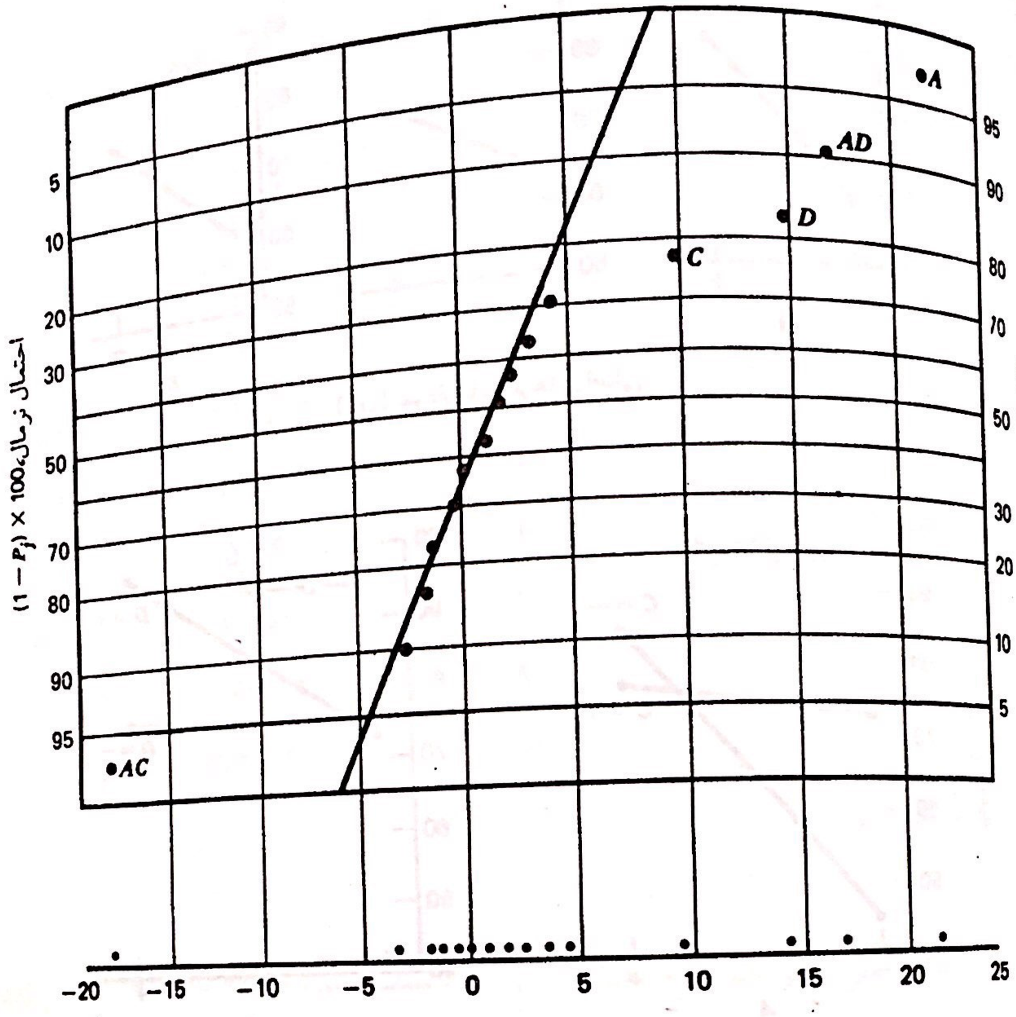
ردیف (j)	اثر	برآورد	(j − ۰٫۵)/۱۵
۱۵	A	۲۱٫۶۳	۰٫۹۶۶۷
۱۴	AD	۱۶٫۶۳	۰٫۹۰۰۰
۱۳	D	۱۴٫۶۳	۰٫۸۳۳۳
۱۲	C	۹٫۸۸	۰٫۷۶۶۷
۱۱	ABD	۴٫۱۳	۰٫۷۰۰۰
۱۰	B	۳٫۱۳	۰٫۶۳۳۳
۹	BC	۲٫۳۸	۰٫۵۶۶۷
۸	ABC	۱٫۸۸	۰٫۵۰۰۰
۷	$ABCD$	۱٫۳۸	۰٫۴۳۳۳
۶	AB	۰٫۱۳	۰٫۳۶۶۷
۵	CD	−۰٫۳۸	۰٫۳۰۰۰
۴	BD	−۱٫۱۳	۰٫۲۳۳۳
۳	ACD	−۱٫۶۳	۰٫۱۶۶۷
۲	BCD	−۲٫۶۳	۰٫۱۰۰۰
۱	AC	−۱۸٫۱۳	۰٫۰۳۳۳

جدول ۸.۹ ثابتهای مقابله‌ای برای طرح 2^4

	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD
(1)	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+
a	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−
b	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−
ab	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+
c	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−
ac	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+
bc	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+
abc	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−
d	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−
ad	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+
bd	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+
abd	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−
cd	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+
acd	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−
bcd	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−
abcd	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

نمودار احتمال نرمال این اثرها را در شکل ۸.۹ نشان داده‌ایم. تمام اثرهایی که در امتداد خط قرار دارند ناچیزند، در صورتی‌که اثرهای بزرگ دور از خط قرار گرفته‌اند. اثرهای مهمی که این تحلیل آشکار می‌کند اثرهای اصلی A، C، و D و اثرهای متقابل AC و AD هستند.

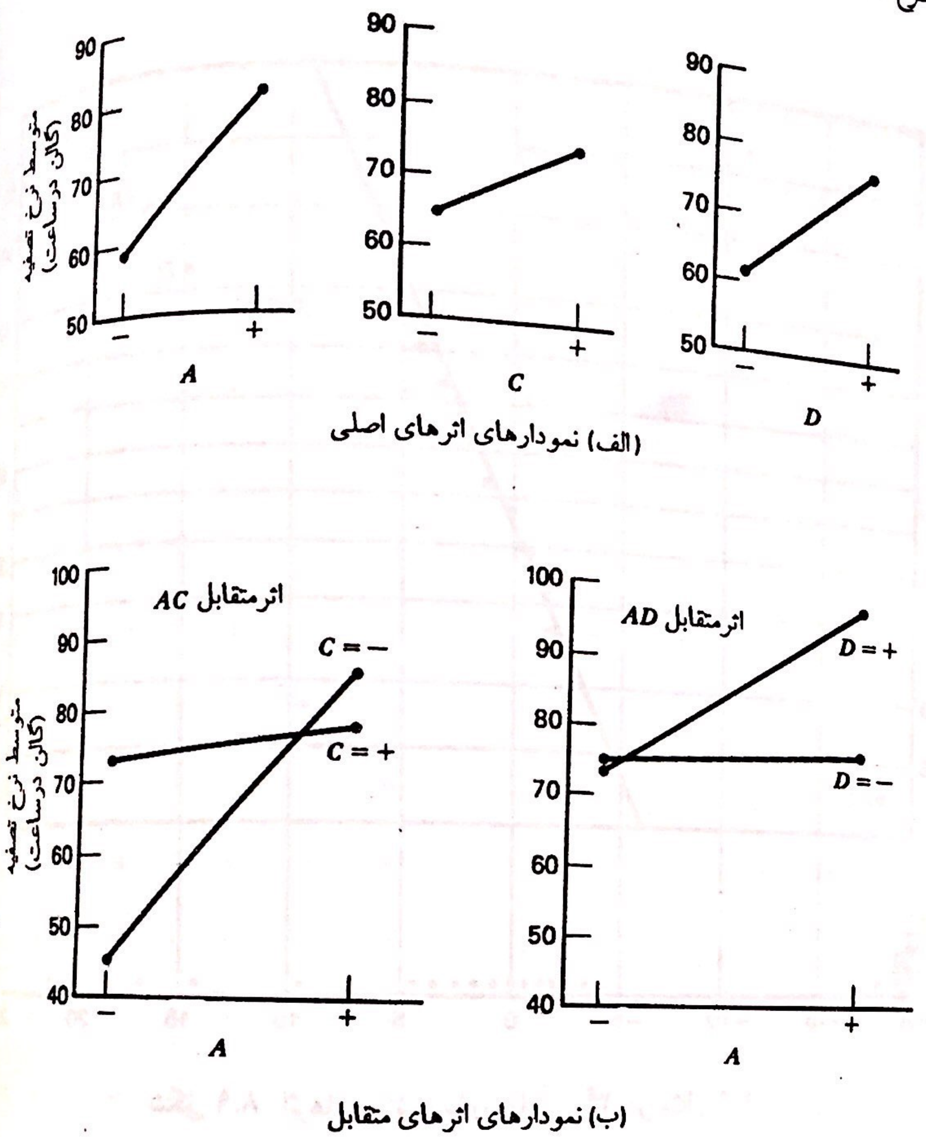
اثرهای اصلی A، B، و D را در شکل ۹.۹ (الف) نشان داده‌ایم. تمامی این سه اثر مثبت‌اند و اگر تنها این سه اثر اصلی را در نظر بگیریم، تمام این سه عامل را برای ماکسیمم کردن نرخ



شکل ۸.۹ اثرهای مرتب برای عاملی 2^4 در مثال ۲.۹.

تصفیه در سطح بالا اجرا می‌کنیم. اما همیشه بررسی هر اثر متقابل مهمی ضروری است. به‌خاطر داشته باشید که وقتی اثرهای اصلی مشتمل بر اثرهای متقابل معنی‌دارند خود چندان معنایی ندارند.

اثرهای متقابل AC و AD را در شکل ۹.۹ (ب) رسم کرده‌ایم. این اثرهای متقابل کلید حل مسأله هستند. توجه کنید که بنابر اثر متقابل AC، اثر دما وقتی غلظت در سطح بالاست بسیار کوچک و وقتی غلظت در سطح پایین است بسیار بزرگ است، بهترین نتیجه‌ها با غلظت پایین و دمای بالا حاصل می‌شود. اثر متقابل AD نشان می‌دهد که نرخ هم‌زن D در دمای پایین اثر کمی دارد اما در دمای زیاد اثر بزرگ و مثبت دارد. بنابراین، به‌نظر می‌رسد بهترین نرخ تصفیه وقتی A و D در سطح بالا و C در سطح پایین باشد به‌دست می‌آید. این، موجب تقلیل غلظت فرمالدئید به سطح پایین که هدف دیگر آزمایشگر است می‌شود. ■



شکل ۹.۹ نمودارهای اثرهای اصلی و متقابل برای مثال ۲.۹. (الف) نمودارهای اثرهای اصلی. (ب) نمودارهای اثرهای متقابل.

تصویرکردن طرح. ارائهٔ تعبیر دیگری برای داده‌های شکل ۸.۹ ممکن است. چون B (فشار) معنی‌دار نیست و تمام اثرهای متقابل شامل B نیز ناچیزند لذا می‌توانیم در آزمایش B را کنار بگذاریم، به‌طوری که یک طرح عاملی 2^3 برحسب A، C، و D، اما با دو تکرار، داشته باشیم. این کار به‌سادگی تنها با بررسی ستونهای A، C، و D در جدول ۷.۹ و با توجه به اینکه این ستونها تشکیل یک طرح 2^3 با دو تکرار را می‌دهند حاصل می‌شود. تحلیل واریانس برای داده‌ها را با توجه به این پذیرهٔ ساده‌سازی، در جدول ۹.۹ خلاصه کرده‌ایم. نتایج حاصل از این تحلیل اساساً همانهایی هستند که از مثال ۲.۹ به‌دست آمدند. توجه کنید که با تصویرکردن طرح تک‌تکراری 2^4 به یک طرح تکراری 2^3، برپایهٔ تکرار، هم برآوردکردن اثر متقابل ACD و هم برآوردکردن خطا هر دو میسر شده است. مفهوم تصویرکردن طرح عاملی تکرارنشده به طرح عاملی تکرارشده اما با عوامل کمتر بسیار

جدول ۹.۹ تحلیل واریانس برای آزمایش نرخ تصفیهٔ واحد صنعتی آزمایشگاهی در A، C، و D

منبع تغییر	مجموع مربعات	درجات آزادی	میانگین مربعات	F_0
A	۱۸۷۰٫۵۶	۱	۱۸۷۰٫۵۶	۸۳٫۳۶*
C	۳۹۰٫۰۶	۱	۳۹۰٫۰۶	۱۷٫۳۸*
D	۸۵۵٫۵۶	۱	۸۵۵٫۵۶	۳۸٫۱۳*
AC	۱۳۱۴٫۰۶	۱	۱۳۱۴٫۰۶	۵۸٫۵۶*
AD	۱۱۰۵٫۵۶	۱	۱۱۰۵٫۵۶	۴۹٫۲۷*
CD	۵٫۰۶	۱	۵٫۰۶	<1
ACD	۱۰٫۵۶	۱	۱۰٫۵۶	<1
خطا	۱۷۹٫۵۲	۸	۲۲٫۴۴	
مجموع	۵۷۳۰٫۹۴	۱۵		

* معنی‌دار در یک درصد.

مفید است. به‌طور کلی، اگر یک طرح تک‌تکراری 2^k داشته باشیم و اگر h عامل $(h < k)$ ناچیز باشند و بتوانیم آنها را حذف کنیم، آنگاه داده‌های اصلی متناظر با یک عاملی دوسطحی با $k - h$ عامل باقیمانده و 2^h تکرار است.

بازبینی تشخیصی. باید برای مانده‌های طرح 2^k بازبینیهای تشخیصی معمول را انجام داد. تحلیل انجام‌شده نشان می‌دهد که تنها اثرهای معنی‌دار عبارت‌اند از $A = 21.63$، $C = 9.88$، $D = 14.63$، $AC = -18.13$، و $AD = 16.63$. اگر این موضوع درست باشد، آنگاه برآورد نرخهای تصفیه در رئوس طرح از

$$\hat{y} = 70.06 + \left(\frac{21.63}{2}\right)x_1 + \left(\frac{9.88}{2}\right)x_3 + \left(\frac{14.63}{2}\right)x_4 - \left(\frac{18.13}{2}\right)x_1x_3 + \left(\frac{16.63}{2}\right)x_1x_4$$

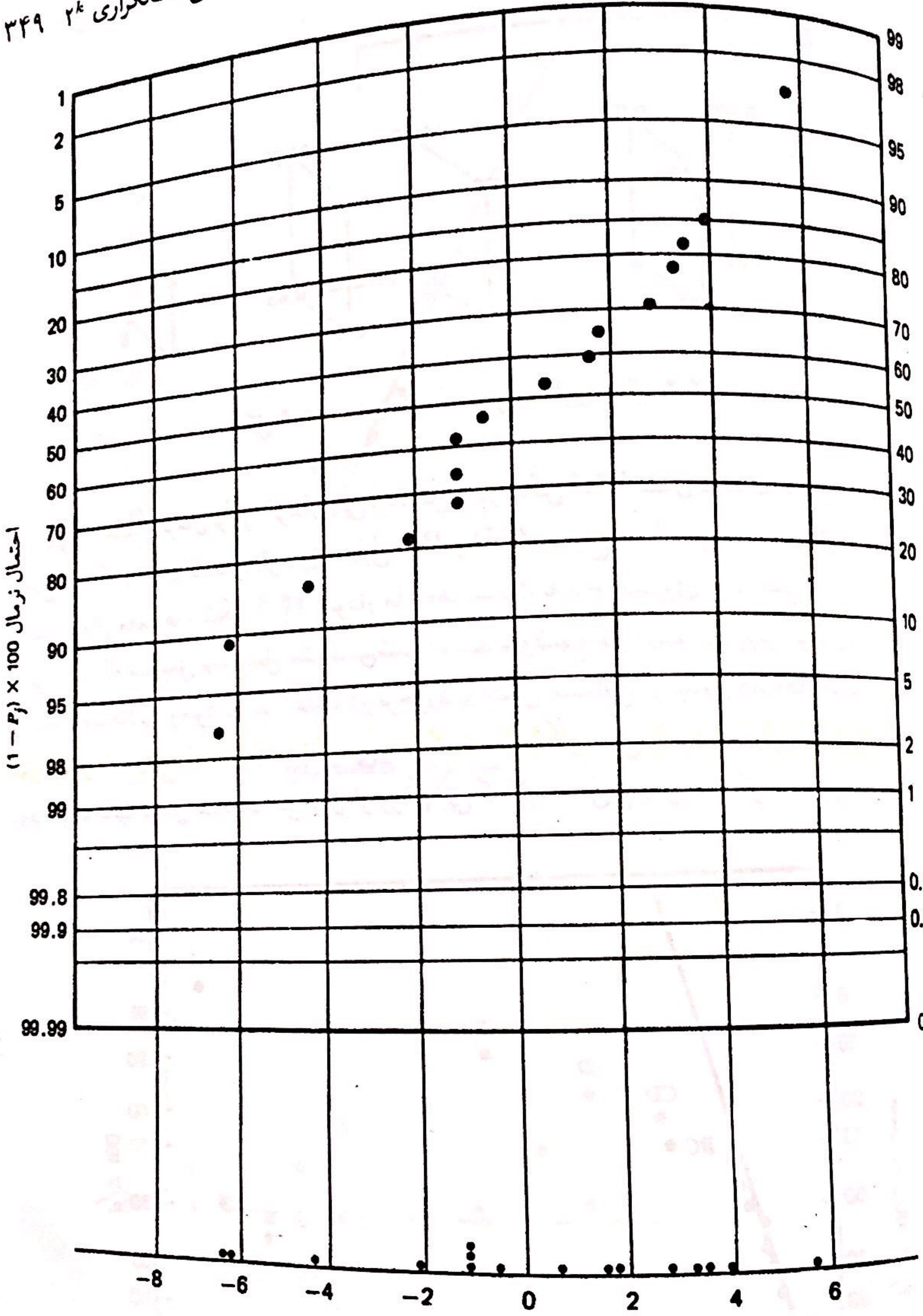
به‌دست می‌آیند، که در آن ۷۰٫۰۶ متوسط پاسخ و هریک از متغیرهای کدگذاری‌شده x_1، x_3، x_4 مقادیر ۱+ یا ۱− را اختیار می‌کنند. نرخ پیش‌بینی شدهٔ تصفیه در اجرای (۱) چنین است

$$\hat{y} = ۷۰٫۰۶ + \left(\frac{۲۱٫۶۳}{۲}\right)(-۱) + \left(\frac{۹٫۸۸}{۲}\right)(-۱) + \left(\frac{۱۴٫۶۳}{۲}\right)(-۱)$$
$$- \left(\frac{۱۸٫۱۳}{۲}\right)(-۱)(-۱) + \left(\frac{۱۶٫۶۳}{۲}\right)(-۱)(-۱)$$
$$= ۴۶٫۲۲$$

چون مقدار مشاهده‌شده ۴۵ است، مانده برابر است با $e = y - \hat{y} = ۴۵ - ۴۶٫۲۲ = -۱٫۲۲$ برای تمام ۱۶ مشاهده مقادیر y، $\hat{y}$، و $e = y - \hat{y}$ به‌صورت زیرند:

	y	$\hat{y}$	$e = y - \hat{y}$
(۱)	۴۵	۴۶٫۲۲	−۱٫۲۲
a	۷۱	۶۹٫۳۹	۱٫۶۱
b	۴۸	۴۶٫۲۲	۱٫۷۸
ab	۶۵	۶۹٫۳۹	−۴٫۳۹
c	۶۸	۷۴٫۲۳	−۶٫۲۳
ac	۶۰	۶۱٫۱۴	−۱٫۱۴
bc	۸۰	۷۴٫۲۳	۵٫۷۷
abc	۶۵	۶۱٫۱۴	۳٫۸۶
d	۴۳	۴۴٫۲۲	−۱٫۲۲
ad	۱۰۰	۱۰۰٫۶۵	−۰٫۶۵
bd	۴۵	۴۴٫۲۲	۰٫۷۸
abd	۱۰۴	۱۰۰٫۶۵	۳٫۳۵
cd	۷۵	۷۲٫۲۳	۲٫۷۷
acd	۸۶	۹۲٫۴۰	−۶٫۴۰
bcd	۷۰	۷۲٫۲۳	−۲٫۲۳
$abcd$	۹۶	۹۲٫۴۰	۳٫۶۰

این مانده‌ها را در شکل ۱۰.۹ روی کاغذ احتمال نرمال رسم کرده‌ایم. این نمودار، نقاط را به‌صورتی مناسب حول و حوش یک خط مستقیم نشان می‌دهد، که مؤید نتایج گذشته است که A، C، D، AC، و AD تنها اثرهای معنی‌دار هستند و حاکی از آن‌است که پذیره‌های زیربنایی تحلیل برقرارند.

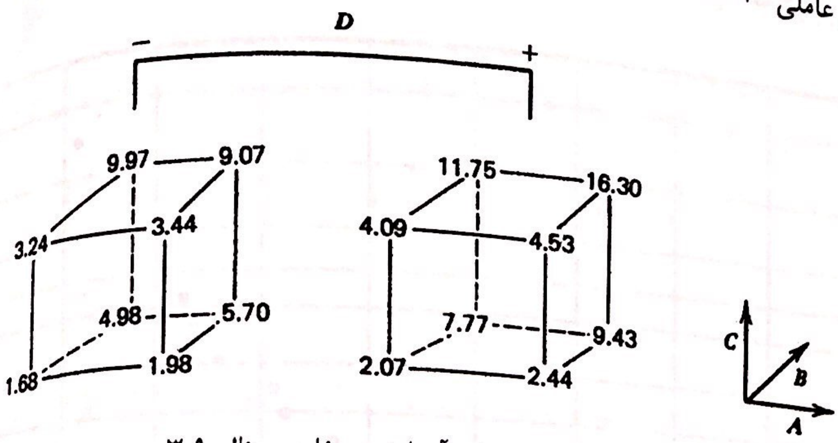


شکل ۱۰.۹ نمودار احتمال نرمال مانده‌ها برای مثال ۲.۹.

مثال ۳.۹

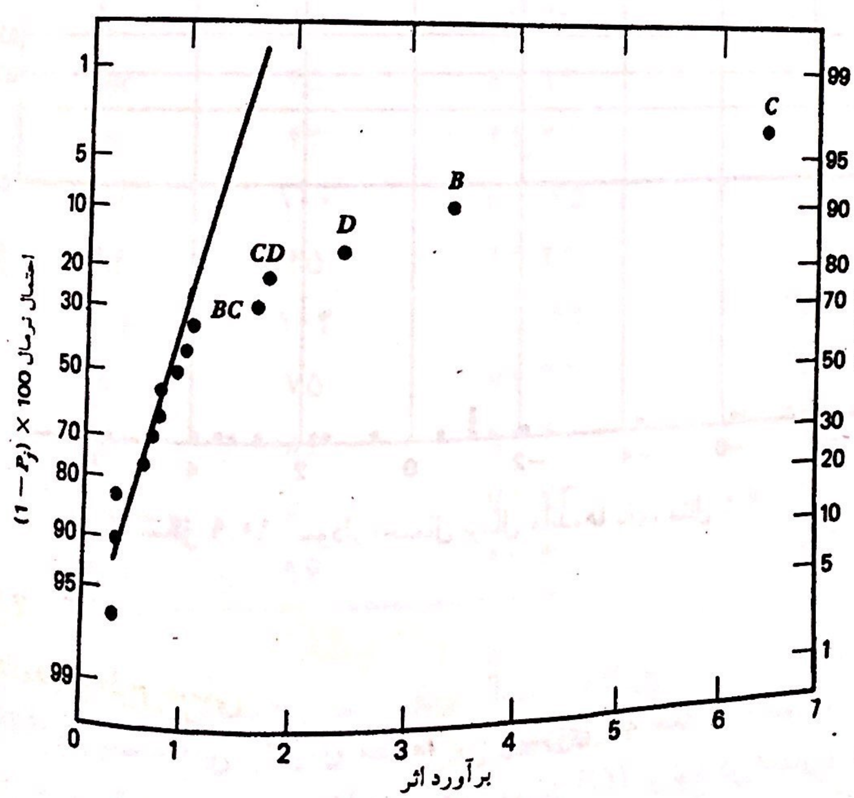
تبدیل داده‌ها در طرح عاملی

دانیل (۱۹۷۶) از یک عاملی 2^4 برای مطالعهٔ نرخ پیشروی متهٔ حفاری به‌صورت تابعی از چهار عامل؛ بار حفاری (A)، نرخ جریان (B)، سرعت دوران (C)، و نوع گل حفاری به‌کار برده‌شده (D)، استفاده می‌کند. داده‌های حاصل از آزمایش را در شکل ۱۱.۹ نشان داده‌ایم.

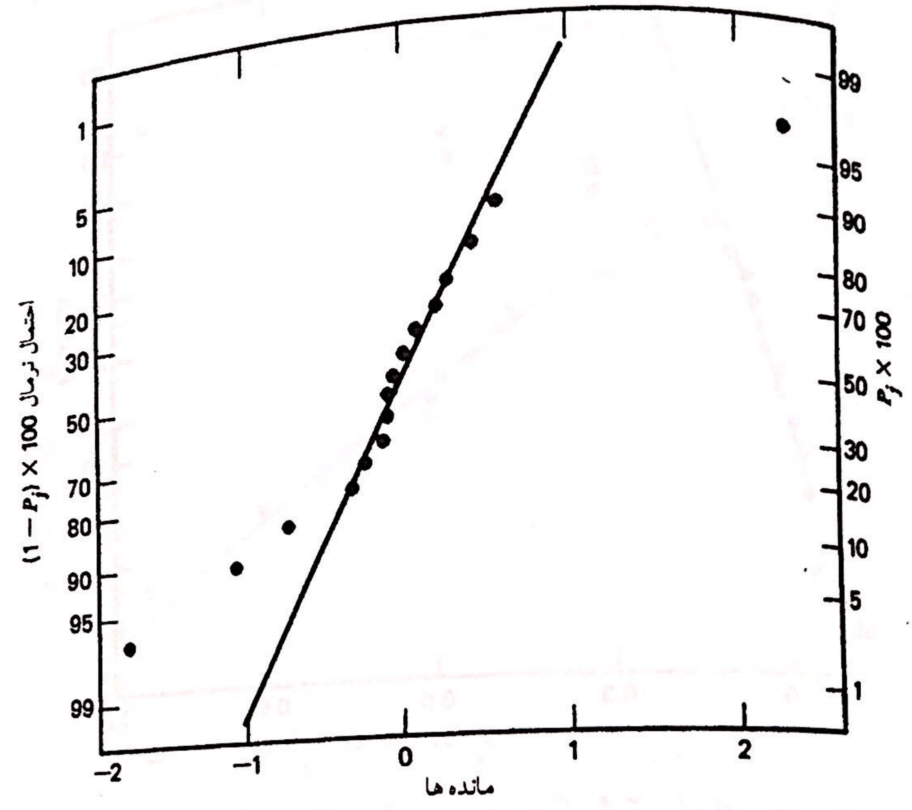


شکل ۱۱.۹ داده‌های آزمایش حفاری مثال ۳.۹.

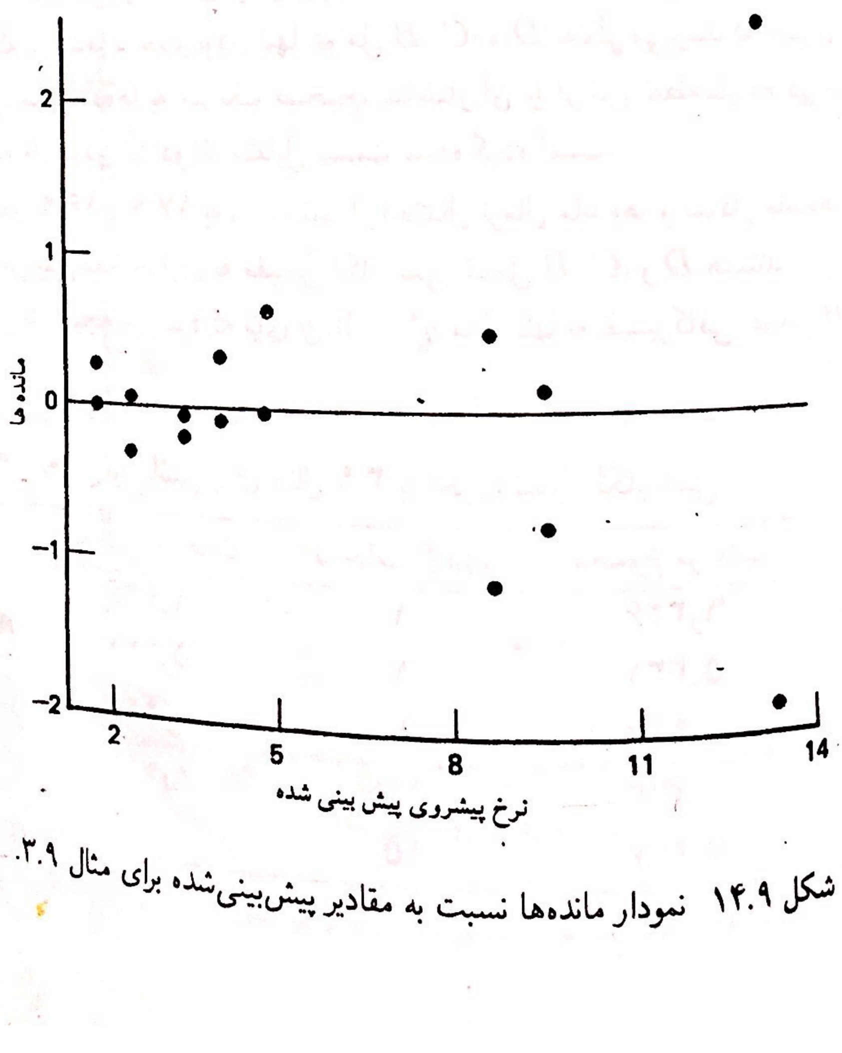
نمودار احتمال نرمال برآورد اثرهای این آزمایش را در شکل ۱۲.۹ نشان داده‌ایم. به‌موجب این نمودار عوامل B، C، و D به‌انضمام اثرهای متقابل BC و CD احتیاج به تفسیر دارند. شکل ۱۳.۹، نمودار احتمال نرمال مانده‌ها و شکل ۱۴.۹ نمودار مانده‌ها نسبت به نرخ پیشروی پیش‌بینی‌شدهٔ حفاری برای مدلی است که مشتمل بر عوامل مشخص‌شده است. به‌وضوح درخصوص پذیرهٔ نرمال‌بودن و برابری واریانس مشکلاتی وجود دارند. اغلب در برخورد با چنین مسائلی از تبدیل داده‌ها استفاده می‌کنیم. چون متغیر پاسخ نرخ است، لذا به‌نظر می‌رسد که تبدیل لگاریتمی نامزد معقولی باشد. (در صورت لزوم در انتخاب تبدیل مناسب می‌توان از روشهایی که در فصل چهارم متذکر شده‌ایم استفاده کرد.)



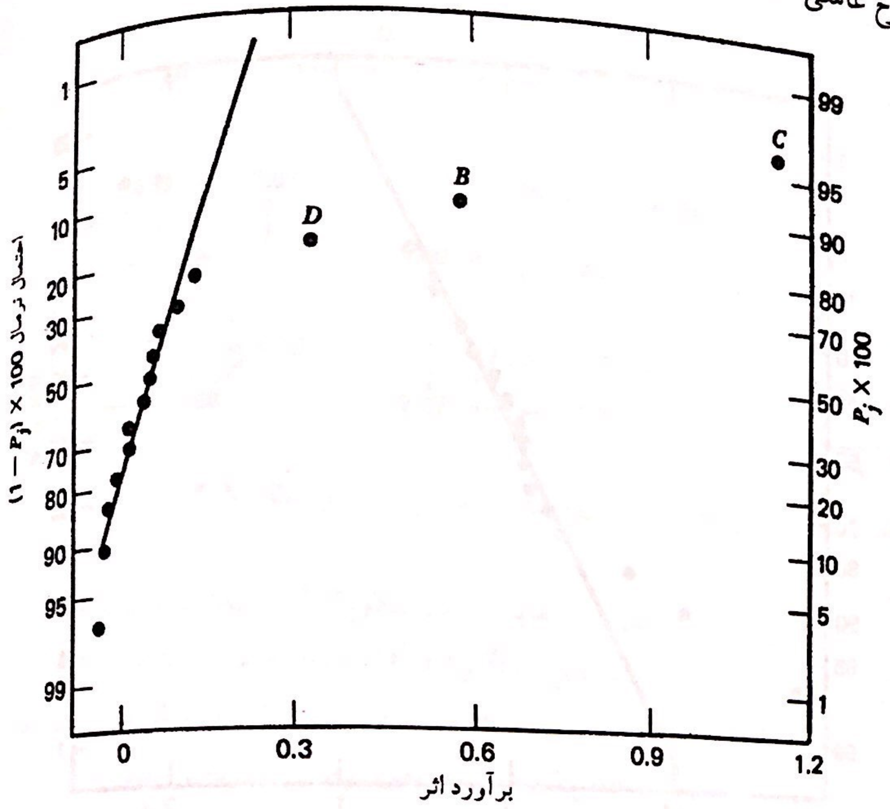
شکل ۱۲.۹ نمودار احتمال نرمال اثرها برای مثال ۳.۹.



شکل ۱۳.۹ نمودار احتمال نرمال مانده‌ها برای مثال ۳.۹.



شکل ۱۴.۹ نمودار مانده‌ها نسبت به مقادیر پیش‌بینی‌شده برای مثال ۳.۹.



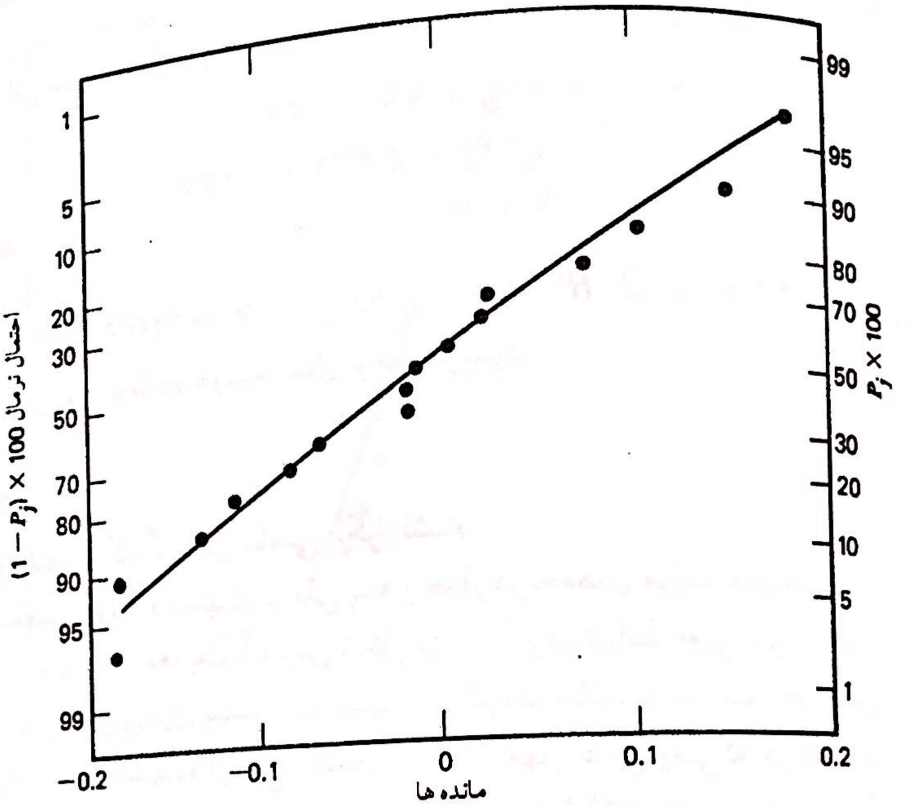
شکل ۱۵.۹ نمودار احتمال نرمال اثرها برای مثال ۳.۹ با اجرای تبدیل لگاریتمی.

شکل ۱۵.۹ نمودار احتمال نرمال برآورد اثرها را بعد از اجرای تبدیل $y^* = \ln y$ نشان می‌دهد. توجه کنید که در اینجا با جدی‌بودن تنها عوامل B، C، و D به‌نظر می‌رسد که تعبیری ساده‌تر امکان دارد. یعنی، بیان داده‌ها به متریک صحیح، ساختار آن را از این نقطه‌نظر که در مدل اخیر دیگر احتیاجی به واردکردن آن دو اثر متقابل نیست ساده کرده است.

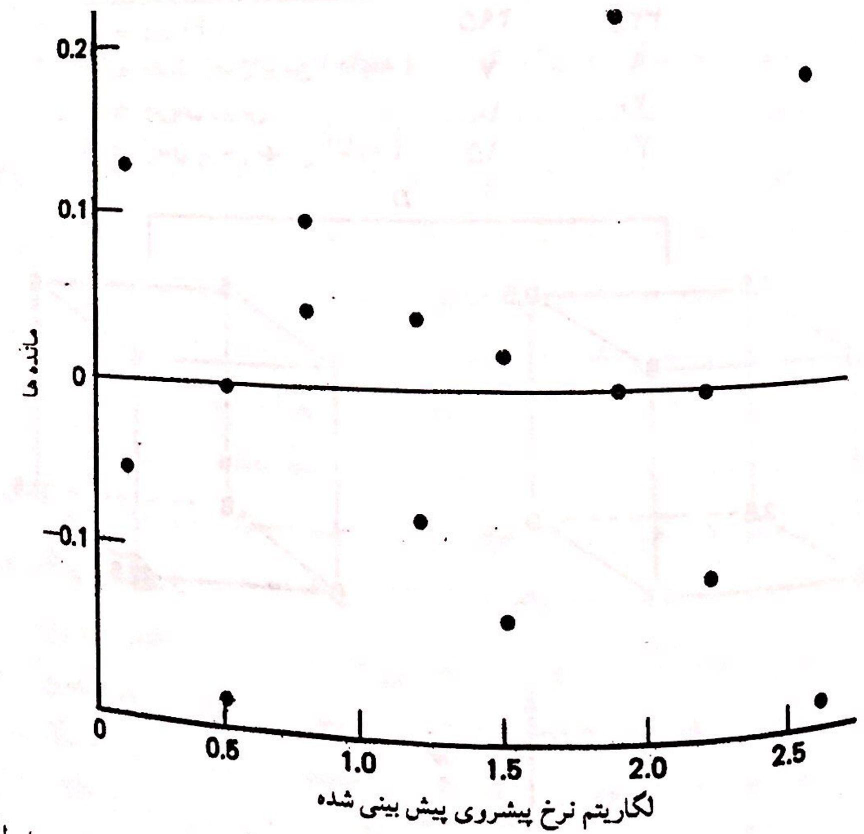
شکلهای ۱۶.۹ و ۱۷.۹ به‌ترتیب نمودار احتمال نرمال مانده‌ها و نمودار مانده‌ها نسبت به نرخ پیشروی پیش‌بینی‌شدهٔ حفاری به مقیاس لگاریتمی شامل B، C، و D هستند. این نمودارها اینک رضایتبخش‌اند. نتیجه می‌شود که برای $y^* = \ln y$ مدل تنها به تفسیر کافی عوامل B، C، و D نیاز

جدول ۱۰.۹ تحلیل واریانس برای مثال ۳.۹ با اجرای تبدیل لگاریتمی

منبع تغییر	مجموع مربعات	درجات آزادی	میانگین مربعات	F_0
نرخ جریان B	۱٫۳۴۶	۱	۱٫۳۴۶	۹۶٫۱۴
سرعت C	۵٫۳۳۱	۱	۵٫۳۳۱	۳۸۰٫۷۹
گل حفاری D	۰٫۴۲۷	۱	۰٫۴۲۷	۳۰٫۵۰
خطا	۰٫۱۷۳	۱۲	۰٫۰۱۴	
کل	۷٫۲۷۷	۱۵		



شکل ۱۶.۹ نمودار احتمال نرمال مانده‌ها برای مثال ۳.۹ با اجرای تبدیل لگاریتمی.



شکل ۱۷.۹ نمودار مانده‌ها نسبت به مقادیر پیش‌بینی‌شده برای مثال ۳.۹ با اجرای تبدیل لگاریتمی.

دارد. برای این مدل، تحلیل واریانس را به اختصار در جدول ۱۰.۹ آورده‌ایم. مجموع مربعات مدل

$$\begin{aligned} SS_{\text{مدل}} &= SS_B + SS_C + SS_D \\ &= ۱٫۳۴۶ + ۵٫۳۳۱ + ۰٫۴۲۷ \\ &= ۷٫۱۰۴ \end{aligned}$$

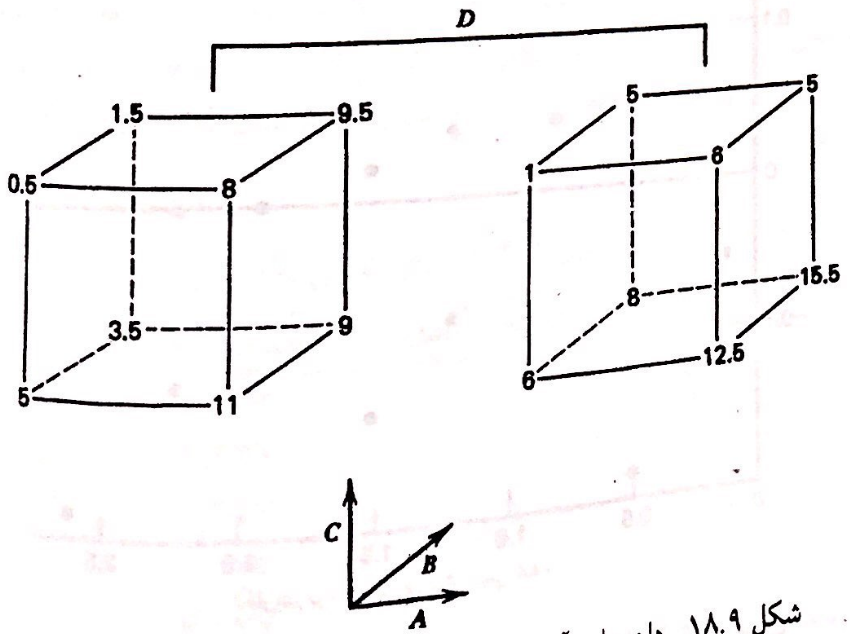
و $R^2 = SS_{\text{مدل}}/SS_{\text{کل}} = (۷٫۱۰۴)/(۷٫۲۷۷) = ۰٫۹۸$، لذا حدود ۹۸ درصد تغییرپذیری در نرخ پیشروی متهٔ حفاری به‌وسیلهٔ مدل توجیه می‌شود. ∎

مثال ۴.۹

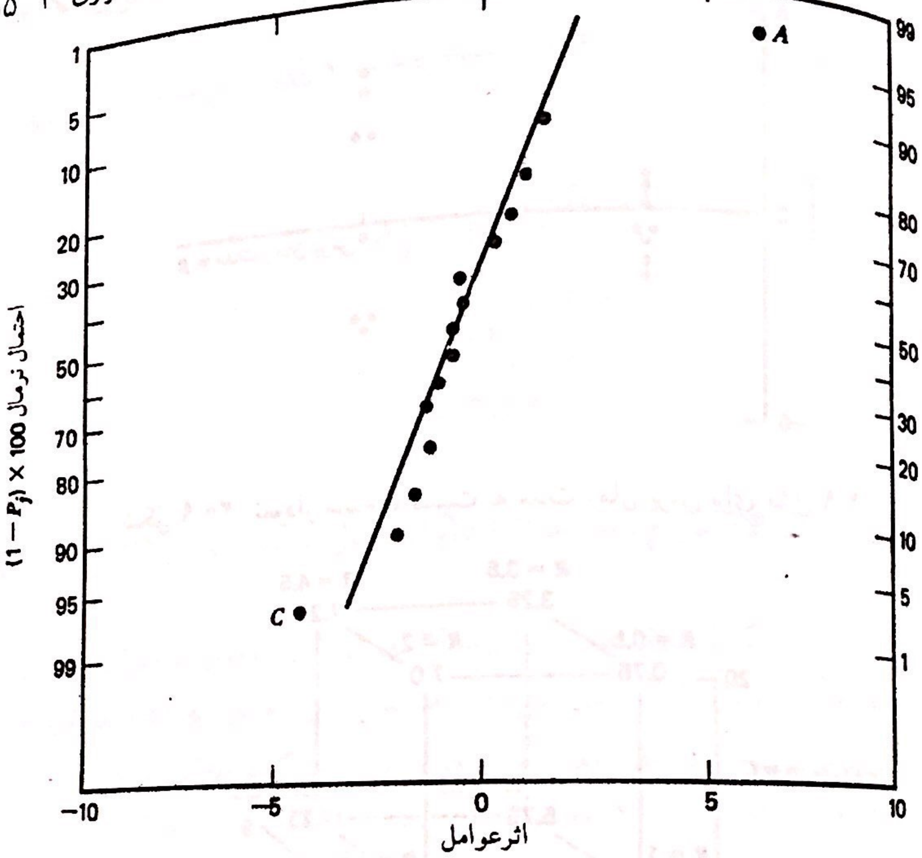
مکان و اثرهای پراکندگی در عاملی تکرارنشده

در فرایند ساخت و تولید قسمتهای داخلی بدنه و جدار دریچه‌های هواپیماهای مسافربری، یک طرح ۲[۴] را اجرا کرده‌ایم. جداره‌ها به‌کمک پرس شکل می‌گیرند و در شرایط فعلی متوسط تعداد نقایص در هر جداره ناشی از پرس‌کاری بسیار زیاد است. (در شرایط حاضر به‌طور متوسط در هر جداره ۵٫۵ عیب وجود دارد.) بااستفاده از طرح تک‌تکراری ۲[۴]، چهار عامل وقتی‌که هر تکرار متناظر با یک پرس‌کاری است، بررسی می‌شوند. عوامل عبارت‌اند از؛ دما (A)، مدت زمان پرس (B)، جریان رزین (C)، و مدت زمان پرس نهایی (D). برای این آزمایش داده‌ها را در شکل ۱۸.۹ نشان داده‌ایم.

عوامل	(−) پایین	(+) بالا
A = دما (°F)	۲۹۵	۳۲۵
B = مدت زمان پرس (دقیقه)	۷	۹
C = جریان رزین	۱۰	۲۰
D = زمان پرس نهایی (ثانیه)	۱۵	۳۰



شکل ۱۸.۹ داده‌های آزمایش فرایند ساخت جداره‌ها در مثال ۴.۹.

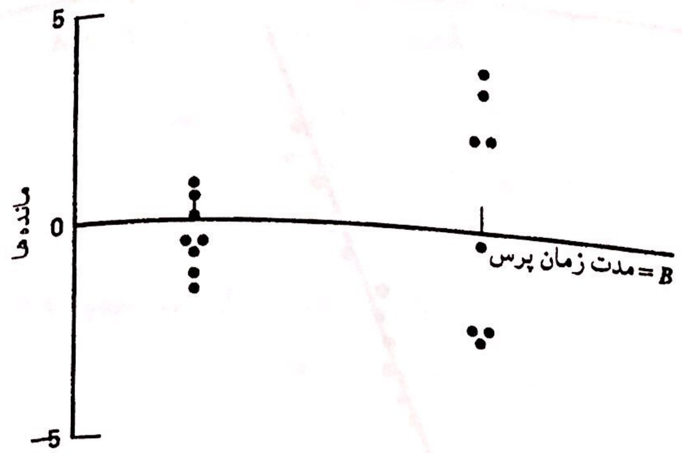


شکل ۱۹.۹ نمودار احتمال نرمال اثر عوامل برای آزمایش فرایند ساخت جداره‌ها در مثال ۴.۹.

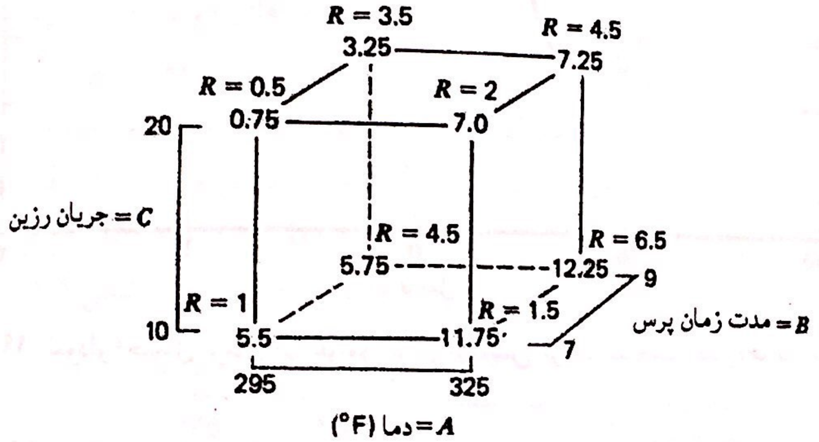
شکل ۱۹.۹ نمودار احتمال نرمال اثر عوامل را نشان می‌دهد. به‌وضوح دو اثر عمده $A =$ ۵٫۷۵ و $C =$ ۴٫۲۵− هستند. اثر عوامل دیگر به‌نظر بزرگ نمی‌آید، و در حدود ۷۷ درصد کل تغییرپذیری را A و C توجیه می‌کنند، بنابراین نتیجه می‌گیریم که دمای پایینتر (A) و جریان بیشتر رزین (C) موجب کاهش وقوع نقائص در ساخت جداره‌ها می‌شود.

یکی از جنبه‌های مهم هر آزمایش تحلیل دقیق مانده‌هاست. نمودار احتمال نرمال مانده‌ها هیچ‌چیز غیرعادی را نشان نمی‌دهد، اما وقتی آزمایشگر مانده‌ها را نسبت به هریک از عوامل A تا D رسم می‌کند، در شکل ۲۰.۹ نمودار مانده‌ها نسبت به B (مدت زمان پرس) وجود الگویی را نشان می‌دهد. اثر این عامل که تا اینجا در ارتباط با متوسط تعداد نقائص در هر جداره، مهم نبوده است از نقطه‌نظر اثرش در تغییرپذیری فرایند بسیار مهم است. به‌این‌ترتیب که در نتیجهٔ کم‌کردن مدت زمان پرس، تغییرپذیری در متوسط تعداد نقائص هر جداره زیر بار پرس کم می‌شود.

از نمودار مکعبی شکل ۲۱.۹ نیز اثر پراکندگی مدت زمان پرس کاملاً مشهود است که در آن متوسط تعداد نقائص در هر جداره و دامنهٔ تعداد نقائص را در هر نقطهٔ مکعب که با عوامل A، B و C تعریف می‌شوند مشخص کرده‌ایم. متوسط دامنه وقتی B در سطح بالاست (وجه عقبی مکعب در شکل ۲۱.۹) $\overline{R}_{B+} =$ ۴٫۷۵ و وقتی B در سطح پایین است $\overline{R}_{B-} =$ ۱٫۲۵. به‌عنوان نتیجهٔ این آزمایش، مهندس تصمیم می‌گیرد که به‌منظور تقلیل متوسط تعداد نقائص،



شکل ۲۰.۹ نمودار مانده‌ها نسبت به مدت زمان پرس برای مثال ۴.۹.



شکل ۲۱.۹ نمودار مکعبی دما، مدت زمان پرس، و جریان رزین برای مثال ۴.۹.

فرایند را در دمای پایین و جریان زیاد رزین، در مدت زمان پایین پرس به‌منظور تقلیل تغییرپذیری تعداد نقائص هر جداره، و در زمان پایین پرس نهایی (که هیچ‌گونه اثر مکانی یا پراکندگی ندارد) اجرا کند. در نتیجهٔ اعمال این شرایط جدید، متوسط تعداد نقائص هر جداره به کمتر از یک خواهد رسید.■

مانده‌ها در طرح 2^k اطلاعات زیادی دربارهٔ مسألهٔ تحت مطالعه می‌دهند. چون مانده‌ها را می‌توان مقادیر مشاهده‌شده از اغتشاش یا خطا دانست، لذا اینها غالباً اطلاعی از تغییرپذیری فرایند می‌دهند. به‌صورت سیستماتیک می‌توانیم با بررسی مانده‌های بدون تکرار 2^k اطلاعاتی دربارهٔ تغییرپذیری فرایند به‌دست آوریم.

نمودار مانده‌ها در شکل ۲۰.۹ را در نظر بگیرید. انحراف معیار هشت مانده که در آنها B در سطح پایین قرار دارد $S(B^-) = 0.83$، و انحراف معیار هشت مانده که در آنها B در سطح بالا قرار دارد $S(B^+) = 2.72$. آمارهٔ

$$F_B^* = \ln \frac{S^2(B^+)}{S^2(B^-)} \qquad (۲۳.۹)$$

$$= \frac{\sum_{\text{نقاط مرکزی}} (y_i - \overline{y})^۲}{n_C - ۱}$$

$$= \frac{\sum_{i=۱}^{۵} (y_i - ۴۰٫۴۶)^۲}{۴}$$

$$= \frac{۰٫۱۷۲۰}{۴}$$

$$= ۰٫۰۴۳۰$$

متوسط نقاط در بخش عاملی طرح $\overline{y}_F = ۴۰٫۴۲۵$ و متوسط نقاط در مرکز برابر $\overline{y}_C = ۴۰٫۴۶$ است. اختلاف $\overline{y}_F - \overline{y}_C = ۴۰٫۴۲۵ - ۴۰٫۴۶ = -۰٫۰۳۵$ به‌نظر کوچک می‌آید. بنابر معادلهٔ (۲۵.۹) مجموع مربعات خمیدگی در جدول تحلیل واریانس به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$SS_{\text{خمیدگی}} = \frac{n_F n_C (\overline{y}_F - \overline{y}_C)^۲}{n_F + n_C}$$

$$= \frac{(۴)(۵)(-۰٫۰۳۵)^۲}{۴ + ۵}$$

$$= ۰٫۰۰۲۷$$

تحلیل واریانس نشان می‌دهد که هر دو عامل اثرهای اصلی معنی‌دار دارند، اثر متقابل وجود ندارد، و گواهی بروجود خمیدگی در پاسخ روی ناحیهٔ کاوش نیست. یعنی، فرض صفر $H_۰ : \sum_{j=۱}^{k} \beta_{jj} = ۰$ را نمی‌توان رد کرد. ∎

۷.۹ الگوریتم یتس برای طرح ۲^k

برای برآورد اثرها و تعیین مجموع مربعات در طرح عاملی ۲^k، تکنیک بسیار ساده‌ای وجود دارد که یتس (۱۹۳۷) آن‌را توصیه کرده است. توضیح این شیوه به بهترین طریق ممکن با بررسی یک مثال عددی میسر می‌شود.

داده‌های طرح $۲^۳$ در مثال ۱.۹ را در نظر بگیرید. این داده‌ها را در جدول ۱۳.۹ آورده‌ایم. ترکیبهای تیماری همیشه به‌ترتیب استاندارد نوشته می‌شوند، و ستون تحت عنوان «پاسخ» شامل مشاهدات مربوطه (یا مجموع تمام مشاهدات) متناظر با ترکیب تیماری است. نیمهٔ اول ستون (۱) با افزودن پاسخها در جفتهای مجاور به‌دست می‌آیند. نیمهٔ دوم ستون (۱) با تغییر علامت درایهٔ اول هر جفت در ستون پاسخ و افزودن پاسخهای جفتهای مجاور حاصل می‌شود. مثلاً در ستون (۱) برای پنجمین عامل به‌دست می‌آوریم $۱ + (-۴) - = -۵$، برای ششمین عامل $۵ + (-۱) - = -۶$، و الی آخر

جدول ۱۳.۹ الگوریتم یتس برای داده‌های مثال ۱.۹

ترکیبهای تیماری	پاسخ	(۱)	(۲)	(۳)	اثر	برآورد اثر $(۳) \div n۲^{k-۱}$	مجموع مربعات $(۳)^۲ \div n۲^k$
(۱)	−۴	−۳	۱	۱۶	I	–	–
a	۱	۴	۱۵	۲۴	A	۳٫۰۰	۳۶٫۰۰
b	−۱	۲	۱۱	۱۸	B	۲٫۲۵	۲۰٫۲۵
ab	۵	۱۳	۱۳	۶	AB	۰٫۷۵	۲٫۲۵
c	−۱	۵	۷	۱۴	C	۱٫۷۵	۱۲٫۲۵
ac	۳	۶	۱۱	۲	AC	۰٫۲۵	۰٫۲۵
bc	۲	۴	۱	۴	BC	۰٫۵۰	۱٫۰۰
abc	۱۱	۹	۵	۴	ABC	۰٫۵۰	۱٫۰۰

ستون (۲) از ستون (۱) درست به همان صورتی که ستون (۱) از ستون پاسخ به‌دست آمد نتیجه می‌شود. به تشابه ستون (۳) از ستون (۲) به‌دست می‌آید: به‌طور کلی برای یک طرح ۲^k، k ستون از این نوع می‌سازیم. ستون (۳) [به‌طور کلی ستون (k)]، مقابله برای اثری است که در شروع سطر معین شده است. برای به‌دست آوردن برآورد اثر، درایه‌های ستون (۳) را بر $n۲^{k-۱}$ تقسیم می‌کنیم (در اینجا، $n۲^{k-۱} = ۸$). بالاخره مجموع مربعات اثرها را با مربع کردن درایه‌های ستون (۳) و تقسیم آنها بر $n۲^k$ (در اینجا، $n۲^k = ۱۶$) به‌دست می‌آوریم.

برآورد اثرها و مجموع مربعات آنها که به‌وسیلهٔ الگوریتم یتس برای داده‌های مثال ۱.۹ به‌دست می‌آیند با نتایجی که از روشهای معمولی حاصل می‌شوند مطابقت دارند. توجه کنید که درایهٔ اول ستون (۳) [به‌طور کلی ستون (k)] متناظر با سطر (۱)، همیشه برابر مجموع کل مشاهدات است.

با وجود سادگی صوری این شیوه، آشکارا در الگوریتم یتس خطاهای عددی رخ می‌دهند. و باید در استفاده از این شیوه بسیار محتاط بود. به‌عنوان بررسی جزئی محاسبات می‌توانیم از این واقعیت که مجموع مربعات درایه‌های واقع در ستون jام، ۲^j برابر مجموع مربعات درایه‌های موجود در ستون پاسخ است استفاده کنیم. بهٔ هرحال توجه کنید که این بررسی موکول به خطا در علامت ستون j است. برای ملاحظهٔ تکنیکهای دیگر بررسی خطا، دیویس (۱۹۵۶)، گود[1] (۱۹۵۸ و ۱۹۵۵)، کمپتورن[2] (۱۹۵۲)، و راینر[3] (۱۹۶۷) را ببینید.

1. Good 2. Kempthorne 3. Rayner

۸.۹ مسائل

۱.۹ مهندسی به اثرهای سرعت برش (A)، شکل هندسی ابزار (B)، و زاویهٔ برش در طول عمر یک ماشین ابزار (برحسب ساعت) علاقه‌مند است. از هر عامل دو سطح انتخاب و یک طرح عاملی 2^3 با سه تکرار اجرا شده است. نتایج به‌صورت زیر بوده‌اند:

A	B	C	ترکیبهای تیماری	تکرار I	تکرار II	تکرار III
−	−	−	(۱)	۲۲	۳۱	۲۵
+	−	−	a	۳۲	۴۳	۲۹
−	+	−	b	۳۵	۳۴	۵۰
+	+	−	ab	۵۵	۴۷	۴۶
−	−	+	c	۴۴	۴۵	۳۸
+	−	+	ac	۴۰	۳۷	۳۶
−	+	+	bc	۶۰	۵۰	۵۴
+	+	+	abc	۳۹	۴۱	۴۷

(الف) اثر عوامل را برآورد کنید. کدام اثرها به‌نظر بزرگ می‌آیند؟

(ب) با استفاده از تحلیل واریانس، نتایج قسمت (الف) را تأیید کنید.

(ج) مانده‌ها را تحلیل کنید. آیا هیچ مسألهٔ واضحی وجود دارد؟

(د) چه سطوحی از A، B، و C را توصیه می‌کنید.

۲.۹ از یک ابزار برش برای کنده‌کاری محل شکافها روی فیبرهای مدار چاپی استفاده می‌شود. میزان ارتعاش در سطح فیبر در موقع برش را به‌عنوان منبع اصلی اندازهٔ تغییرات در شکافها در نظر می‌گیریم. تصور می‌شود دو عامل در میزان ارتعاش مؤثر باشند: اندازهٔ تیغه (A) و سرعت برش (B). دو اندازهٔ تیغه ($\frac{1}{16}$ و $\frac{1}{8}$ اینچ) و دو سرعت برش (۴۰ و ۹۰ دور در دقیقه) انتخاب شده و تحت هر یک از مجموعه شرایطی که در زیر آمده‌اند چهار فیبر امتحان شده‌اند. متغیر پاسخ ارتعاش محاسبه‌شده به‌صورت بردار برایند سه شتاب‌سنج (x, y, z) در هریک از فیبرهای مورد آزمون بوده است.

A	B	ترکیبهای تیماری	تکرار I	تکرار II	تکرار III	تکرار IV
−	−	(۱)	۱۸٫۲	۱۸٫۹	۱۲٫۹	۱۴٫۴
+	−	a	۲۷٫۲	۲۴٫۰	۲۲٫۴	۲۲٫۵
−	+	b	۱۵٫۹	۱۴٫۵	۱۵٫۱	۱۴٫۲
+	+	ab	۴۱٫۰	۴۳٫۹	۳۶٫۳	۳۹٫۹

(الف) داده‌های این آزمایش را تحلیل کنید.

(ب) مانده‌ها را روی کاغذ احتمال نرمال و نسبت به میزان ارتعاش پیش‌بینی‌شده رسم کنید. این نمودارها را تفسیر کنید.

(ج) نمودار اثر متقابل AB را رسم کنید. این نمودار را تفسیر کنید. چه سطوحی از اندازهٔ تیغه و سرعت را برای عملکرد پیشنهاد می‌کنید؟

۳.۹ برای اثرهای عاملی مسألهٔ ۱.۹ دو حد خطای معیار را پیدا کنید. آیا نتایج این تحلیل با نتایج حاصل از تحلیل واریانس مطابقت می‌کنند؟

۴.۹ اثرهای عاملی مسألهٔ ۱.۹ را در نموداری نسبت به یک توزیع t با مقیاس مناسب رسم کنید. آیا این نمودار به‌اندازهٔ کافی عوامل مهم را شناسایی می‌کند؟ نتایج حاصل از این نمودار را با آنهایی که از تحلیل واریانس به‌دست آمده‌اند مقایسه کنید.

۵.۹ برای اصلاح محصول یک فرایند شیمیایی آزمایشی انجام شده است. چهار عامل انتخاب و یک آزمایش تصادفی‌شدهٔ کامل با دو تکرار اجرا شده است. نتایج را در جدول زیر نشان داده‌ایم:

ترکیبهای تیماری	تکرار		ترکیبهای تیماری	تکرار	
	I	II		I	II
(۱)	۹۰	۹۳	d	۹۸	۹۵
a	۷۴	۷۸	ad	۷۲	۷۶
b	۸۱	۸۵	bd	۸۷	۸۳
ab	۸۳	۸۰	abd	۸۵	۸۶
c	۷۷	۷۸	cd	۹۹	۹۰
ac	۸۱	۸۰	acd	۷۹	۷۵
bc	۸۸	۸۲	bcd	۸۷	۸۴
abc	۷۳	۷۰	$abcd$	۸۰	۸۰

(الف) اثرهای عاملی را برآورد کنید.

(ب) جدول تحلیل واریانس را آماده کرده و تعیین کنید کدام عوامل در اصلاح محصول مهم‌اند.

(ج) مانده‌ها را نسبت به مقادیر پیش‌بینی‌شدهٔ محصول و روی کاغذ احتمال نرمال رسم کنید. آیا تحلیل مانده‌ای رضایتبخش است؟

(د) دو اثر متقابل سه‌عاملی ABC و ABD ظاهراً اثرهای بزرگی دارند. نمودار مکعبی عوامل A، B، و C را با مشخص کردن متوسط محصولها در هر گوشه رسم کنید. این نمودار را با استفاده از عوامل A، B، و D رسم کنید. آیا این دو نمودار در تعبیر داده‌ها کمکی می‌کنند؟ نسبت به‌این چهار متغیر، چه سطوحی را برای اجرای فرایند توصیه می‌کنید؟

۶.۹ یک باکتری‌شناس علاقه‌مند به اثرهای دو محیط کشت مختلف و دو زمان مختلف رشد یک ویروس خاص است. وی یک طرح 2^2 را با شش تکرار انجام داده و اجراها را به‌ترتیب تصادفی

در نظر گرفته است. داده‌های مربوط به رشد باکتری را که ذیلاً آمده است تحلیل و نتایج مناسب را استخراج کنید. مانده‌ها را تحلیل کنید و دربارهٔ کفایت مدل نظر دهید.

زمان	محیط کشت ۱		محیط کشت ۲	
۱۲ ساعت	۲۱	۲۲	۲۵	۲۶
	۲۳	۲۸	۲۴	۲۵
	۲۰	۲۶	۲۹	۲۷
۱۸ ساعت	۳۷	۳۹	۳۱	۳۴
	۳۸	۳۸	۲۹	۳۳
	۳۵	۳۶	۳۰	۳۵

۷.۹ مهندسی شاغل در یک شرکت نوشابه پرکنی به اثرهای دو نوع مختلف بطریهای ۳۲ اونسی در زمان تحویل جعبه‌های ۱۲تایی فراورده علاقه‌مند است. انواع مختلف بطریها شیشه‌ای و پلاستیکی هستند. در جابه‌جایی چهل جعبه از فراورده طی مسافتی به اندازهٔ ۵۰ پا به‌وسیلهٔ نوعی چرخ‌دستی استاندارد و انبارکردن آنها از دو کارگر استفاده می‌شود. یک طرح عاملی ۲^۲ با چهار تکرار انجام شده و زمانهای مشاهده‌شده را در جدول زیر آورده‌ایم. داده‌ها را تحلیل کنید و نتایج مربوط را ارائه دهید. مانده‌ها را تحلیل کنید و در کفایت، مدل توضیح دهید.

نوع بطری	کارگر ۱		کارگر ۲	
شیشه‌ای	۵٫۱۲	۴٫۸۹	۶٫۶۵	۶٫۲۴
	۴٫۹۸	۵٫۰۰	۵٫۴۹	۵٫۵۵
پلاستیکی	۴٫۹۵	۴٫۴۳	۵٫۲۸	۴٫۹۱
	۴٫۲۷	۴٫۲۵	۴٫۷۵	۴٫۷۱

۸.۹ مهندس مسألهٔ ۷.۹ به اختلاف سختی کار بالقوهٔ حمل دو نوع بطری نیز علاقه‌مند است. به‌عنوان اندازه‌ای از میزان تلاش لازم، میزان افزایش ضربان قلب ناشی از انجام کار را اندازه می‌گیرد. نتایج به‌قرار زیرند. داده‌ها را تحلیل و نتایج را استخراج کنید. مانده‌ها را تحلیل کنید و کفایت مدل را توضیح دهید.

نوع بطری	کارگر ۱		کارگر ۲	
شیشه‌ای	۳۹	۴۵	۲۰	۱۳
	۵۸	۳۵	۱۶	۱۱
پلاستیکی	۴۴	۳۵	۱۳	۱۰
	۴۲	۲۱	۱۶	۱۵

۹.۹ دو حد خطای معیار اثرهای عاملی را در مسألهٔ ۸.۹ محاسبه کنید. آیا نتایج این تحلیل با تحلیل واریانس حاصل از مسألهٔ ۸.۹ مطابقت می‌کند؟

۱۰.۹ مقاله‌ای در مجله‌ای* کاربرد طرحهای عاملی دوسطحی را در ساخت مدارهای مجتمع شرح می‌دهد. مرحلهٔ اصلی فرایند رشد لایهٔ اپی‌تاکسیال[1] روی سطوح پرداخت‌شدهٔ سیلیکون است. سطوح پرداخت‌شده و مجهز به مواد حساس به اثرهای مغناطیسی را داخل ظرفی زنگی‌شکل قرار داده و به آنها بخار شیمیایی اثر می‌دهند. مواد حساس به اثرهای مغناطیسی را تا زمانی‌که ضخامت لایهٔ اپی‌تاکسیال به حد کافی برسد دوران و حرارت می‌دهند. بااستفاده از دو عامل نرخ جریان ارسینیک (A) و زمان ته‌نشین‌شدن (B) آزمایشی اجرا شده است. چهار تکرار در نظر گرفته و ضخامت لایهٔ اپی‌تاکسیال برحسب میکرومیلیمتر اندازه‌گیری شده است. داده‌ها به‌صورت زیرند:

A	B	تکرار I	II	III	IV		سطوح عوامل: پایین (−)	بالا (+)
−	−	۱۴٫۰۳۷	۱۶٫۱۶۵	۱۳٫۹۷۲	۱۳٫۹۰۷	A	٪۵۵	٪۵۹
+	−	۱۳٫۸۸۰	۱۳٫۸۶۰	۱۴٫۰۳۲	۱۳٫۹۱۴			
−	+	۱۴٫۸۲۱	۱۴٫۷۵۷	۱۴٫۸۴۳	۱۴٫۸۷۸	B	کوتاه	بلند
+	+	۱۴٫۸۸۸	۱۴٫۹۲۱	۱۴٫۴۱۵	۱۴٫۹۳۲			

(الف) اثرهای عاملی را برآورد کنید.

(ب) تحلیل واریانس را انجام دهید. کدام عوامل مهم‌اند؟

(ج) مانده‌ها را تحلیل کنید. آیا مانده‌هایی وجود دارند که بتوانند موجب نگرانی باشند؟

(د) در چگونگی برخورد با دادهٔ دورافتادهٔ بالقوه که ممکن است در قسمت (ج) پیدا شود بحث کنید.

۱۱.۹ از آلیاژ نیکل ـ تیتانیوم در ساخت قطعات توربین جت موتورهای هواپیما استفاده می‌شود. ترک برداشتن این قطعات در نهایت کار، مسأله‌ای بالقوه جدی است، که می‌تواند به خسارت

* صفحات ۳۹ ـ ۵۰ از مجلهٔ *AT&T Technical Journal* شمارهٔ ۶۵ مارس ـ آوریل سال ۱۹۸۶.

1. epitaxial

جبران‌ناپذیر منتهی شود. در بخشهای تولیدی برای تعیین اثر چهار عامل در ترک برداشتن قطعات آزمونی انجام شده است. چهار عامل عبارت‌اند از دمای ریخته‌گری (A)، میزان تیتانیوم (B)، روش اعمال گرما (C)، و ظرافت دانه‌های مورداستفاده (D). یک طرح 2^4 با دو تکرار اجرا شده، و طول شکاف در قطعات نمونه برحسب میلیمتر، که موضوع آزمون استاندارد بوده است، اندازه‌گیری می‌شود. داده‌ها را در زیر نشان داده‌ایم:

A	B	C	D	ترکیبهای تیماری	تکرار I	تکرار II
−	−	−	−	(۱)	۱٫۷۱	۱٫۹۱
+	−	−	−	a	۱٫۴۲	۱٫۴۸
−	+	−	−	b	۱٫۳۵	۱٫۵۳
+	+	−	−	ab	۱٫۶۷	۱٫۵۵
−	−	+	−	c	۱٫۲۳	۱٫۳۸
+	−	+	−	ac	۱٫۲۵	۱٫۲۶
−	+	+	−	bc	۱٫۴۶	۱٫۴۲
+	+	+	−	abc	۱٫۲۹	۱٫۲۷
−	−	−	+	d	۲٫۰۴	۲٫۱۹
+	−	−	+	ad	۱٫۸۶	۱٫۸۵
−	+	−	+	bd	۱٫۷۹	۱٫۹۵
+	+	−	+	abd	۱٫۴۲	۱٫۵۹
−	−	+	+	cd	۱٫۸۱	۱٫۹۲
+	−	+	+	acd	۱٫۳۴	۱٫۲۹
−	+	+	+	bcd	۱٫۴۶	۱٫۵۳
+	+	+	+	$abcd$	۱٫۳۸	۱٫۳۵

(الف) اثرهای عاملی را برآورد کنید. اثر کدام عامل به‌نظر بزرگ می‌آید؟

(ب) تحلیل واریانس را انجام دهید. آیا هیچ‌یک از عوامل در ترک برداشتن قطعه مؤثر بوده است؟

(ج) مانده‌های این آزمایش را تحلیل کنید.

(د) آیا نشانه‌ای که عاملی در تغییرپذیری میزان ترک برداشتن قطعه مؤثر باشد وجود دارد؟

(ه) در خصوص اعمال فرایند چه توصیه‌هایی دارید؟

۱۲.۹ مقاله‌ای در مجله‌ای* تحت عنوان «طرح متعامد برای فرایند بهینه‌سازی و کاربرد آن در زدودن ناپاکیهای سنگهای قیمتی» کاربرد طرحهای عاملی را در توسعهٔ فرایند بنیان نیترید در یک

* صفحات ۱۲۷ ـ ۱۳۲ از مجلهٔ *Solid State Technology* شمارهٔ ماه مه سال ۱۹۸۷.

سنگ قیمتی تکی شرح می‌دهد. فرایند از گاز C_2F_6 به‌عنوان مادهٔ اولیه استفاده می‌کند. چهار عامل موردنظر عبارت‌اند از: فاصلهٔ کاتد ـ آند (A)، فشار در مخزن رآکتور (B)، جریان گاز C_2F_6(C)، و نیروی اعمال‌شده به کاتد (D). متغیر پاسخ موردنظر نرخ حکاکی برای نیتریدسیلیکون است. یک طرح عاملی 2^4 با یک تکرار اجرا شده و داده‌ها را در زیر نشان داده‌ایم:

	سطوح عوامل	
	پایین ($-$)	بالا ($+$)
A(cm)	۰٫۸۰	۱٫۲۰
B(mTorr)	۴٫۵۰	۵۵۰
C(SCCM)	۱۲۵	۲۰۰
D(W)	۲۷۵	۳۲۵

شمارهٔ اجرا	ترتیب واقعی اجرا	A	B	C	D	نرخ حکاکی (در دقیقه/A)
۱	۱۳	$-$	$-$	$-$	$-$	۵۵۰
۲	۸	$+$	$-$	$-$	$-$	۶۶۹
۳	۱۲	$-$	$+$	$-$	$-$	۶۰۴
۴	۹	$+$	$+$	$-$	$-$	۶۵۰
۵	۴	$-$	$-$	$+$	$-$	۶۳۳
۶	۱۵	$+$	$-$	$+$	$-$	۶۴۲
۷	۱۶	$-$	$+$	$+$	$-$	۶۰۱
۸	۳	$+$	$+$	$+$	$-$	۶۳۵
۹	۱	$-$	$-$	$-$	$+$	۱۰۳۷
۱۰	۱۴	$+$	$-$	$-$	$+$	۷۴۹
۱۱	۵	$-$	$+$	$-$	$+$	۱۰۵۲
۱۲	۱۰	$+$	$+$	$-$	$+$	۸۶۸
۱۳	۱۱	$-$	$-$	$+$	$+$	۱۰۷۵
۱۴	۲	$+$	$-$	$+$	$+$	۸۶۰
۱۵	۷	$-$	$+$	$+$	$+$	۱۰۶۳
۱۶	۶	$+$	$+$	$+$	$+$	۷۲۹

(الف) اثرهای عاملی را برآورد کنید. نمودار احتمال نرمال اثر عوامل را رسم کنید. کدام اثرها به‌نظر بزرگ می‌آیند؟

(ب) تحلیل واریانس را برای تأیید یافته‌های خود در قسمت (الف) انجام دهید.

(ج) مانده‌های این آزمایش را تحلیل کنید. درکفایت مدل اظهارنظر کنید.

(د) اگر تمام عوامل مهم نباشند طرح 2^4 را بر یک طرح 2^k با $k < 4$ تصویر کرده و تحلیل واریانس را انجام دهید.

(ه) برای تفسیر اثرهای متقابل معنی‌دار نمودارهایی رسم کنید.

(و) نمودار مانده‌ها را به‌ترتیب واقعی اجرا رسم کنید. از این نمودار چه مطالبی ممکن است آشکار شود؟

طرح تک‌تکراری 2^4 مثال ۲.۹ را در نظر بگیرید. فرض کنید به دلخواه تصمیم گرفته باشیم
۱۳.۹ که داده‌ها را با پذیرفتن آنکه تمام اثرهای متقابل سه و چهارعاملی ناچیزند تحلیل کنیم. این تحلیل را انجام و نتایج خود را با آنچه از مثال به‌دست آمده است مقایسه کنید. آیا فکر می‌کنید که پذیرفتن دلخواه ناچیزبودن اثرهای متقابل، حتی اگر آنها از مرتبهٔ نسبتاً بالا باشند، ایدهٔ خوبی است؟

۱۴.۹ در طرح ساخت نیمه‌هادیها به‌منظور کوشش در افزایش بازدهی، آزمایشی انجام شده است. پنج عامل هر یک در دو سطح تحت مطالعه‌اند. عوامل (و سطوح آنها) عبارت‌اند از A=تنظیم روزنه (کوچک، بزرگ)، B=زمان نوردهی (۲۰٪ زیر مقدار اسمی، ۲۰٪ بالای مقدار اسمی)، C=زمان ظهور (۳۰ ثانیه، ۴۵ ثانیه)، D = ابعاد نقاب (کوچک، بزرگ)، E=زمان سونش (۱۴٫۵ دقیقه، ۱۵٫۵ دقیقه). طرح 2^5 تکرارنشده‌ای که ذیلاً نشان داده‌ایم اجرا شده است.

$(1)=$ ۷	$d=$ ۸	$e=$ ۸	$de=$ ۶
$a=$ ۹	$ad=$ ۱۰	$ae=$ ۱۲	$ade=$ ۱۰
$b=$ ۳۴	$bd=$ ۳۲	$be=$ ۳۵	$bde=$ ۳۰
$ab=$ ۵۵	$abd=$ ۵۰	$abe=$ ۵۲	$abde=$ ۵۳
$c=$ ۱۶	$cd=$ ۱۸	$ce=$ ۱۵	$cde=$ ۱۵
$ac=$ ۲۰	$acd=$ ۲۱	$ace=$ ۲۲	$acde=$ ۲۰
$bc=$ ۴۰	$bcd=$ ۴۴	$bce=$ ۴۵	$bcde=$ ۴۱
$abc=$ ۶۰	$abcd=$ ۶۱	$abce=$ ۶۵	$abcde=$ ۶۳

(الف) نمودار احتمال نرمال برآورد اثرها را رسم کنید. کدام اثر به‌نظر بزرگ می‌آید؟

(ب) تحلیل واریانس را برای تأیید یافته‌های خود از قسمت (الف) انجام دهید.

(ج) مانده‌ها را روی کاغذ احتمال نرمال رسم کنید. آیا این نمودار رضایتبخش است؟

(د) مانده‌ها را نسبت به نتایج پیش‌بینی‌شده و نسبت به هریک از پنج عامل رسم کنید. دربارهٔ این نمودارها توضیح دهید.

(هـ) هر اثر متقابل معنی‌داری را تفسیر کنید.

(و) در خصوص شرایط عملکرد فرایند توصیه‌های شما چیست؟

(ز) طرح 2^5 این مسأله را بر یک طرح 2^k برحسب عوامل مهم تصویر کنید. طرح را رسم کرده و متوسط و دامنهٔ بازدهی در هر اجرا را نشان دهید. آیا این نمودار کمکی به تفسیر داده‌ها می‌کند؟

۱۵.۹ در بررسی پیشرفت یک فرایند از روی محصول آن، چهار عامل، هر یک در دو سطح، تحت مطالعه بوده‌اند؛ زمان (A)، غلظت (B)، فشار (C)، و دما (D). یک طرح تک‌تکراری 2^4 اجرا شده و داده‌های حاصل را در جدول زیر نشان داده‌ایم:

شمارهٔ اجرا	ترتیب واقعی اجرا	A	B	C	D	محصول (پوند)
۱	۵	−	−	−	−	۱۲
۲	۹	+	−	−	−	۱۸
۳	۸	−	+	−	−	۱۳
۴	۱۳	+	+	−	−	۱۶
۵	۳	−	−	+	−	۱۷
۶	۷	+	−	+	−	۱۵
۷	۱۴	−	+	+	−	۲۰
۸	۱	+	+	+	−	۱۵
۹	۶	−	−	−	+	۱۰
۱۰	۱۱	+	−	−	+	۲۵
۱۱	۲	−	+	−	+	۱۳
۱۲	۱۵	+	+	−	+	۲۴
۱۳	۴	−	−	+	+	۱۹
۱۴	۱۶	+	−	+	+	۲۱
۱۵	۱۰	−	+	+	+	۱۷
۱۶	۱۲	+	+	+	+	۲۳

	سطوح عامل	
	پایین (−)	بالا (+)
A (ساعت)	۲٫۵	۳
B (٪)	۱۴	۱۸
C (پوند بر اینچ مربع)	۶۰	۸۰
D (درجهٔ سانتیگراد)	۲۲۵	۲۵۰

(الف) برآورد اثرها را روی کاغذ احتمال نرمال رسم کنید. به‌نظر می‌رسد که کدام عوامل اثرهای زیادی داشته باشند؟

(ب) تحلیل واریانس را بااستفاده از نمودار احتمال نرمال قسمت (الف) به‌منظور چگونگی تشکیل جملهٔ خطا انجام دهید. نتایج شما چه هستند؟

(ج) مانده‌های این آزمایش را تحلیل کنید. آیا تحلیل شما مسائل بالقوه‌ای را نشان می‌دهد؟

(د) آیا می‌توان این طرح را به یک طرح 2^3 با دو تکرار تبدیل کرد؟ اگر بله، طرح را با متوسط و دامنهٔ محصولی که در هر نقطهٔ مکعب نشان داده‌اید رسم کنید. نتایج را تفسیر کنید.

۱۶.۹ **آزمایش پخت یک کیک مطبوع.** مؤلف مهندسی است کارآموز که شدیداً به ضرب‌المثل معروف «به‌عمل کار برآید به سخندانی نیست» معتقد است. او می‌گوید من طی سالیان متمادی طرحهای آزمایش را به افراد مختلف آموزش داده و همیشه برای آنها طرح را مشخص و آزمایش را به‌درستی برای شرکت‌کنندگان در کلاس تحلیل کرده‌ام. به‌نظر می‌رسد که متعلمین از این آزمایشهای عملی لذت می‌برند و همیشه مطالب زیادی را از آنها می‌آموزند. این مسأله نتایج آزمایشی را که شخصی در دانشگاه ایالتی آریزونا انجام داده است مطرح می‌کند.

راههای مختلفی برای پختن یک کیک مطبوع وجود دارد. منظور از این آزمایش تعیین چگونگی نوع قالب، نحوهٔ مخلوط کردن مواد، و روش هم‌زدن است که در مطبوع بودن آن مؤثر است. عوامل و سطوح آن عبارت‌اند از:

عامل	پایین $(-)$	بالا $(+)$
$A=$نوع قالب	چینی	آلومینیمی
$B=$روش هم‌زدن	با قاشق	با مخلوط‌کن
$C=$نحوهٔ مخلوط‌کردن	زیاد	کم

متغیر پاسخ میزان مطبوع‌بودن کیک است که از پرسش نامه‌های داده‌شده به افرادی که تمام پختهای کیک را امتحان کرده‌اند حاصل شده است. (در پرسش‌نامه از موضوعهایی مثل مزه، شکل ظاهری، قوام‌آمدن، بوی خوش، و نظائر آن سؤال شده است). هشت نفر نمونه‌های هر پخت را آزمون کرده و پرسش‌نامه‌ها را پر کرده‌اند. مجموعهٔ کامل داده‌ها را در زیر نشان داده‌ایم:

پخت کیک	A	B	C	نتایج امتحان هر پخت ۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۱	$-$	$-$	$-$	۱۱	۹	۱۰	۱۰	۱۱	۱۰	۸	۹
۲	$+$	$-$	$-$	۱۵	۱۰	۱۶	۱۴	۱۲	۹	۶	۱۵
۳	$-$	$+$	$-$	۹	۱۲	۱۱	۱۱	۱۱	۱۱	۱۱	۱۲
۴	$+$	$+$	$-$	۱۶	۱۷	۱۵	۱۲	۱۳	۱۳	۱۱	۱۱
۵	$-$	$-$	$+$	۱۰	۱۱	۱۵	۸	۶	۸	۹	۱۴
۶	$+$	$-$	$+$	۱۲	۱۳	۱۴	۱۳	۹	۱۳	۱۴	۹
۷	$-$	$+$	$+$	۱۰	۱۲	۱۳	۱۰	۷	۷	۱۷	۱۳
۸	$+$	$+$	$+$	۱۵	۱۲	۱۵	۱۳	۱۲	۱۲	۹	۱۴

(الف) داده‌های این آزمایش را به صورتی‌که اینها یک طرح 2^3 با هشت تکرار باشند تحلیل کنید. نتایج را تفسیر کنید.

(ب) آیا تحلیل قسمت (الف) روشی درست است؟ تنها هشت پخت وجود داشته است. آیا واقعاً یک طرح عاملی 2^3 با هشت تکرار داریم؟

(ج) متوسط و انحراف معیار نرخهای مطبوع‌بودن کیک را تحلیل کنید. نتایج را تفسیر کنید. آیا این تحلیل مناسبتر از تحلیل قسمت (الف) نیست؟ چرا یا چرا نه؟

۱۷.۹ عاملی راکه در چهار سطح ظاهر می‌شود می‌توان به‌عنوان دو عامل‌نما هر یک با دو سطح در نظر گرفت. به‌طورکلی، عاملی با 2^k سطح را می‌توان به‌صورت k عامل‌نما ـ هر یک با دو سطح تصور کرد. لذا، برای این‌گونه طرحها می‌توان روش یتس را به‌کار گرفت و با ترکیب مجموع

مربعات متناظر عامل‌نماها مجموع مربعات مربوط به اثرهای اصلی و اثرهای متقابل را برای عوامل اصلی به‌دست آورد. بااستفاده از داده‌های مسألهٔ ۸.۷ این تکنیک را اثبات کنید.

۱۸.۹ بااستفاده از الگوریتم یتس داده‌های مثال ۲.۹ را تحلیل کنید.

۱۹.۹ طرح تک‌تکراری 2^4 مثال ۲.۹ را در نظر بگیرید. گیریم پنج نقطه را در مرکز (۰،۰،۰،۰) اجرا کرده و پاسخهای زیر را مشاهده کرده باشیم: ۷۳، ۷۵، ۷۱، ۶۹، و ۷۶. در این آزمایش خمیدگی را آزمون کنید. نتایج را تعبیر نمایید.

۲۰.۹ **مقدار گمشده در عاملی 2^k**. در یک طرح 2^k بعید نیست که مشاهده‌ای بر اثر خطای وسیلهٔ اندازه‌گیری، عدم مشاهده یا ضایع‌شدن مورد، یا به دلیلی دیگر گمشده به‌حساب آید. اگر طرح nبار $(n > 1)$ تکرار شود در این‌صورت می‌توان از تکنیکهایی که در فصل هفتم به‌کار رفتند استفاده کرد. اما، برای طرحهای عاملی تکرارنشده $(n = 1)$ باید روشهای دیگری را به‌کار برد. یک روش منطقی برآوردکردن مقدار گمشده با استفاده از عددی است که مقابلهٔ اثر متقابل بالاترین مرتبه را صفر کند. برای آزمایش مثال ۲.۹ با قبول آنکه اجرای ab گمشده باشد از این تکنیک استفاده کنید. نتایج را با نتایج مثال ۲.۹ مقایسه کنید.

۱۰

مخلوط‌کردن در عاملی ۲^k

۱.۱۰ مقدمه

مسائل زیادی وجود دارند که برای آنها اجرای تکرار کامل طرح عاملی در یک بلوک، که در آن بلوک ممکن است یک روز، یک بستهٔ همگن از مواد خام، یک آزمایشگاه یا نظائر اینها باشد امکان‌پذیر نیست. مخلوط‌کردن، یک تکنیک طرح، برای آراستن آزمایش کامل عاملی در بلوکهاست، که در آن حجم بلوکی کوچکتر از تعداد ترکیبهای تیمار در یک تکرار است. به‌موجب این تکنیک اطلاعات راجع به بعضی اثرهای تیمار (معمولاً اثرهای متقابل مرتبهٔ بالا) از روی بلوکها غیرقابل تشخیص بوده یا با بلوکها مخلوط یا آمیخته می‌شود. در این فصل توجه خود را معطوف بر سیستمهای مخلوط‌کننده برای طرح عاملی ۲^k می‌کنیم. توجه کنید با اینکه طرحهای ارائه‌شده، به‌دلیل اینکه بلوکها شامل تمام تیمارها یا ترکیبهای تیمارها نیستند، ناکامل‌اند، مع‌هذا ساختار خاص سیستم عاملی ۲^k، روش ساده‌شده‌ای را برای تحلیل بلوکی مقدور می‌سازد. مانند فصل نهم با پذیرفتن اینکه تمام عوامل اثرهای تثبیت‌شده هستند مطلب را دنبال می‌کنیم.

ساخت و تحلیل طرح عاملی ۲^k را در ۲^p بلوک ناکامل بررسی می‌کنیم، که در آن $p < k$ است. در نتیجه این طرحها را می‌توان در دو بلوک، چهار بلوک، هشت بلوک و نظائر آن اجرا کرد.

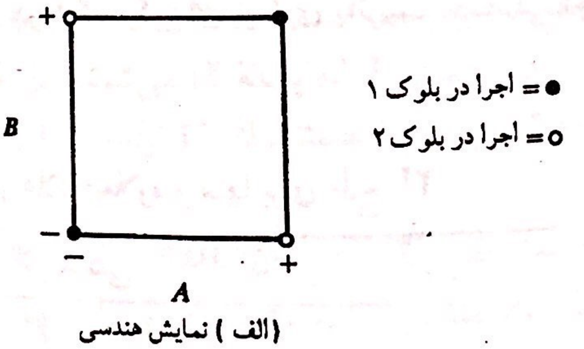
۲.۱۰ طرح عاملی ۲^k در دو بلوک

فرض کنید هریک از $۴ = ۲^۲$ ترکیب تیماری نیاز به مقداری مواد خام داشته باشند و مثلاً هر بستهٔ مواد خام تنها به‌اندازه‌ای باشد که بتوان با آن دو ترکیب تیماری را آزمون کرد. پس دو بسته مواد خام لازم است. اگر بسته‌های مواد خام را به‌عنوان بلوکها در نظر بگیریم، آنگاه باید به هر بلوک دو تا از چهار ترکیب تیماری را اختصاص دهیم. شکل ۱.۱۰، یک طرح ممکن را برای این مسأله نشان می‌دهد. نمایش هندسی شکل ۱.۱۰(الف) نشان می‌دهد که ترکیبهای تیماری روی دو قطر به بلوکهای متفاوت اختصاص یافته‌اند. توجه کنید که بنابر شکل ۱.۱۰ (ب) بلوک ۱ شامل ترکیبهای تیماری (۱) و ab و بلوک ۲ شامل ترکیبهای تیماری a و b است. البته ترتیبی که با آن، ترکیبهای تیماری را درون هر بلوک اجرا می‌کنیم به تصادف تعیین می‌شود. همچنین به‌تصادف تصمیم می‌گیریم که نخست با کدام بلوک طرح را اجرا کنیم. گیریم اثرهای اصلی A و B را درست به‌صورتی‌که هیچ‌گونه بلوکبندیی اتفاق نیفتاده باشد برآورد کرده باشیم. بنابر معادلات (۱.۹) و (۲.۹) به‌دست می‌آوریم

$$A = \frac{۱}{۲}[ab + a - b - (۱)]$$

$$B = \frac{۱}{۲}[ab + b - a - (۱)]$$

توجه کنید که بلوکبندی بر هر دو عامل A و B بی‌تأثیر است زیرا در هر برآورد، یک ترکیب تیماری بعلاوه و یک ترکیب تیماری منها از هر بلوک وجود دارد. یعنی هر تفاوتی بین بلوک ۱ و بلوک ۲ حذف می‌شود.



(الف) نمایش هندسی

بلوک ۱	بلوک ۲
(1)	a
ab	b

(ب) تخصیص چهار اجرا به دو بلوک

شکل ۱.۱۰ یک طرح $۲^۲$ در دو بلوک. (الف) نمایش هندسی. (ب) تخصیص چهار اجرا به دو بلوک.

حال اثر متقابل AB را در نظر می‌گیریم

$$AB = \frac{۱}{۲}[ab + (۱) - a - b]$$

چون دو ترکیب تیماری با علامت مثبت [(۱) و ab] در بلوک ۱ و دو ترکیب تیمار با علامت منفی [a و b] در بلوک ۲ قرار گرفته‌اند، اثر بلوکی و اثر متقابل AB یکسان‌اند. یعنی اثر متقابل AB با بلوکها مخلوط شده است.

دلیل این موضوع از جدول علائم بعلاوه و منها برای طرح $۲^۲$ مشهود است. این‌را بدواً به‌وسیلهٔ جدول ۲.۹ داده‌ایم، اما برای راحتی آن‌را در اینجا در جدول ۱.۱۰ تکرار کرده‌ایم. از روی این جدول می‌بینیم که تمام ترکیبهای تیماری که در AB علامت بعلاوه دارند به بلوک ۱ اختصاص یافته‌اند، در صورتی‌که تمام ترکیبهای تیماری که در AB علامت منها دارند به بلوک ۲ تخصیص یافته‌اند. از این روش می‌توان در مخلوط‌کردن هر اثر (A، B، یا AB) با بلوکها استفاده کرد. مثلاً اگر (۱) و b را به بلوک ۱ و a، و ab را به بلوک ۲ اختصاص دهیم آن‌گاه اثر اصلی A با بلوکها مخلوط می‌شود. معمولاً بزرگترین مرتبهٔ اثر متقابل را با بلوکها مخلوط می‌کنند.

از این شیوه می‌توان در مخلوط‌کردن هر طرح ۲^k در دو بلوک استفاده کرد. به‌عنوان دومین مثال، اجرای یک طرح $۲^۳$ را در دو بلوک در نظر بگیرید. فرض کنید بخواهیم اثر متقابل سه‌عاملی ABC را با بلوکها مخلوط کنیم. بنابر جدول علائم بعلاوه و منها که در جدول ۲.۱۰ نشان داده‌ایم، ترکیبهای تیماری در ABC را که علامت منها دارند به‌بلوک ۱ و آنهایی را که در ABC علامت بعلاوه دارند به بلوک ۲ اختصاص می‌دهیم. طرح نتیجه‌شده را در شکل ۲.۱۰ نشان داده‌ایم. بار دیگر تأکید می‌کنیم که درون هر بلوک ترکیبهای تیماری به‌ترتیب تصادفی اجرا می‌شوند.

جدول ۱.۱۰ جدول علائم بعلاوه و منها برای طرح $۲^۲$

ترکیب تیماری	اثر عاملی ۱	A	B	AB
(۱)	+	−	−	+
a	+	+	−	−
b	+	−	+	−
ab	+	+	+	+

جدول ۲.۱۰ جدول علائم بعلاوه و منها برای طرح 2^3

ترکیب تیماری	اثر عاملی							
	۱	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
(۱)	+	−	−	+	−	+	+	−
a	+	+	−	−	−	−	+	+
b	+	−	+	−	−	+	−	+
ab	+	+	+	+	−	−	−	−
c	+	−	−	+	+	−	−	+
ac	+	+	−	−	+	+	−	−
bc	+	−	+	−	+	−	+	−
abc	+	+	+	+	+	+	+	+

روشهای دیگر ساخت بلوکها. روش دیگری برای ساخت این‌گونه طرحها وجود دارد. در این روش از ترکیب خطی

$$L = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k \tag{۱.۱۰}$$

استفاده می‌کنیم، که در آن x_i سطح iامین عامل در یک ترکیب خاص تیمار و α_i نمای i امین عامل در اثری است که مخلوط می‌شود. برای سیستم 2^k، α_i برابر ۰ یا ۱ است و x_i در سطح پایین برابر صفر و در سطح بالا برابر یک است. معادلهٔ (۱.۱۰) را مقابلهٔ معرّف می‌گویند. ترکیبهای تیماری که موجب مقدار یکسان برای L (به پیمانهٔ ۲) می‌شوند، در یک بلوک قرار می‌گیرند. چون مقادیر ممکن L (به پیمانهٔ ۲) تنها ۰ و ۱ هستند، لذا 2^k ترکیب تیماری دقیقاً به دو بلوک اختصاص می‌یابند.

برای تشریح این رهیافت، طرح 2^3 را که در آن ABC با بلوکها مخلوط می‌شود در نظر بگیرید. در اینجا x_1 متناظر با A، x_2 متناظر با B، x_3 متناظر با C است، و $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$. پس مقابلهٔ معرّف متناظر با ABC، عبارت است از:

$$L = x_1 + x_2 + x_3$$

ترکیب تیماری (۱) به نماد (۱ ,۰)، به‌صورت ۰۰۰ نوشته می‌شود؛ بنابراین

$$L = 1(0) + 1(0) + 1(0) = 0 = 0 \quad (\text{به پیمانهٔ } 2)$$

همچنین ترکیب تیماری a، به‌صورت ۱۰۰ نوشته می‌شود که نتیجه می‌دهد

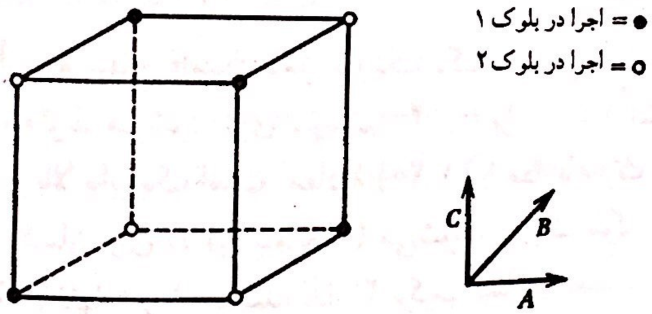
$$L = ۱(۱) + ۱(۰) + ۱(۰) = ۱ = ۱ \quad \text{(به پیمانهٔ ۲)}$$

پس، (۱) و a در بلوکهای متفاوت اجرا می‌شوند. برای بقیهٔ ترکیبهای تیماری داریم:

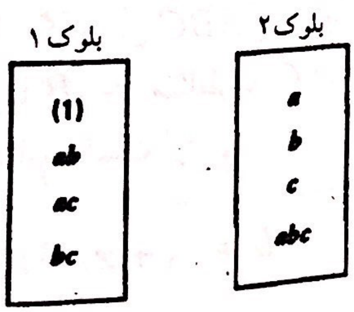
$$b : L = ۱(۰) + ۱(۱) + ۱(۰) = ۱ = ۱ \quad \text{(به‌پیمانهٔ ۲)}$$
$$ab : L = ۱(۱) + ۱(۱) + ۱(۰) = ۲ = ۰ \quad \text{(به‌پیمانهٔ ۲)}$$
$$c : L = ۱(۰) + ۱(۰) + ۱(۱) = ۱ = ۱ \quad \text{(به‌پیمانهٔ ۲)}$$
$$ac : L = ۱(۱) + ۱(۰) + ۱(۱) = ۲ = ۰ \quad \text{(به‌پیمانهٔ ۲)}$$
$$bc : L = ۱(۰) + ۱(۱) + ۱(۱) = ۲ = ۰ \quad \text{(به‌پیمانهٔ ۲)}$$
$$abc : L = ۱(۱) + ۱(۱) + ۱(۱) = ۳ = ۱ \quad \text{(به‌پیمانهٔ ۲)}$$

پس (۱)، ab، ac، و bc در بلوک ۱ و a، b، c، و abc در بلوک ۲ اجرا می‌شوند. این با طرحی که از جدول علائم بعلاوه و منها تولید شد و آن‌را در شکل ۲.۱۰ نشان داده‌ایم یکی است.

در ساخت این طرحها می‌توان از روش دیگری نیز استفاده کرد. بلوک شامل ترکیب تیماری (۱) را بلوک اصلی می‌نامیم. در این بلوک، ترکیبهای تیماری خاصیت مفید نظریه‌ای گروه را دارند.



(الف) نمایش هندسی



(ب) تخصیص هشت اجرا به دو بلوک

شکل ۲.۱۰ طرح 2^3 در دو بلوک با مخلوط‌شدن ABC. (الف) نمایش هندسی. (ب) تخصیص هشت اجرا به‌دو بلوک.

یعنی آنها نسبت به ضرب به پیمانهٔ دو تشکیل یک گروه می‌دهند. این دلالت می‌کند بر اینکه هر عنصر [بجز (۱)] در بلوک اصلی را می‌توان از ضرب به پیمانهٔ دوی دو عنصر دیگر بلوک اصلی به‌دست آورد. مثلاً، بلوک اصلی طرح 2^3 را با مخلوط‌شدن ABC، همان‌طورکه در شکل ۲.۱۰ نشان داده‌ایم در نظر بگیرید. توجه کنید که

$$ab \cdot ac = a^2bc = bc$$
$$ab \cdot bc = ab^2c = ac$$
$$ac \cdot bc = abc^2 = ab$$

در بلوک دیگر (یا بلوکهای دیگر) می‌توان از ضرب به پیمانهٔ دوی یک عنصر بلوک جدید در هر عنصر بلوک اصلی، ترکیبهای تیماری را به‌وجود آورد. برای طرح 2^3 با مخلوط‌شدن ABC، چون ترکیبهای تیماری بلوک اصلی (۱)، ab، ac، و bc هستند، می‌دانیم که b در بلوک دیگر قرار دارد. پس عناصر این بلوک دوم عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} b \cdot (1) &= b \\ b \cdot ab = ab^2 &= a \\ b \cdot ac &= abc \\ b \cdot bc = b^2c &= c \end{aligned}$$

که با نتایجی که قبلاً به‌دست آورده‌ایم مطابقت می‌کند.

برآورد خطا. وقتی تعداد متغیرها کم است، مثلاً $k = 2$ یا ۳، معمولاً برای به‌دست آوردن برآورد خطا لازم است که آزمایش تکرار شود. مثلاً، گیریم لازم باشد که یک عاملی 2^3 را با مخلوط‌شدن ABC در دو بلوک اجرا کنیم و آزمایشگر تصمیم بگیرد که طرح را چهار بار تکرار کند. طرح حاصل می‌تواند به‌صورت شکل ۳.۱۰ باشد. توجه کنید که در هر تکرار ABC مخلوط شده است.

تکرار I		تکرار II		تکرار III		تکرار IV	
بلوک ۱	بلوک ۲	بلوک ۱	بلوک ۲	بلوک ۱	بلوک ۲	بلوک ۱	بلوک ۲
(۱)	abc	(۱)	abc	(۱)	abc	(۱)	abc
ac	a	ac	a	ac	a	ac	a
ab	b	ab	b	ab	b	ab	b
bc	c	bc	c	bc	c	bc	c

شکل ۳.۱۰ چهار تکرار طرح 2^3 با مخلوط‌شدن ABC.

جدول ۳.۱۰ تحلیل واریانس برای چهار تکرار یک طرح 2^3 با مخلوط‌شدن ABC

منبع تغییر	درجات آزادی
تکرارها rep	۳
بلوکها (ABC)	۱
خطا برای ABC (تکرارها × بلوکها)	۳
A	۱
B	۱
C	۱
AB	۱
AC	۱
BC	۱
خطا (یا تکرارها × اثرها)	۱۸
کل	۳۱

$n_T - 1$
$n_B - 1$
$n_T \times n_B$

برای این طرح، تحلیل واریانس را در جدول ۳.۱۰ نشان داده‌ایم. ۳۲ مشاهده و کلاً ۳۱ درجهٔ آزادی موجود است. بعلاوه، چون هشت بلوک داریم باید ۷ درجهٔ آزادی به این بلوکها وابسته باشد. تفکیکی از این ۷ درجهٔ آزادی را در جدول ۳.۱۰ نشان داده‌ایم. مجموع مربعات خطا در واقع مرکب از اثرهای متقابل دوعاملی بین تکرارها و هریک از اثرهای (A, B, C, AB, AC, BC) است. معمولاً مطمئنتر این‌است که اثرهای متقابل را برابر صفر گرفته و میانگین مربع حاصل را به‌عنوان برآوردی از خطا در نظر بگیریم. اثرهای اصلی و اثرهای متقابل دوعاملی در برابر میانگین مربع خطا آزمون می‌شوند. ککران و کاکس (۱۹۵۷) می‌گویند میانگین مربع بلوکی یا ABC را می‌توان نسبت به میانگین مربع خطا برای ABC مقایسه کرد، که در واقع تکرارها × بلوکهاست. معمولاً این آزمون چندان حساس نیست.

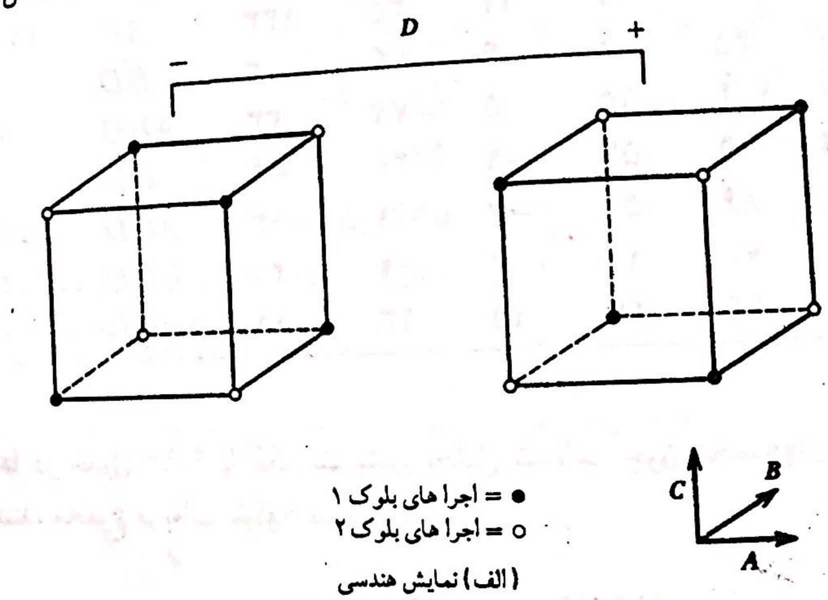
اگر برای تکرار طرحهای مخلوط‌شده منابع کافی در اختیار داشته باشیم، در این‌صورت معمولاً بهتر است که در هر تکرار از روش نسبتاً متفاوتی برای طرح بلوکها استفاده کنیم. روش، عبارت از آن‌است که در هر تکرار اثرهای متفاوتی مخلوط شوند به‌طوری که دربارهٔ تمامی اثرها اطلاعاتی در اختیار داشته باشیم. چنین شیوه‌ای را مخلوط‌کردن جزئی می‌گوییم و در بخش ۵.۱۰ از آن صحبت خواهیم کرد. اگر k نسبتاً بزرگ باشد، مثلاً $k \geq 4$، اغلب تنها می‌توانیم از عهدهٔ یک تک‌تکرار برآییم. آزمایشگر معمولاً می‌پذیرد که اثرهای متقابل مراتب بالاتر ناچیزند و مجموع مربعات آنها را برای به‌دست آوردن مجموع مربعات خطا در هم می‌آمیزد. در این مورد، نمودار احتمال نرمال اثرهای عاملی می‌تواند بسیار مفید باشد.

مثال ۱.۱۰

وضعیتی را در نظر بگیرید که شرح آن در مثال ۲.۹ گذشت. یادآور می‌شویم که چهار عامل دما (A)، فشار (B)، غلظت فرمالدئید (C)، و نرخ بهم‌زن (D) را برای تعیین اثرشان در نرخ تصفیه مورد مطالعه قرار دادیم. حال گیریم که تمامی $16 = 2^4$ ترکیب تیماری را نتوان در یک روز اجرا کرد. آزمایشگر می‌تواند در هر روز هشت ترکیب تیماری را اجرا کند، به‌طوری‌که طرح 2^4 که در دو بلوک مخلوط شده باشد به نظر مناسب برسد. منطقی است که اثر متقابل بالاترین مرتبه یعنی $ABCD$ را با بلوکها مخلوط کنیم. مقابلهٔ معرّف،

$$L = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

است و به‌سادگی قابل تحقیق است که طرح به‌صورتی است که در شکل ۴.۱۰ نشان داده‌ایم.



(الف) نمایش هندسی

بلوک ۱	بلوک ۲
(1) = ۴۵	a = ۷۱
ab = ۶۵	b = ۴۸
ac = ۶۰	c = ۶۸
bc = ۸۰	d = ۴۳
ad = ۱۰۰	abc = ۶۵
bd = ۴۵	bcd = ۷۰
cd = ۷۵	acd = ۸۶
abcd = ۹۶	abd = ۱۰۴

(ب) تخصیص ۱۶ اجرا به دو بلوک

شکل ۴.۱۰ طرح 2^4 در دو بلوک برای مثال ۱.۱۰ (الف) نمایش هندسی. (ب) تخصیص ۱۶ اجرا به دو بلوک.

جدول ۴.۱۰ الگوریتم یتس برای مثال ۱.۱۰

ترکیب تیماری	پاسخ	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	اثرها	مجموع مربعات
(۱)	۴۵	۱۱۶	۲۲۹	۵۰۲	۱۱۲۱	—	—
a	۷۱	۱۱۳	۲۷۳	۶۱۹	۱۷۳	A	۱۸۷۰٫۵۶۲۵
b	۴۸	۱۲۸	۲۹۲	۲۰	۲۵	B	۳۹٫۰۶۲۵
ab	۶۵	۱۴۵	۳۲۷	۱۵۳	۱	AB	۰٫۰۶۲۵
c	۶۸	۱۴۳	۴۳	۱۴	۷۹	C	۳۹۰٫۰۶۲۵
ac	۶۰	۱۴۹	−۲۳	۱۱	−۱۴۵	AC	۱۳۱۴٫۰۶۲۵
bc	۸۰	۱۶۱	۱۱۶	−۱۶	۱۹	BC	۲۲٫۵۶۲۵
abc	۶۵	۱۶۶	۳۷	۱۷	۱۵	ABC	۱۴٫۰۶۲۵
d	۴۳	۲۶	−۳	۴۴	۱۱۷	D	۸۵۵٫۵۶۲۵
ad	۱۰۰	۱۷	۱۷	۳۵	۱۳۳	AD	۱۱۰۵٫۵۶۲۵
bd	۴۵	−۸	۶	−۶۶	−۳	BD	۰٫۵۶۲۵
abd	۱۰۴	−۱۵	۵	−۷۹	۳۳	ABD	۶۸٫۰۶۲۵
cd	۷۵	۵۷	−۹	۲۰	−۹	CD	۵٫۰۶۲۵
acd	۸۶	۵۹	−۷	−۱	−۱۳	ACD	۱۰٫۵۶۲۵
bcd	۷۰	۱۱	۲	۲	−۲۱	BCD	۲۷٫۵۶۲۵
$abcd$	۹۶	۲۶	۱۵	۱۳	۱۱	$ABCD$	۷٫۵۶۲۵

داده‌ها در جدول ۴.۱۰ با الگوریتم یتس تحلیل شده‌اند. چون مجموعهای بلوکی ۵۶۶ و ۵۵۵ هستند، مجموع مربعات بلوکها عبارت‌اند از

$$SS_{\text{بلوکها}} = \frac{(۵۶۶)^۲ + (۵۵۵)^۲}{۸} - \frac{(۱۱۲۱)^۲}{۱۶} = ۷٫۵۶۲۵$$

که با مجموع مربعات برای $ABCD$ در جدول ۴.۱۰ برابر است.

مجموع مربعات برای اثرهای اصلی و اثرهای متقابل دو عاملی را مستقیماً از الگوریتم یتس گرفته‌ایم. نمودار احتمال نرمال اثرها معرف آن‌است که اثرهای متقابل سه‌عاملی ناچیزند، بنابراین مجموع مربعات خطا با چهار درجهٔ آزادی چنین است

$$\begin{aligned} SS_{\text{خطا}} &= SS_{ABC} + SS_{ABD} + SS_{ACD} + SS_{BCD} \\ &= ۱۴٫۰۶۲۵ + ۶۸٫۰۶۲۵ + ۱۰٫۵۶۲۵ + ۲۷٫۵۶۲۵ \\ &= ۱۲۰٫۲۵۰۰ \end{aligned}$$

جدول ۵.۱۰ تحلیل واریانس برای مثال ۱.۱۰

منبع تغییر	مجموع مربعات	درجات آزادی	میانگین مربعات	F.
بلوکها $(ABCD)$	۷٫۵۶۲۵	۱	—	—
A	۱۸۷۰٫۵۶۲۵	۱	۱۸۷۰٫۵۶۲۵	**۶۲٫۲۲
B	۳۹٫۰۶۲۵	۱	۳۹٫۰۶۲۵	۱٫۳۰
C	۳۹۰٫۰۶۲۵	۱	۳۹۰٫۰۶۲۵	*۱۲٫۹۸
D	۸۵۵٫۵۶۲۵	۱	۸۵۵٫۵۶۲۵	**۲۸٫۴۶
AB	۰٫۰۶۲۵	۱	۰٫۰۶۲۵	<1
AC	۱۳۱۴٫۰۶۲۵	۱	۱۳۱۴٫۰۶۲۵	**۴۳٫۷۱
AD	۱۱۰۵٫۵۶۲۵	۱	۱۱۰۵٫۵۶۲۵	**۳۶٫۷۸
BC	۲۲٫۵۶۲۵	۱	۲۲٫۵۶۲۵	<1
BD	۰٫۵۶۲۵	۱	۰٫۵۶۲۵	<1
CD	۵٫۰۶۲۵	۱	۵٫۰۶۲۵	<1
خطا (یا $ABC + ABD+$ $(ACD + BCD$	۱۲۰٫۲۵۰۰	۴	۳۰٫۰۶۲۵	
کل		۱۵		

* معنی‌دار در ۵ درصد.

** معنی‌دار در ۱ درصد.

تحلیل کامل واریانس را به‌اختصار در جدول ۵.۱۰ آورده‌ایم. برای جزئیات بیشتر شرح این آزمایش به مثال ۲.۹ رجوع کنید. ■

۳.۱۰ طرح عاملی 2^k در چهار بلوک

ساخت طرحهای عاملی 2^k که در چهار بلوک هریک با 2^{k-2} مشاهده مخلوط‌شده باشد امکان‌پذیر است. این طرحها به‌خصوص در وضعیتهایی که در آن تعداد عوامل نسبتاً بزرگ‌اند، مثلاً $k \geq 4$ و اندازه‌های بلوکی بالنسبه کوچک‌اند مفیدند.

مثلاً طرح 2^5 را در نظر بگیرید. اگر در هر بلوک تنها هشت اجرا منظور شود، آن‌گاه باید از چهار بلوک استفاده کنیم. ساخت این طرح نسبتاً سرراست است. دو اثر را که با بلوکها مخلوط

می‌شوند انتخاب می‌کنیم، مثلاً BCE و ~~BCD~~ ADE در ارتباط با این اثرها دو مقابلهٔ معرّف

$$L_1 = x_1 + x_4 + x_5$$
$$L_2 = x_2 + x_3 + x_5$$

هستند. حال هر ترکیب تیماری یک جفت مقادیر خاص را برای L_1 (به‌پیمانهٔ ۲) و L_2 (به‌پیمانهٔ ۲) نتیجه می‌دهد؛ یعنی (L_1, L_2) برابر یکی از مقادیر (۰، ۱) و (۱، ۰)، (۰، ۰)، یا (۱، ۱) است. ترکیبهای تیماری که مقادیر یکسانی برای (L_1, L_2) نتیجه می‌دهند به بلوکهایی یکسان اختصاص می‌یابند. در این مثال می‌بینیم که

برای: $(1), ad, bc, abcd, abe, ace, cde, bde$، $\quad L_1 = 0, L_2 = 0$

برای: $a, d, abc, bcd, be, abde, ce, acde$، $\quad L_1 = 1, L_2 = 0$

برای: $b, abd, c, acd, ae, de, abce, bcde$، $\quad L_1 = 0, L_2 = 1$

برای: $e, ade, bce, abcde, ab, bd, ac, cd$، $\quad L_1 = 1, L_2 = 1$

این ترکیبهای تیماری به بلوکهایی متفاوت اختصاص پیدا می‌کنند. طرح کامل را در شکل ۵.۱۰ نشان داده‌ایم.

با اندکی تفکر متوجه خواهیم شد که اثر دیگری علاوه بر ADE و BCE را باید با بلوکها مخلوط کرد. چون چهار بلوک با سه درجهٔ آزادی بین آنها در اختیار داریم، و چون ADE و BCE هر یک تنها یک درجهٔ آزادی دارند، به‌وضوح اثر دیگری با یک درجهٔ آزادی را باید مخلوط کرد. این اثر، اثر متقابل تعمیم‌یافتهٔ ADE و BCE است که با حاصلضرب ADE و BCE به‌پیمانهٔ ۲ تعریف می‌شود. پس در این مثال اثر متقابل تعمیم‌یافتهٔ $(ADE)(BCE) = ABCDE^2 = ABCD$ نیز با بلوکها مخلوط می‌شود. تحقیق این موضوع با مراجعه به‌جدول علائم بعلاوه و منها برای طرح

بلوک ۱ ($L_1 = 0$، $L_2 = 0$)		بلوک ۲ ($L_1 = 1$، $L_2 = 0$)		بلوک ۳ ($L_1 = 0$، $L_2 = 1$)		بلوک ۴ ($L_1 = 1$، $L_2 = 1$)	
(1)	abe	a	be	b	abce	e	abcde
ad	ace	d	abde	abd	ae	ade	bd
bc	cde	abc	ce	c	bcde	bce	ac
abcd	bde	bcd	acde	acd	de	ab	cd

شکل ۵.۱۰ طرح 2^5 در چهار بلوک با مخلوط‌شدن ADE، BCE، و $ABCD$.

۲۵، مثل آنچه در دیویس (۱۹۵۶) آمده است ساده است. بررسی چنین جدولی آشکار می‌کند که ترکیبهای تیماری که به‌بلوکها اختصاص پیدا می‌کنند به‌صورت زیرند:

ترکیبهای تیماری در	علامت ADE	علامت BCE	علامت $ABCD$
بلوک ۱	$-$	$-$	$+$
بلوک ۲	$+$	$-$	$-$
بلوک ۳	$-$	$+$	$-$
بلوک ۴	$+$	$+$	$+$

توجه کنید که حاصلضرب علامت هر دو اثر برای یک بلوک خاص (مانند، ADE و BCE) علامت اثر دیگر آن بلوک را نتیجه می‌دهد (در اینجا $ABCD$). پس ADE، BCE، و $ABCD$ تماماً با بلوکها مخلوط می‌شوند.

هنوز خواص نظری گروه در بلوک اصلی که در بخش ۲.۱۰ متذکر شدیم برقرار است. مثلاً می‌بینیم که حاصلضرب دو ترکیب تیماری در بلوک اصلی، عنصر دیگری از بلوک اصلی را به‌وجود می‌آورد. یعنی،

$$ad \cdot bc = abcd \quad \text{و} \quad abe \cdot bde = ab^2de^2 = ad$$

و الی آخر. برای ساخت بلوک دیگر، ترکیبی تیماری را که در بلوک اصلی نیست در نظر می‌گیریم (مثلاً، b) و b را در تمام ترکیبهای تیماری واقع در بلوک اصلی ضرب می‌کنیم. این نتیجه می‌دهد؛

$$b \cdot (1) = b \quad b \cdot ad = abd \quad b \cdot bc = c \quad b \cdot abcd = ab^2cd = acd$$

و الی آخر، که هشت ترکیب تیماری در بلوک ۳ هستند. در عمل، بلوک اصلی را می‌توان از روی مقابله‌های معرف و خاصیت نظری گروه به‌دست آورد، و دیگر بلوکها را می‌توان از این ترکیبهای تیماری به‌روشی که در بالا نشان دادیم تعیین کرد.

شیوهٔ کلی برای ساخت یک طرح 2^k که در چهار بلوک مخلوط شده است آن است که دو اثر را برای تولید بلوکها انتخاب کرده، به‌طرز خودکار اثر سوم را که اثر متقابل تعمیم یافتهٔ دو اثر اول است نیز مخلوط کنیم. سپس طرح با استفاده از دو مقابلهٔ معرف (L_1, L_2) و خواص نظری گروه بلوک اصلی ساخته می‌شود. باید در انتخاب اثرهایی که با بلوکها مخلوط می‌شوند جانب احتیاط را رعایت کرد تا طرح حاصل، اثرهایی را که ممکن است مورد توجه باشند مخلوط نکند. مثلاً در یک طرح 2^5 ممکن است $ABCDE$ و ABD را برای مخلوط شدن انتخاب کنیم که خودبه‌خود CE، یعنی اثری را که احتمالاً مورد نظر است نیز مخلوط می‌کند. یک انتخاب بهتر مخلوط‌کردن ADE و BCE است که خودبه‌خود $ABCD$ را مخلوط کند. از دست‌دادن اطلاع مربوط به‌اثرهای متقابل سه‌عاملی ADE و BCE به‌جای اثر متقابل دوعاملی CE ارجح است.

۴.۱۰ طرح عاملی 2^k در 2^p بلوک

می‌توان روشهایی را که در بالا شرح دادیم در ساخت یک طرح عاملی 2^k که با 2^p بلوک ($p < k$) مخلوط شده است تعمیم داد، که در آن هر بلوک درست شامل 2^{k-p} اجراست. p اثر مستقل را که مخلوط می‌شوند انتخاب می‌کنیم، که در آنها منظور از «مستقل» آن‌است که هیچ اثر منتخبی از متقابل تعمیم یافتهٔ بقیه نباشد. بلوکها را می‌توان با استفاده از p مقابلهٔ تعریف‌کننده $L_1, L_2, \ldots, L_p$ وابسته به‌این اثرها تولید کرد. بعلاوه دقیقاً $2^p - p - 1$ اثر دیگر با بلوکها مخلوط می‌شوند که اینها اثرهای متقابل تعمیم‌یافتهٔ آن p اثر مستقل‌اند که ابتدا انتخاب شده‌اند. در انتخاب اثرهایی که مخلوط می‌شوند باید جانب احتیاط را رعایت کرد به‌طوری که اطلاعاتی دربارهٔ اثرهایی که ممکن است بالقوه موردنظر باشند فدا نشوند.

تحلیل آماری این طرحها سرراست است. برای تمام اثرها مجموع مربعات را به‌صورتی که هیچ‌گونه بلوکبندیی اتفاق نیفتاده باشد محاسبه می‌کنیم. سپس، مجموع مربعات بلوکی از جمع تمام مجموع مربعات اثرهای مخلوط‌شده با بلوکها، به‌دست می‌آید.

به‌وضوح انتخاب p اثری که از آنها برای تولید بلوک استفاده می‌شود بحرانی است، زیرا که ساختار مخلوط‌کردن طرح مستقیماً بستگی به آنها دارد. جدول ۶.۱۰ فهرست طرحهای مفیدی را ارائه می‌دهد. در توضیح استفاده از این جدول فرض کنید بخواهیم یک طرح 2^6 بسازیم که در $8 = 2^3$ بلوک هریک با $8 = 2^3$ اجرا مخلوط شده باشد. جدول ۶.۱۰ معین می‌کند که $ABEF$، $ABCD$، و ACE را به‌عنوان $p = 3$ اثر مستقل در تولید بلوکها انتخاب کنیم. بقیهٔ $2^p - p - 1 = 2^3 - 3 - 1 = 4$ اثری که مخلوط شده‌اند اثرهای متقابل تعمیم‌یافتهٔ این سه اثر هستند؛ یعنی،

$$(ABEF)(ABCD) = A^2B^2CDEF = CDEF$$
$$(ABEF)(ACE) = A^2BCE^2F = BCF$$
$$(ABCD)(ACE) = A^2BC^2ED = BDE$$
$$(ABEF)(ABCD)(ACE) = A^3B^2C^2DE^2F = ADF$$

در مسألهٔ ۸.۱۰ از خواننده خواسته‌ایم که هشت بلوک این طرح را تعیین کند.

۵.۱۰ مخلوط‌کردن جزئی

در بخش ۲.۱۰ متذکر شدیم که آزمایشگران برای به‌دست آوردن برآورد خطا ناچارند طرح را تکرار کنند مگر اینکه برآوردی قبلی از خطا داشته باشند یا بخواهند بعضی اثرهای متقابل را ناچیز بشمرند. شکل ۳.۱۰ یک عاملی 2^3 را در دو بلوک با مخلوط شدن ABC نشان می‌دهد که چهار بار تکرار

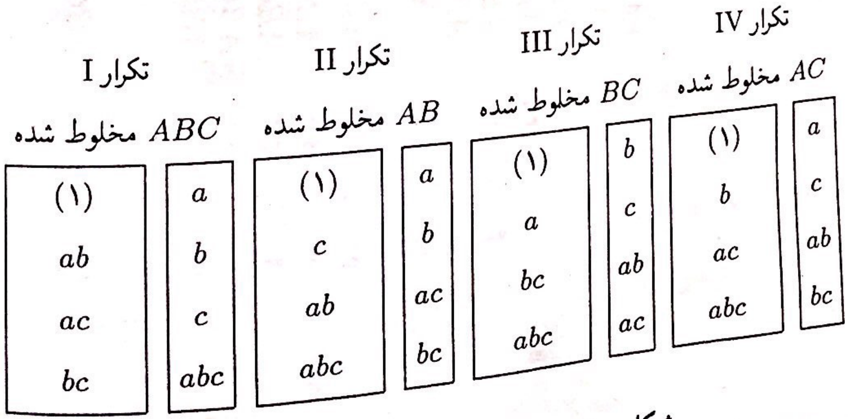
جدول ۶.۱۰ آرایشهای بلوکبندی پیشنهادی برای طرح عاملی 2^k

تعداد عوامل، k	تعداد بلوکها، 2^p	اندازهٔ بلوک، 2^{k-p}	اثرهای انتخاب‌شده برای تولید بلوکها	اثرهای متقابل مخلوط شده با بلوکها
۳	۲	۴	ABC	ABC
	۴	۲	AB, AC	AB, AC, BC
۴	۲	۸	$ABCD$	$ABCD$
	۴	۴	ABC, ACD	ABC, ACD, BD
	۸	۲	AB, BC, CD	$AB, BC, CD, AC, BD, AD, ABCD$
۵	۲	۱۶	$ABCDE$	$ABCDE$
	۴	۸	ABC, CDE	$ABC, CDE, ABDE$
	۸	۴	ABE, BCE, CDE	$ABE, BCE, CDE, AC, ABCD, BD, ADE$
	۱۶	۲	AB, AC, CD, DE	تمام اثرهای متقابل ۲ عاملی و ۴ عاملی (۱۵ اثر)
۶	۲	۳۲	$ABCDEF$	$ABCDEF$
	۴	۱۶	$ABCF, CDEF$	$ABCF, CDEF, ABDE$
	۸	۸	$ABEF, ABCD, ACE$	$ABEF, ABCD, ACE, BCF, BDE, CDEF, ADF$
	۱۶	۴	ABF, ACF, BDF, DEF	$ABE, ACF, BDF, DEF, BC, ABCD, ABDE, AD$, $ACDE, CE, BDF, BCDEF, ABCEF, AEF, BE$
	۳۲	۲	AB, BC, CD, DE, EF	تمام اثرهای متقابل ۲ عاملی، ۴ عاملی و ۶ عاملی (۳۱ اثر)
۷	۲	۶۴	$ABCDEFG$	$ABCDEFG$
	۴	۳۲	$ABCFG, CDEFG$	$ABCFG, CDEFG, ABDE$
	۸	۱۶	ABC, DEF, AFG	$ABC, DEF, AFG, ABCDEF, DCFG, ADEG, BCDEG$
	۱۶	۸	$ABCD, EFG, CDE, ADG$	$ABCD, EFG, CDE, ADG, ABCDEFG$, $ABE, BCG, CDFG, ADEF, ACEG, ABFG$, $BCEF, BDEG, ACF, BDF$
	۳۲	۴	ABG, BCG, CDG, DEG, EFG	$ABG, BCG, CDG, DEG, EFG, AC, BD$, $CE, DF, AE, BE, ABCD, ABDE, ABEF$, $BCDE, BCEF, CDEF, ABCDEFG$, $ADG, ACDEG, ACEFG, ABDFG$, $ABCEG, BEG, BDEFG, CFG$, $ADEF, ACDF, ABCF, AFG$
	۶۴	۲	AB, BC, CD, DE, EF, FG	تمام اثرهای متقابل ۲ عاملی، ۴ عاملی، و ۶ عاملی (۶۳ اثر)

است. متذکر می‌شویم که بنابر تحلیل واریانس این طرح که در جدول ۳.۱۰ نشان داده‌ایم شده است. متذکر می‌شویم که بنابر تحلیل واریانس این طرح که در جدول ۳.۱۰ نشان داده‌ایم اطلاعات مربوط به‌اثر متقابل ABC را نمی‌توان دوباره به‌دست آورد زیرا که ABC در هر تکرار با بلوکها مخلوط شده است. این طرح را کاملاً مخلوط‌شده می‌نامیم.

طرح دیگری را که در شکل ۶.۱۰ نشان داده‌ایم در نظر بگیرید. در اینجا باز هم در طرح ۲۳ چهار تکرار داریم، اما در هر تکرار اثرهای متقابل متفاوتی مخلوط شده‌اند. یعنی، ABC در تکرار I، AB در تکرار II، BC در تکرار III، و AC در تکرار IV مخلوط شده است. در نتیجه، اطلاعات مربوط به ABC را می‌توان از داده‌های موجود در تکرارهای II، III، و IV به‌دست آورد؛ اطلاعات مربوط به AB را می‌توان از تکرارهای I، III، IV؛ اطلاعات مربوط به AC را می‌توان از تکرارهای I، II، و III؛ و اطلاعات مربوط به BC را می‌توان از تکرارهای I، II، و IV به‌دست آورد. می‌گوییم سه‌چهارم اطلاعات مربوط به‌اثرهای متقابل را می‌توان به‌دست آورد زیرا آنها تنها در سه‌تکرار مخلوط نشده‌اند. یتس (۱۹۳۷) نسبت ۳/۴ را اطلاعات نسبی برای اثرهای مخلوط شده می‌نامد. می‌گوییم که این طرح به‌طور جزئی مخلوط شده است.

برای این طرح، تحلیل واریانس را در جدول ۷.۱۰ نشان داده‌ایم. در محاسبهٔ مجموعهای مربعات مربوط به‌اثرهای متقابل تنها از داده‌های مربوط به تکرارهایی که اثر متقابل در آن مخلوط نشده است استفاده کرده‌ایم. مجموع مربعات خطا عبارت است از: تکرارها × مجموع مربعات اثرهای اصلی بعلاوهٔ تکرارها × مجموع مربعات اثرهای متقابل برای هر تکرار که با آن اثر متقابل مخلوط نشده باشد (مثلاً، ABC برای تکرارهای II، III و IV× تکرارها). بعلاوه، بین هشت بلوک هفت درجهٔ آزادی وجود دارد. این هفت درجهٔ آزادی معمولاً به سه درجهٔ آزادی برای تکرارها و چهار درجهٔ آزادی برای بلوکها درون تکرارها افراز می‌شود. ترکیب مجموع مربعات برای بلوکها را در جدول ۷.۱۰ نشان داده‌ایم و مستقیماً از انتخاب اثر مخلوط‌شده در هر تکرار نتیجه می‌شود.



شکل ۶.۱۰ مخلوط کردن جزئی در طرح ۲۳.

جدول ۷.۱۰ تحلیل واریانس برای طرح مخلوط‌شدهٔ جزئی 2^3

درجات آزادی	منبع تغییر
۳	تکرارها
۴	بلوکهای درون تکرارها، یا [ABC(I تکرار) + AB(II تکرار) + BC(III تکرار) + AC(IV تکرار)]
۱	A
۱	B
۱	C
۱	AB (از تکرارهای I، III، و IV)
۱	AC (از تکرارهای I، II، و III)
۱	BC (از تکرارهای I، II، IV)
۱	ABC (از تکرارهای II، III، IV)
۱۷	خطا
۳۱	کل

مثال ۲.۱۰

یک طرح 2^3 با مخلوط‌کردن جزئی

مثال ۱.۹ را در نظر بگیرید، که در تعیین اثر درصد گاز کربنیک (A)، فشار دستگاه تزریق (B)، و سرعت تسمه نقاله (C) بر اندازهٔ ارتفاع سطح محلول داخل شیشه‌های نوشابه مطالعه می‌کند. گیریم هر میزان تهیهٔ شربت تنها به‌اندازه‌ای باشد که آزمون چهار ترکیب تیماری را ممکن سازد. پس، هر تکرار طرح 2^3 باید در دو بلوک اجرا شود. دو تکرار، اجراها هستند، با مخلوط‌شدن ABC در تکرار I و مخلوط‌شدن AB در تکرار II، داده‌ها به‌صورت زیرند:

تکرار I، ABC مخلوط‌شده		تکرار II، AB مخلوط‌شده	
$(1) = -3$	$a = 0$	$(1) = -1$	$a = 1$
$ab = 2$	$b = -1$	$c = 0$	$b = 0$
$ac = 2$	$c = -1$	$ab = 3$	$ac = 1$
$bc = 1$	$abc = 6$	$abc = 5$	$bc = 1$
۲	۴	۷	۳

مجموع مربعات برای A، B، C، AC، و BC را می‌توان به‌روش معمول حساب کرد. همچنان‌که در

جدول ۸.۱۰ الگوریتم یتس برای داده‌های مثال ۲.۱۰

ترکیب تیماری	پاسخ	(۱)	(۲)	(۳)	اثر	مجموع مربعات
(۱)	۴−	۳−	۱	۱۶	I	—
a	۱	۴	۱۵	۲۴	A	۳۶٫۰۰
b	۱−	۲	۱۱	۱۸	B	۲۰٫۲۵
ab	۵	۱۳	۱۳	۶	AB	مستقیماً محاسبه نمی‌شود
c	۱−	۵	۷	۱۴	C	۱۲٫۲۵
ac	۳	۶	۱۱	۲	AC	۰٫۲۵
bc	۲	۴	۱	۴	BC	۱٫۰۰
abc	۱۱	۹	۵	۴	ABC	مستقیماً محاسبه نمی‌شود

جدول ۸.۱۰ نشان داده‌ایم الگوریتم یتس را نیز می‌توان به‌کار برد. توجه کنید که در این جدول، محاسبهٔ مجموع مربعات برای AB و ABC انجام نشده است. باید SS_{ABC} را تنها با استفاده از داده‌های موجود در تکرار I و SS_{AB} را تنها با استفاده از داده‌های موجود در تکرار II به‌صورت زیر پیدا کرد:

$$SS_{ABC} = \frac{[a+b+c+abc-ab-ac-bc-(1)]^2}{n2^k}$$

$$= \frac{[1+0+0+5-3-1-1-(-1)]^2}{(1)(8)} = 0.50$$

$$SS_{AB} = \frac{[(1)+abc-ac+c-a-b+ab-bc]^2}{n2^k}$$

$$= \frac{[-3+6-2+(-1)-0-(-1)+2-1]^2}{(1)(8)} = 0.50$$

مجموع مربعات برای تکرارها به‌طور کلی چنین است،

$$SS_{\text{تکرارها}} = \sum_{h=1}^{n} \frac{R_h^2}{2^k} - \frac{y_{\cdots}^2}{N}$$

$$= \frac{(6)^2+(10)^2}{8} - \frac{(16)^2}{16} = 1.00$$

که در آن R_h مجموع مشاهدات در hامین تکرار است. مجموع مربعات بلوکی برابر مجموع SS_{ABC} از تکرار I و SS_{AB} از تکرار II است، یعنی $SS_{\text{بلوکها}} = 2.50$. تحلیل واریانس را به‌اختصار در جدول ۹.۱۰ آورده‌ایم. تمام اثرهای اصلی در یک درصد معنی دارند. ■

$df: 1 + 1 = 2$

$SSB_1 + SSB_2 = 0.5 + 2 = 2.5$

جدول ۹.۱۰ تحلیل واریانس برای مثال ۲.۱۰

منبع تغییر	مجموع مربعات	درجات آزادی	میانگین مربعات	F.
تکرارها	۱٫۰۰	۱	۱٫۰۰	—
بلوکهای درون تکرارها	۲٫۵۰	۲	۱٫۲۵	—
A	۳۶٫۰۰	۱	۳۶٫۰۰	۴۸٫۰۰*
B	۲۰٫۲۵	۱	۲۰٫۲۵	۲۷٫۰۰*
C	۱۲٫۲۵	۱	۱۲٫۲۵	۱۶٫۳۳*
AB (تنها تکرار I)	۰٫۵۰	۱	۰٫۵۰	۰٫۶۷
AC	۰٫۲۵	۱	۰٫۲۵	۰٫۳۳
BC	۱٫۰۰	۱	۱٫۰۰	۱٫۳۳
ABC (تنها تکرار II)	۰٫۵۰	۱	۰٫۵۰	۰٫۶۷
خطا	۳٫۷۵	۵	۰٫۷۵	—
کل	۷۸٫۰۰	۱۵	—	—

* در یک درصد معنی‌دار.

۶.۱۰ مسائل

۱.۱۰ داده‌های اولین تکرار مسألهٔ ۱.۹ را در نظر بگیرید. گیریم که تمام این مشاهدات را نتوان با استفاده از یک مواد خام اجرا کرد. برای اجرای این مشاهدات در دو بلوک هریک با چهار مشاهده و با مخلوط‌شدن ABC طرحی را پایه‌ریزی کنید. داده‌ها را تحلیل کنید.

۲.۱۰ داده‌های اولین تکرار مسألهٔ ۵.۹ را در نظر بگیرید. طرحی با دو بلوک هریک مشتمل بر هشت مشاهده با مخلوط‌شدن $ABCD$ بسازید. داده‌ها را تحلیل کنید.

۳.۱۰ مسألهٔ ۲.۱۰ را با قبول آنکه چهار بلوک لازم باشد تکرار کنید. ABD و ABC (و در نتیجه CD) را با بلوکها مخلوط کنید.

۴.۱۰ با استفاده از داده‌های طرح ۲۵ در مسألهٔ ۱۴.۹ طرحی در دو بلوک با مخلوط‌شدن $ABCDE$ با بلوکها بسازید و آن‌را تحلیل کنید.

۵.۱۰ مسألهٔ ۴.۱۰ را با قبول آنکه چهار بلوک لازم باشد تکرار کنید. الگوی مخلوط‌کردن معقولی را پیشنهاد کنید.

۶.۱۰ داده‌های طرح ۲۵ در مسألهٔ ۱۴.۹ را در نظر بگیرید. گیریم اجرای این طرح در چهار بلوک با مخلوط‌شدن $ACDE$ و BCD (و در نتیجه ABE) لازم باشد. داده‌های این طرح را تحلیل کنید.

۷.۱۰ آزمایشی را برای مخلوط‌کردن یک عاملی ۲۶ در چهار بلوک طرحریزی کنید. نحوهٔ

مخلوط‌کردن مناسبی را بجز آنچه در جدول ۶.۱۰ نشان داده‌ایم پیشنهاد کنید.

۸.۱۰ یک طرح 2^6 در هشت بلوک هریک با هشت اجرا را وقتی‌که $ABCD$، ACE، و $ABEF$ به‌عنوان اثرهای مستقل برای مخلوط‌شدن با بلوکها انتخاب شده باشند در نظر بگیرید. طرح را تولید کنید. اثرهای دیگری که با بلوکها مخلوط می‌شوند پیدا کنید.

۹.۱۰ یک طرح 2^2 در دو بلوک با مخلوط‌شدن AB را در نظر بگیرید. به‌طور جبری ثابت کنید که $SS_{AB} = SS_{\text{بلوکها}}$.

۱۰.۱۰ داده‌های مثال ۱.۱۰ را در نظر بگیرید. گیریم که تمام مشاهدات بلوک ۲ به‌اندازهٔ ۲۰ واحد افزایش یافته باشند. داده‌ها را تا حصول نتیجه تحلیل کنید. اثر بلوکی را برآورد کنید. آیا می‌توانید اندازهٔ آن‌را تعبیر کنید؟ آیا بلوکها در اینجا عاملی مهم به‌نظر می‌رسند؟ آیا تغییری که در داده‌ها داده‌اید با برآورد اثرهای دیگر برخورد داشته است؟

۱۱.۱۰ گیریم در مسألهٔ ۱.۹، ABC را در تکرار I، AB را در تکرار II، و BC را در تکرار III مخلوط کرده باشیم. جدول تحلیل واریانس را بسازید.

۱۲.۱۰ مسألهٔ ۱.۹ را با قبول آنکه در هر تکرار ABC با بلوکها مخلوط‌شده باشد تکرار کنید.

۱۳.۱۰ گیریم در مسألهٔ ۵.۹، $ABCD$ در تکرار I و ABC در تکرار II مخلوط شده باشند. تحلیل آماری این طرح را انجام دهید.

۱۴.۱۰ یک طرح 2^3 را با مخلوط‌شدن ABC در دو تکرار اول و مخلوط‌شدن BC در سومین تکرار بنا کنید. تحلیل واریانس را طرحریزی کرده و اطلاعات حاصل را تفسیر کنید.

۱۱

طرحهای عاملی کسری دوسطحی

۱.۱۱ مقدمه

با افزایش تعداد عوامل در یک طرح 2^k، تعداد اجراهای مورد نیاز برای پاسخ کامل طرح به‌سرعت زیاد می‌شود. مثلاً، اخذ پاسخ کامل طرح 2^6 نیاز به ۶۴ اجرا دارد. در این طرح تنها ۶ درجهٔ آزادی از ۶۳ درجهٔ آزادی مربوط به اثرهای اصلی و تنها ۱۵ درجهٔ آزادی مربوط به اثرهای متقابل دوعاملی است. بقیهٔ ۴۲ درجهٔ آزادی مربوط به‌اثرهای متقابل سه‌عاملی و بالاتر است.

اگر آزمایشگر به‌گونه‌ای معقول بتواند ناچیز بودن بعضی اثرهای متقابل مرتبهٔ بالا را بپذیرد، آن‌گاه می‌تواند اطلاعات مربوط به‌اثرهای اصلی و اثرهای متقابل مرتبهٔ پایین را تنها با اجرای کسری از آزمایش عاملی کامل به‌دست آورد. این طرحهای عاملی کسری در زمرهٔ بیشترین انواع طرحهایی هستند که برای فرایند طرح و تولید و برای فرایند رفع اشتباهها از آن استفاده می‌شود.

کاربرد عمدهٔ عاملیهای کسری در آزمایشهای جداسازی است. اینها آزمایشهایی هستند که در آنها عوامل زیادی با هدف شناسایی آن عواملی که (درصورت وجود) اثر عمده دارند بررسی می‌شوند. آزمایشهای جداسازی معمولاً در مراحل اولیهٔ طرح، وقتی احتمالاً در ابتدا تصور می‌کنیم که عوامل زیادی در پاسخ بی‌اثر یا کم‌اثرند، انجام می‌گیرند. سپس در آزمایشهای بعدی، عواملی که معلوم می‌شود مهم‌اند دقیقتر بررسی می‌شوند.

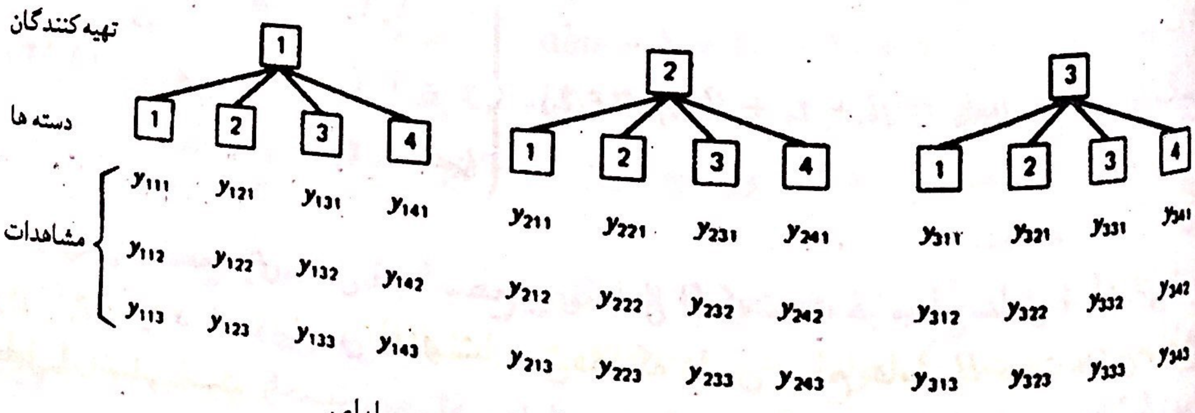
استفادهٔ موفقیت‌آمیز از طرحهای عاملی کسری مبتنی بر سه ایدهٔ کلیدی زیر است:

۱۳

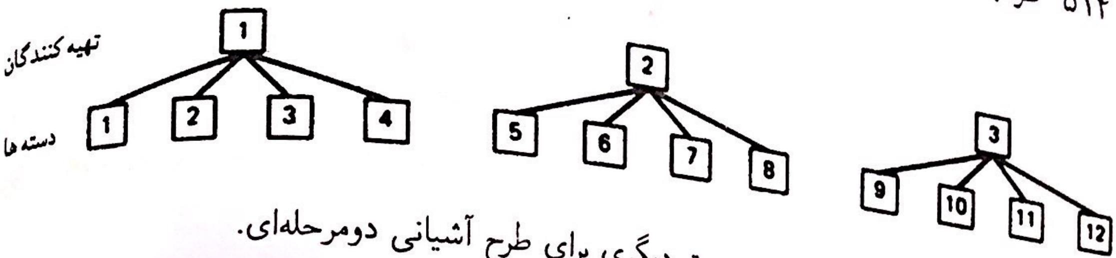
طرحهای آشیانی یا سلسله مراتبی

۱.۱۳ مقدمه

دربعضی آزمایشهای چندعاملی سطوح یک عامل (مثلاً، عامل B) متشابه‌اند اما همانند با سطوح مختلف عوامل دیگر (مثلاً، A) نیستند. چنین آرایشی را با سطوح عامل B که تحت سطوح عامل A قرارگرفته‌اند طرح آشیانی یا سلسله مراتبی می‌نامیم. مثلاً، شرکتی را در نظر بگیرید که مواد خام مورد نیاز خود را از سه تهیه کننده متفاوت خریداری می‌کند. شرکت می‌خواهد همانندی میزان خالصی مواد خام خریداری شده از تهیه کنندگان متفاوت را بررسی کند. هر تهیه‌کننده چهار دسته مواد خام را عرضه کرده است و از هر دسته سه بار میزان خالصی تعیین شده است. وضعیت را در شکل ۱.۱۳ توضیح داده‌ایم.



شکل ۱.۱۳ یک طرح آشیانی دو مرحله‌ای.



شکل ۲.۱۳ صورت دیگری برای طرح آشیانی دومرحله‌ای.

این یک طرح آشیانی یا سلسله مراتبی دو مرحله‌ای است، که دسته‌ها تحت عنوان تهیه‌کنندگان آشیانی شده‌اند. در نظر اول ممکن است بپرسید چرا دو عامل تهیه‌کننده و دسته‌ها را به‌صورت تقاطعی در نظر نگرفته‌ایم. اگر عوامل را به صورت تقاطعی درنظر می‌گرفتیم، آن‌گاه همیشه دستهٔ ۱ به همان دستهٔ ۱، دستهٔ ۲ همیشه به همان دستهٔ ۲، و الی آخر اطلاق می‌شد. حال آنکه به وضوح این وضعیت مورد نظر نیست. زیرا که برای هر تهیه کننده دسته‌های مربوط به آن تهیه‌کننده یکتاست یعنی، دستهٔ ۱ مربوط به تهیه‌کنندهٔ اول ارتباطی به دستهٔ ۱ مربوط به تهیه‌کنندهٔ دوّم ندارد، دستهٔ ۲ مربوط به تهیه‌کنندهٔ اول ارتباطی به دستهٔ ۲ مربوط به تهیه کنندهٔ دوم ندارد والی آخر. برای تأکید این واقعیت که دسته‌ها برای هر تهیه‌کننده دسته‌های متفاوت‌اند، می‌توانیم همان‌طورکه در شکل ۲.۱۳ نشان داده‌ایم دسته‌های مربوط به تهیه‌کنندهٔ اول را با ۱، ۲، ۳، و ۴، دسته‌های مربوط به تهیه کنندهٔ دوم را با ۵، ۶، ۷، و ۸، و دسته‌های مربوط به تهیه‌کنندهٔ سوم را با اعداد ۹، ۱۰، ۱۱، و ۱۲ شماره‌گذاری کنیم.

گاهی ممکن است در اینکه آیا عوامل را به صورت تقاطعی یا آشیانی در نظر بگیریم تردید کنیم. اگر بتوانیم عامل را به دلخواه مانند شکل ۲.۱۳ شماره‌گذاری نماییم آن‌گاه عوامل را به صورت آشیانی درنظر می‌گیریم.

۲.۱۳ طرح آشیانی دومرحله‌ای

۱.۲.۱۳ تحلیل آماری

مدل خطی آماری برای طرح آشیانی دومرحله‌ای به صورت

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_{j(i)} + \epsilon_{(ij)k} \begin{cases} i = ۱, ۲, \ldots, a \\ j = ۱, ۲, \ldots, b \\ k = ۱, ۲, \ldots, n \end{cases} \qquad (۱.۱۳)$$

است، یعنی a سطح برای عامل A، b سطح برای عامل B که تحت هر سطح عامل A آشیانی‌اند، و n تکرار وجود دارند. زیرنویس $j(i)$ نشان می‌دهد که jامین سطح عامل B تحت iامین سطح عامل A آشیانی است. راحت‌تر است تکرارها را درون ترکیب سطوح A و B آشیانی درنظر بگیریم؛

پس برای جملهٔ خطا از زیرنویس $(ij)k$ استفاده می‌کنیم. این یک طرح آشیانی متعادل است زیرا تعداد سطوح B درون هر سطح A مساوی است و تعداد تکرارها نیز برابرند. چون هر سطح عامل B با هر سطح عامل A با هم ظاهر نمی‌شوند، لذا اثر متقابل بین A و B می‌تواند موجود نباشد. می‌توان کل مجموع مربعات تصحیح شده را به صورت؛

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk}-\overline{y}_{...})^2$$
$$=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}[(\overline{y}_{i..}-\overline{y}_{...})+(\overline{y}_{ij.}-\overline{y}_{i..})+(y_{ijk}-\overline{y}_{ij.})]^2 \quad (۲.۱۳)$$

نوشت. با بسط طرف راست معادلهٔ (۲.۱۳) نتیجه می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk}-\overline{y}_{...})^2 = bn\sum_{i=1}^{a}(\overline{y}_{i..}-\overline{y}_{...})^2 + n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\overline{y}_{ij.}-\overline{y}_{i..})^2$$
$$+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk}-\overline{y}_{ij.})^2 \quad (۳.۱۳)$$

زیراکه سه جملهٔ حاصلضرب تقاطعی صفرند. معادلهٔ (۳.۱۳) نشان می‌دهد که کل مجموع مربعات را می‌توان به مجموع مربعات مربوط به عامل A، مجموع مربعات مربوط به عامل B تحت سطوح A، و مجموع مربعات ناشی از خطا افراز کرد. به طور نمادی، می‌توان معادلهٔ (۳.۱۳) را به صورت؛

$$SS_{\text{کل}} = SS_A + SS_{B(A)} + SS_{\text{خطا}} \quad (۴.۱۳)$$

نوشت. $abn-1$ درجهٔ آزادی برای $SS_{\text{کل}}$، $a-1$ درجهٔ آزادی برای SS_A، $a(b-1)$ درجهٔ آزادی برای $SS_{B(A)}$، و $ab(n-1)$ درجهٔ آزادی برای خطا وجود دارد. توجه کنید که $abn-1=(a-1)+a(b-1)+ab(n-1)$. اگر خطاها $\text{NID}(0,\sigma^2)$ باشند، می‌توان هریک از مجموع مربعات طرف راست معادلهٔ (۴.۱۳) را بر درجهٔ آزادی آن تقسیم کرده و میانگین مربعات مستقل و همتوزیع به دست آورد، به طوری که خارج قسمت هر دو میانگین مربعات به صورت F توزیع شود.

آمارهٔ مناسب برای آزمون اثرهای عوامل A و B وابسته به آن است که عوامل A و B تثبیت شده یا تصادفی باشند. اگر عوامل A و B تثبیت شده باشند، می‌پذیریم که $\sum_{i=1}^{a}\tau_i=0$ و $\sum_{j=1}^{b}\beta_{j(i)}=0\ (i=1,2,\dots,a)$ است. یعنی، مجموع اثرهای تیمار A برابر صفر، و مجموع اثرهای تیمار B درون هر سطح A نیز برابر صفر است. اگر A و B تصادفی باشند، آن‌گاه می‌پذیریم

جدول ۱.۱۳ امید ریاضی میانگین مربعات در طرح آشیانی دو مرحله‌ای

$E(MS)$	A تثبیت شده B تثبیت شده	A تثبیت شده B تصادفی	A تصادفی B تصادفی
$E(MS_A)$	$\sigma^2 + \frac{bn\sum \tau_i^2}{a-1}$	$\sigma^2 + n\sigma_\beta^2 + \frac{bn\sum \tau_i^2}{a-1}$	$\sigma^2 + n\sigma_\beta^2 + bn\sigma_\tau^2$
$E(MS_{B(A)})$	$\sigma^2 + \frac{n\sum\sum \beta_{j(i)}^2}{a(b-1)}$	$\sigma^2 + n\sigma_\beta^2$	$\sigma^2 + n\sigma_\beta^2$
$E(MS_{\text{خطا}})$	σ^2	σ^2	σ^2

که τ_i، $\mathrm{NID}(0, \sigma_\tau^2)$ و $\beta_{j(i)}$، $\mathrm{NID}(0, \sigma_\beta^2)$ هستند. با مدلهای آمیخته وقتی A تثبیت شده و B تصادفی است نیز زیاد مواجه می‌شویم. می‌توان امید ریاضی میانگین مربعات را با کاربرد سرراست از قواعد فصل هشتم تعیین کرد. جدول ۱.۱۳ امید ریاضی میانگین مربعات را برای این وضعیتها می‌دهد.

جدول ۱.۱۳ نشان می‌دهد که اگر سطوح A و B تثبیت شده باشند، آن‌گاه $H_0 : \tau_i = 0$ به وسیلهٔ $MS_A/MS_{\text{خطا}}$ و $H_0 : \beta_{j(i)} = 0$ به وسیلهٔ $MS_{B(A)}/MS_{\text{خطا}}$ آزمون می‌شود. اگر عامل A تثبیت شده و B تصادفی باشد، آن‌گاه $H_0 : \tau_i = 0$ به وسیلهٔ $MS_A/MS_{B(A)}$ و $H_0 . \sigma_B^2 = 0$ به وسیلهٔ $MS_{B(A)}/MS_{\text{خطا}}$ آزمون می‌شود. بالاخره، اگر هر دو عامل A و B تصادفی باشند، $H_0 : \sigma_\tau^2 = 0$ را به وسیلهٔ $MS_A/MS_{B(A)}$ و $H_0 : \sigma_\beta^2 = 0$ را به وسیلهٔ $MS_{B(A)}/MS_{\text{خطا}}$ آزمون می‌کنیم. شیوهٔ انجام آزمون در یک جدول تحلیل واریانس

جدول ۲.۱۳ جدول تحلیل واریانس برای طرح آشیانی دومرحله‌ای

منبع تغییر	مجموع مربعات	درجات آزادی	میانگین مربعات
A	$\sum_i \frac{y_{i..}^2}{bn} - \frac{y_{...}^2}{abn}$	$a-1$	MS_A
B درون A	$\sum_i\sum_j \frac{y_{ij.}^2}{n} - \sum_i \frac{y_{i..}^2}{bn}$	$a(b-1)$	$MS_{B(A)}$
خطا	$\sum_i\sum_j\sum_k y_{ijk}^2 - \sum_i\sum_j \frac{y_{ij.}^2}{n}$	$ab(n-1)$	$MS_{\text{خطا}}$
کل	$\sum_i\sum_j\sum_k y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$	$abn-1$	

به صورتی که در جدول ۲.۱۳ نشان داده‌ایم خلاصه می‌شود. فرمولهای محاسبه کنندهٔ مجموع مربعات را می‌توان با بسط کمیتهای موجود در معادلهٔ (۳.۱۳) و ساده‌کردن آنها به دست آورد. آنها عبارت‌اند از

$$SS_A = \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i..}^2}{bn} - \frac{y_{...}^2}{abn} \tag{۵.۱۳}$$

$$SS_{B(A)} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \frac{y_{ij.}^2}{n} - \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i..}^2}{bn} \tag{۶.۱۳}$$

$$SS_{\text{خطا}} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \frac{y_{ij.}^2}{n} \tag{۷.۱۳}$$

$$SS_{\text{کل}} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn} \tag{۸.۱۳}$$

می‌بینیم که معادلهٔ (۶.۱۳) مربوط به $SS_{B(A)}$ را می‌توان به صورت؛

$$SS_{B(A)} = \sum_{i=1}^{a} \left[\sum_{j=1}^{b} \frac{y_{ij.}^2}{n} - \frac{y_{i..}^2}{bn}\right]$$

نوشت. این عبارت مبین این مطلب است که از جمع مجموع مربعات بین سطوح B برای هر عامل A روی تمام سطوح A، $SS_{B(A)}$ حاصل می‌شود.

مثال ۱.۱۳

شرکتی را که در بخش ۱.۱۳ وضعیت آن را شرح دادیم در نظر بگیرید که بسته‌های مواد خام را از تهیه کنندگان مختلف خریداری می‌کند. میزان خالصی این مواد خام به صورتی قابل ملاحظه در تغییر است و در نتیجه مسائلی را در ساخت محصولات شرکت به وجود آورده است. می‌خواهیم معلوم کنیم که آیا تغییرپذیری میزان خالصی مواد خام مربوط به تهیه‌کنندگان مختلف است یا نه. از هر تهیه کننده چهار دسته مواد خام را به تصادف انتخاب کرده، و از هر دسته سه‌بار میزان خالصی را تعیین کرده‌ایم. البته، این طرح، طرح آشیانی دو مرحله‌ای است. داده‌ها را بعد از کدبندی آنها، با کم‌کردن هر یک از عدد ۹۳، در جدول ۳.۱۳ نشان داده‌ایم. مجموع مربعات به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

جدول ۳.۱۳ داده‌های کدبندی شدهٔ میزان خالصی برای مثال ۱.۱۳ (۹۳- میزان خالصی = y_{ijk})

	تهیه کنندهٔ ۱				تهیه کنندهٔ ۲				تهیه‌کنندهٔ ۳			
دسته‌ها	۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴
	۱	−۲	−۲	۱	۱	۰	−۱	۰	۲	−۲	۱	۳
	−۱	−۳	۰	۴	−۲	۴	۰	۳	۴	۰	−۱	۲
	۰	−۴	۱	۰	−۳	۲	−۲	۲	۰	۲	۲	۱
$y_{ij.}$ مجموع دسته‌ها	۰	−۹	−۱	۵	−۴	۶	−۳	۵	۶	۰	۲	۶
$y_{i..}$ مجموع مربوط به تهیه‌کنندگان	−۵				۴				۱۴			

$$SS_{\text{کل}} = \sum_{i=۱}^{a}\sum_{j=۱}^{b}\sum_{k=۱}^{n} y_{ijk}^۲ - \frac{y_{...}^۲}{abn}$$

$$= ۱۵۳٫۰۰ - \frac{(۱۳)^۲}{۳۶} = ۱۴۸٫۳۱$$

$$SS_A = \sum_{i=۱}^{a} \frac{y_{i..}^۲}{bn} - \frac{y_{...}^۲}{abn}$$

$$= \frac{(-۵)^۲ + (۴)^۲ + (۱۴)^۲}{(۴)(۳)} - \frac{(۱۳)^۲}{۳۶}$$

$$= ۱۹٫۷۵ - ۴٫۶۹ = ۱۵٫۰۶$$

$$SS_{B(A)} = \sum_{i=۱}^{a}\sum_{j=۱}^{b} \frac{y_{ij.}^۲}{n} - \sum_{i=۱}^{a} \frac{y_{i..}^۲}{bn}$$

$$= \frac{(۰)^۲ + (-۹)^۲ + (-۱)^۲ + \cdots + (۲)^۲ + (۶)^۲}{۳} - ۱۹٫۷۵$$

$$= ۸۹٫۶۷ - ۱۹٫۷۵ = ۶۹٫۹۲$$

و

$$SS_{\text{خطا}} = \sum_{i=۱}^{a}\sum_{j=۱}^{b}\sum_{k=۱}^{n} y_{ijk}^۲ - \sum_{i=۱}^{a}\sum_{j=۱}^{b} \frac{y_{ij.}^۲}{n}$$

$$= ۱۵۳٫۰۰ - ۸۹٫۶۷ = ۶۳٫۳۳$$

تحلیل واریانس را در جدول ۴.۱۳ خلاصه کرده‌ایم. تهیه‌کنندگان، تثبیت شده و دسته‌ها تصادفی‌اند، بنابراین امید ریاضی میانگین مربعات از ستون وسطی جدول ۱.۱۳ به دست می‌آیند. برای راحتی آنها را در جدول ۴.۱۳ تکرار کرده‌ایم. تحلیل واریانس نشان می‌دهد که در سطح ۵ درصد اثری معنی‌دار در میزان خالصی مواد خام مربوط به تهیه‌کنندگان وجود ندارد امّا به صورتی معنی‌دار

جدول ۴.۱۳ تحلیل واریانس برای داده‌های مثال ۱.۱۳

منبع تغییر	مجموع مربعات	درجات آزادی	میانگین مربعات	امید ریاضی میانگین مربعات	F.
تهیه‌کنندگان	۱۵٫۰۶	۲	۷٫۵۳	$\sigma^2 + 3\sigma_\beta^2 + 6\sum \tau_i^2$	۰٫۹۷
دسته‌ها (درون تهیه‌کنندگان)	۶۹٫۹۲	۹	۷٫۷۷	$\sigma^2 + 3\sigma_\beta^2$	۲٫۹۴*
خطا	۶۳٫۳۳	۲۴	۲٫۶۴	σ^2	
کل	۱۴۸٫۳۱	۳۵			

* معنی‌دار در سطح ۵ درصد.

میزان خالصی دسته‌های مواد خام تهیه‌کنندگان متفاوت است. ■

استنباطهای واقعی از این آزمایش و تحلیل آن بسیار مهم‌اند. هدف آزمایشگر یافتن منبع تغییرپذیری میزان خالصی مواد خام است. اگر این، از متفاوت بودن تهیه‌کنندگان نتیجه شود، آنگاه می‌توان مسأله را با انتخاب «بهترین» تهیه‌کننده حل کرد. امّا، چنین راه حلی در اینجا بی‌مورد است زیرا منبع عمدهٔ تغییرپذیری تغییر میزان خالصی از یک دسته به دستهٔ دیگر در داخل تهیه‌کنندگان است. بنابراین، باید مسأله را با ترغیب تهیه‌کنندگان به تقلیل تغییرپذیری دسته‌ها حل کرد. این موضوع می‌تواند متضمن اصلاحات در فرایندهای تولید تهیه‌کنندگان یا سیستم اطمینان از کیفیت داخلی آنها باشد.

توجه کنید که چه اتفاقی می‌افتد اگر به غلط این طرح را به صورت آزمایش عاملی با دو عامل تحلیل کنیم. اگر دسته‌ها را با تهیه‌کنندگان به صورت تقاطعی در نظر بگیریم در این صورت در خانه‌های دسته ضربدر تهیه‌کنندگان که مشتمل بر سه تکرارند، مجموعهای دسته‌ای را برابر ۲، ۳-، ۲-، و ۱۶ به دست می‌آوریم. پس می‌توانیم مجموع مربعات مربوط به دسته‌ها و مجموع مربعات اثر متقابل را محاسبه کنیم. تحلیل واریانس عاملی کامل را در جدول ۵.۱۳ نشان داده‌ایم. این تحلیل نشان می‌دهد که دسته‌ها به صورتی معنی‌دار در سطح ۵ درصد متفات‌اند و اثر

جدول ۵.۱۳ تحلیل نادرست طرح آشیانی دومرحله‌ای در مثال ۱.۱۳ به صورت عاملی. (تهیه‌کنندگان تثبیت شده، و دسته‌ها تصادفی‌اند.)

منبع تغییر	مجموع مربعات	درجات آزادی	میانگین مربعات	F.
تهیه‌کنندگان (ت)	۱۵٫۰۶	۲	۷٫۵۳	۱٫۰۲
دسته‌ها (د)	۲۵٫۶۴	۳	۸٫۵۵	۳٫۲۴*
اثر متقابل (د× ت)	۴۴٫۲۸	۶	۷٫۳۸	۲٫۸۰*
خطا	۶۳٫۳۳	۲۴	۲٫۶۴	
کل	۱۴۸٫۳۱	۳۵		

* در پنج درصد معنی‌دار.

متقابل معنی‌دار بین دسته‌ها و تهیه‌کنندگان وجود دارد. امّا ارائهٔ تفسیر عملی اثر متقابل دسته‌ها × تهیه‌کنندگان مشکل است. مثلاً، آیا این اثر متقابل معنی‌دار به این معنی است که اثر تهیه‌کننده از یک دسته به دستهٔ دیگر ثابت نیست؟ بعلاوه، اثر متقابل معنی‌دار که با اثر غیر معنی‌دار تهیه‌کننده جفت شده است می‌تواند تحلیلگر را به این نتیجه‌گیری هدایت کند که تهیه‌کنندگان واقعاً متفاوت‌اند امّا اثر آنها به وسیلهٔ اثر متقابل معنی‌دار پوشیده مانده است.

با مقایسهٔ جداول ۴.۱۳ و ۵.۱۳ توجه کنید که،

$$SS_{\text{د}} + SS_{\text{ت}\times\text{د}} = ۲۵٫۶۴ + ۴۴٫۲۸ = ۶۹٫۹۲ = SS_{\text{د(ت)}}$$

یعنی، مجموع مربعات برای دسته‌ها، درون تهیه‌کنندگان، مرکب از مجموع مربعات دسته‌ها و مجموع مربعات اثر متقابل دسته‌ها × تهیه‌کنندگان است. درجات آزادی نیز همین خاصیت را دارند؛ یعنی

$$\frac{\text{دسته‌ها درون تهیه‌کنندگان}}{۹} = \frac{\text{تهیه‌کنندگان} \times \text{دسته‌ها}}{۶} + \frac{\text{دسته‌ها}}{۳}$$

بنابراین، می‌توانیم از برنامهٔ کامپیوتری تحلیل طرحهای عاملی برای تحلیل طرحهای آشیانی با ادغام‌کردن «اثر اصلی» عامل آشیانی و اثرهای متقابل آن عامل با عاملی که تحت آن این عامل آشیان گرفته است نیز استفاده کنیم. این اطلاع مفیدی است، زیرا ممکن است برنامه‌های کامپیوتری که مشخصاً برای تحلیل طرحهای آشیانی نوشته شده‌اند به سهولت در اختیار نباشند، در صورتی که برای تحلیل طرحهای عاملی برنامه‌های زیادی در اختیارند.

۲.۲.۱۳ بازبینی تشخیصی

ابزار عمدهٔ مورد استفاده در بازبینی تشخیصی، تحلیل مانده‌هاست. برای طرح آشیانی دومرحله‌ای، مانده‌ها عبارت‌اند از:

$$e_{ijk} = y_{ijk} - \hat{y}_{ijk}$$

اما، مقدار برازانده شده،

$$\hat{y}_{ijk} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\beta}_{j(i)}$$

است و همچنانکه بعداً در بخش ۳.۲.۱۳ نشان خواهیم داد،

$$\hat{y}_{ijk} = \overline{y}_{...} + (\overline{y}_{i..} - \overline{y}_{...}) + (\overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{i..})$$
$$= \overline{y}_{ij.}$$

پس مانده‌ها عبارت‌اند از

$$e_{ijk} = y_{ijk} - \overline{y}_{ij.}$$

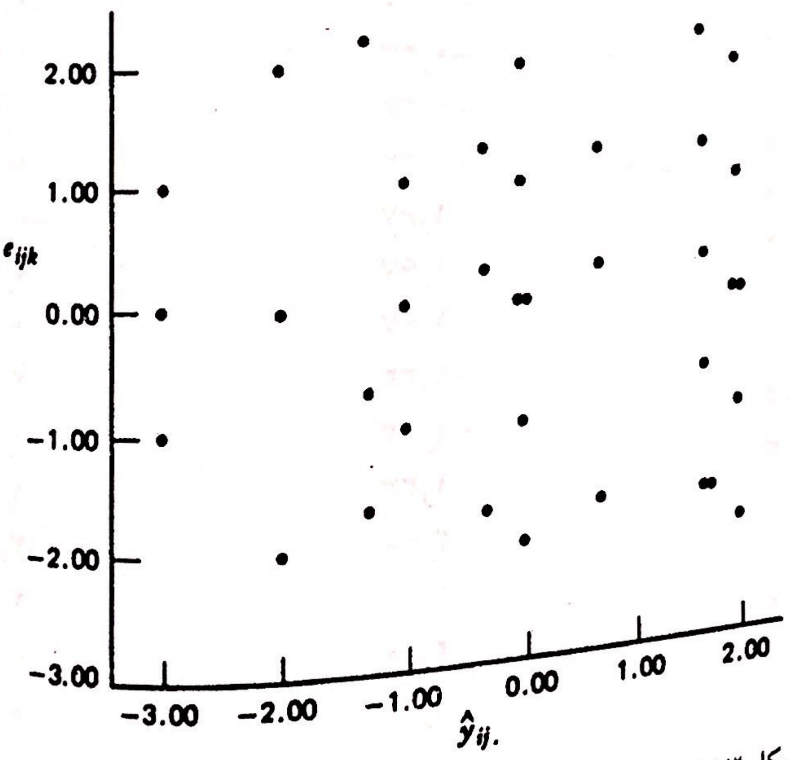
که در آن $\overline{y}_{ij.}$ متوسطهای دسته‌اند.

برای داده‌های میزان خالصی در مثال ۱.۱۳، مشاهدات، مقادیر برازانده شده، و مانده‌ها به صورت زیرند:

مقدار مشاهده شده y_{ijk}	مقدار برازانده شده $\hat{y}_{ijk} = \overline{y}_{ij.}$	$e_{ijk} = y_{ijk} - \overline{y}_{ij.}$
۱	۰٫۰۰	۱٫۰۰
−۱	۰٫۰۰	−۱٫۰۰
۰	۰٫۰۰	۰٫۰۰
−۲	−۳٫۰۰	۱٫۰۰
−۳	−۳٫۰۰	۰٫۰۰
−۴	−۳٫۰۰	−۱٫۰۰
−۲	−۰٫۳۳	−۱٫۶۷
۰	−۰٫۳۳	۰٫۳۳
۱	−۰٫۳۳	۱٫۳۳
۱	۱٫۶۷	−۰٫۶۷
۴	۱٫۶۷	۲٫۳۳
۰	۱٫۶۷	−۱٫۶۷
۱	−۱٫۳۳	۲٫۳۳
−۲	−۱٫۳۳	−۰٫۶۷
−۳	−۱٫۳۳	−۱٫۶۷
۰	۲٫۰۰	−۲٫۰۰
۴	۲٫۰۰	۲٫۰۰
۲	۲٫۰۰	۰٫۰۰
−۱	−۱٫۰۰	۰٫۰۰
۰	−۱٫۰۰	۱٫۰۰
−۲	−۱٫۰۰	−۱٫۰۰

مقدار مشاهده شده y_{ijk}	مقدار برازانده شده $\hat{y}_{ijk} = \overline{y}_{ij.}$	$e_{ijk} = y_{ijk} - \overline{y}_{ij.}$
۰	۱٫۶۷	−۱٫۶۷
۳	۱٫۶۷	۱٫۳۳
۲	۱٫۶۷	۰٫۳۳
۲	۲٫۰۰	۰٫۰۰
۴	۲٫۰۰	۲٫۰۰
۰	۲٫۰۰	−۲٫۰۰
−۲	۰٫۰۰	−۲٫۰۰
۰	۰٫۰۰	۰٫۰۰
۲	۰٫۰۰	۲٫۰۰
۱	۰٫۶۷	۰٫۳۳
−۱	۰٫۶۷	−۱٫۶۷
۲	۰٫۶۷	۱٫۳۳
۳	۲٫۰۰	۱٫۰۰
۲	۲٫۰۰	۰٫۰۰
۱	۲٫۰۰	−۱٫۰۰

بازبینهای تشخیصی معمولی شامل نمودارهای احتمال نرمال، بازبینی دورافتاده‌ها، و رسم نمودار مانده‌ها نسبت به مقادیر برازانده شده است، که می‌توان اینک انجام داد. برای روشن‌شدن موضوع،



شکل ۳.۱۳ نمودار مانده‌ها نسبت به مقادیر برازانده شده برای مثال ۱.۱۳.

مانده‌ها را نسبت به مقادیر برازانده شده در شکل ۳.۱۳ رسم کرده‌ایم. این نمودار هیچ‌گونه بی‌کفایتی آشکاری را در مدل نشان نمی‌دهد.

۳.۲.۱۳ برآورد پارامترهای مدل

اگر هر دو عامل A و B تثبیت شده باشند، می‌توانیم در مدل طرح آشیانی متعادل دومرحله‌ای،

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_{j(i)} + \epsilon_{(ij)k}$$

پارامترها را برآورد کنیم. برای این مدل، معادلات نرمال کمترین مربعات را به صورت معادلات (۹.۱۳) نشان داده‌ایم. برای روشن‌کردن نحوهٔ خواندن معادلات (۹.۱۳)، پارامتر مربوط به هر معادلهٔ نرمال را بلافاصله در طرف چپ همان معادله آورده‌ایم. مثلاً اولین معادلهٔ نرمال مربوط به μ، دومی مربوط به $\tau_۱$، سومی مربوط به $\tau_۲$، والی آخر است.

معادلات نرمال نسبتاً مفصل به نظر می‌رسند، امّا می‌توان آنها را به سادگی با استفاده از قواعد بخش ۴.۴ به‌دست آورد. برای توضیح، معادلهٔ نرمال مربوط به $\tau_۱$ را درنظر بگیرید، که دومین معادله در دستگاه معادلات (۹.۱۳) است. طرف راست این معادله $y_{۱..}$ است زیرا کل تمام مشاهدات شامل $\tau_۱$، $y_{۱..}$ است. بعلاوه در $y_{۱..}$، پارامتر μ، bnبار، پارامتر $\tau_۱$، bnبار، و هر یک از پارامترهای $\beta_{j(۱)}$، $(j = ۱, ۲, \ldots, b)$، nبار ظاهر شده‌اند. بنابراین معادلهٔ نرمال برای $\tau_۱$ باید همچنانکه در معادلات (۹.۱۳) نشان داده‌ایم به صورت $bn\hat{\mu} + bn\hat{\tau}_۱ + n\sum_{j=۱}^{b} \hat{\beta}_{j(۱)} = y_{۱..}$ باشد.

$۱ + a + ab$ معادلهٔ نرمال برحسب $۱ + a + ab$ پارامتر نامعلوم $(\hat{\mu}, \hat{\tau}_i, \hat{\beta}_{i(i)}; i = ۱, ۲, \ldots, a$ و $j = ۱, ۲, \ldots, b)$ وجود دارند. امّا، از جمع معادلات مربوط به τ_i، اولین معادلهٔ نرمال نتیجه می‌شود، و از جمع β معادلهٔ مربوط به هر سطح τ_i، معادلهٔ نرمال مربوط به همان سطح τ_i نتیجه می‌شود. بنابراین، در معادلات نرمال $a + ۱$ وابستگی خطی وجود دارد. در برآورد پارامترها قیودی که معمولاً اعمال می‌شوند عبارت‌اند از:

$$\sum_{i=۱}^{a} \hat{\tau}_i = ۰$$

و

$$\sum_{j=۱}^{b} \hat{\beta}_{j(i)} = ۰, i = ۱, ۲, \ldots, a$$

این قیود معادلات نرمال را به صورت قابل ملاحظه‌ای ساده می‌کند، و در نتیجه جوابها عبارت‌اند از:

$$\hat{\mu} = \overline{y}_{...}$$

$$
\begin{aligned}
\mu:&\ abn\hat{\mu} + bn\hat{\tau}_1 + bn\hat{\tau}_2 + \cdots + bn\hat{\tau}_a + n\hat{\beta}_{1(1)} + n\hat{\beta}_{2(1)} + \cdots + n\hat{\beta}_{b(1)} + n\hat{\beta}_{1(2)} + n\hat{\beta}_{2(2)} + \cdots + n\hat{\beta}_{b(2)} + \cdots + n\hat{\beta}_{1(a)} + n\hat{\beta}_{2(a)} + \cdots + n\hat{\beta}_{b(a)} = y_{\cdots}\\
\tau_1:&\ bn\hat{\mu} + bn\hat{\tau}_1 + n\hat{\beta}_{1(1)} + n\hat{\beta}_{2(1)} + \cdots + n\hat{\beta}_{b(1)} = y_{1..}\\
\tau_2:&\ bn\hat{\mu} + n\hat{\tau}_2 + n\hat{\beta}_{1(2)} + n\hat{\beta}_{2(2)} + \cdots + n\hat{\beta}_{b(2)} = y_{2..}\\
&\ \vdots\\
\tau_a:&\ bn\hat{\mu} + bn\hat{\tau}_a + n\hat{\beta}_{1(a)} + n\hat{\beta}_{2(a)} + \cdots + n\hat{\beta}_{b(a)} = y_{a..}\\
\beta_{1(1)}:&\ n\hat{\mu} + n\hat{\tau}_1 + n\hat{\beta}_{1(1)} = y_{11.}\\
\beta_{2(1)}:&\ n\hat{\mu} + n\hat{\tau}_1 + n\hat{\beta}_{2(1)} = y_{21.}\\
&\ \vdots\\
\beta_{b(1)}:&\ n\hat{\mu} + n\hat{\tau}_1 + n\hat{\beta}_{b(1)} = y_{b1.}\\
\beta_{1(2)}:&\ n\hat{\mu} + n\hat{\tau}_2 + n\hat{\beta}_{1(2)} = y_{12.}\\
\beta_{2(2)}:&\ n\hat{\mu} + n\hat{\tau}_2 + n\hat{\beta}_{2(2)} = y_{22.}\\
&\ \vdots\\
\beta_{b(2)}:&\ n\hat{\mu} \quad n\hat{\tau}_2 + n\hat{\beta}_{b(2)} = y_{b2.}\\
&\ \vdots\\
\beta_{1(a)}:&\ n\hat{\mu} + n\hat{\tau}_a + n\hat{\beta}_{1(a)} = y_{1a.}\\
\beta_{2(a)}:&\ n\hat{\mu} + n\hat{\tau}_a + n\hat{\beta}_{2(a)} = y_{2a.}\\
&\ \vdots\\
\beta_{b(a)}:&\ n\hat{\mu} + n\hat{\tau}_a + n\hat{\beta}_{b(a)} = y_{ba.}
\end{aligned}
\qquad (۹.۱۳)
$$

و

$$\hat{\tau}_i = \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{...} \qquad , i = 1, 2, \ldots, a \tag{۱۰.۱۳}$$

$$\hat{\beta}_{j(i)} = \overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{i..} \qquad , i = 1, 2, \ldots, a, j = 1, 2, \ldots, b \tag{۱۱.۱۳}$$

توجه کنید که این جوابهای معادلات نرمال وجه شهودی قابل ملاحظه‌ای دارند؛ اثرهای تیمار A به وسیلهٔ متوسط تمام مشاهدات در هر سطح A منهای متوسط کل برآورد می‌شوند، و اثرهای تیمار B در هر سطح A به‌وسیلهٔ متوسط مشاهدات در خانهٔ مربوطه منهای متوسط، تحت همان سطح A برآورد می‌شوند. با در نظرگرفتن این جواب می‌توانیم در توسعهٔ تحلیل واریانس برای طرح آشیانی متعادل دو مرحله‌ای، از آزمون معنی‌دار بودن رگرسیون کلی استفاده کنیم.

در بخش ۲.۲.۱۳ برای به دست آوردن مانده‌ها در طرح آشیانی از جواب معادلات نرمال استفاده کردیم. خاطرنشان می‌کنیم که برای محاسبه، مانده‌های e_{ijk}، $\hat{y}_{ijk}$ لازم‌اند. با استفاده از معادلات (۱۰.۱۳) و (۱۱.۱۳) ملاحظه می‌کنیم که،

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{ijk} &= \hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\beta}_{j(i)} \\
&= \overline{y}_{...} + (\overline{y}_{i..} - \overline{y}_{...}) + (\overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{i..}) \\
&= \overline{y}_{ij.}
\end{aligned}$$

که همان نتیجه‌ای است که قبلاً در بخش ۲.۲.۱۳ از آن استفاده کردیم.

مؤلفه‌های واریانس. در حالت اثرهای تصادفی می‌توانیم برای برآورد مؤلفه‌های σ^2، σ_β^2، و σ_τ^2ی واریانس از روش تحلیل واریانس استفاده کنیم. بنابر امید ریاضی میانگین مربعات، در آخرین ستون جدول ۱.۱۳، به‌دست می‌آوریم:

$$\hat{\sigma}^2 = MS_{\text{خطا}} \tag{۱۲.۱۳}$$

$$\hat{\sigma}_\beta^2 = \frac{MS_{B(A)} - MS_{\text{خطا}}}{n} \tag{۱۳.۱۳}$$

و

$$\hat{\sigma}_\tau^2 = \frac{MS_A - MS_{B(A)}}{bn} \tag{۱۴.۱۳}$$

بسیاری از موارد کاربرد طرحهای آشیانی متضمن مدل آمیخته است، که در آن عامل اصلی (A) تثبیت شده و عامل آشیانی (B) تصادفی است. این موردی است مناسب برای مسأله‌ای که در مثال ۱.۱۳ شرح آن گذشت؛ تهیه‌کنندگان (عامل A) تثبیت شده‌اند در صورتی که دسته‌های

مواد خام (عامل B) تصادفی‌اند. اثرهای تهیه‌کنندگان را می‌توان به وسیلهٔ

$$\hat{\tau}_۱ = \overline{y}_{۱..} - \overline{y}_{...} = \frac{-۵}{۱۲} - \frac{۱۳}{۳۶} = \frac{-۲۸}{۳۶}$$
$$\hat{\tau}_۲ = \overline{y}_{۲..} - \overline{y}_{...} = \frac{۴}{۱۲} - \frac{۱۳}{۳۶} = \frac{-۱}{۳۶}$$
$$\hat{\tau}_۳ = \overline{y}_{۳..} - \overline{y}_{...} = \frac{۱۴}{۱۲} - \frac{۱۳}{۳۶} = \frac{۲۹}{۳۶}$$

برآورد کرد. برای برآورد مؤلفه‌های واریانس $\sigma^۲$ و $\sigma^۲_\beta$، در جدول تحلیل واریانس سطر مربوط به تهیه‌کنندگان را حذف کرده و روش برآورد تحلیل واریانس را در مورد دو سطر دیگر اجرا می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$\hat{\sigma}^۲ = MS_{\text{خطا}} = ۲٫۶۴$$

و

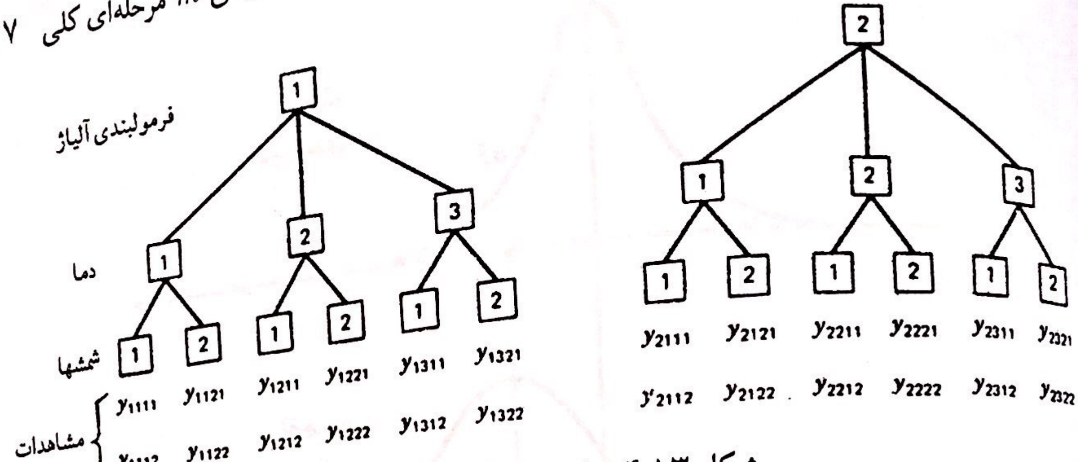
$$\hat{\sigma}^۲_\beta = \frac{MS_{B(A)} - MS_{\text{خطا}}}{n} = \frac{۷٫۷۷ - ۲٫۶۴}{۳} = ۱٫۷۱$$

از تحلیل مثال ۱.۱۳ می‌دانیم که τ_i به صورتی معنی‌دار با صفر تفاوت دارد، در حالی‌که مؤلفهٔ واریانس $\sigma^۲_\beta$ بزرگتر از صفر است.

۳.۱۳ طرح آشیانی m مرحله‌ای کلی

می‌توانیم نتایج بخش ۲.۱۳ را به سادگی به حالت m عامل کاملاً آشیانی تعمیم دهیم. چنین طرحی را طرح آشیانی m مرحله‌ای می‌نامیم. مثلاً، گیریم ریخته‌گری بخواهد میزان سختی حاصل از دو فرمولبندی متفاوت یک آلیاژ را بررسی کند. ریخته‌گر برای هر فرمولبندی آلیاژ، سه دما در نظر گرفته و از هر دما دو شمش را به تصادف برای آزمون انتخاب کرده، و دو اندازه‌گیری از میزان سختی را روی هر شمش به عمل می‌آورد. وضعیت را در شکل ۴.۱۳ نشان داده‌ایم.

در این آزمایش دما تحت سطوح عامل فرمولبندی آلیاژ آشیانی‌اند، و شمشها تحت سطوح عامل دما آشیانی‌اند. پس این یک طرح آشیانی سه مرحله‌ای با دو تکرار است.



شکل ۴.۱۳ یک طرح آشیانی سه‌مرحله‌ای.

مدل کلی برای طرح آشیانی سه‌مرحله‌ای،

$$y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_{j(i)} + \gamma_{k(ij)} + \epsilon_{(ijk)l} \begin{cases} i = ۱, ۲, \ldots, a \\ j = ۱, ۲, \ldots, b \\ k = ۱, ۲, \ldots, c \\ l = ۱, ۲, \ldots, n \end{cases} \qquad (۱۵.۱۳)$$

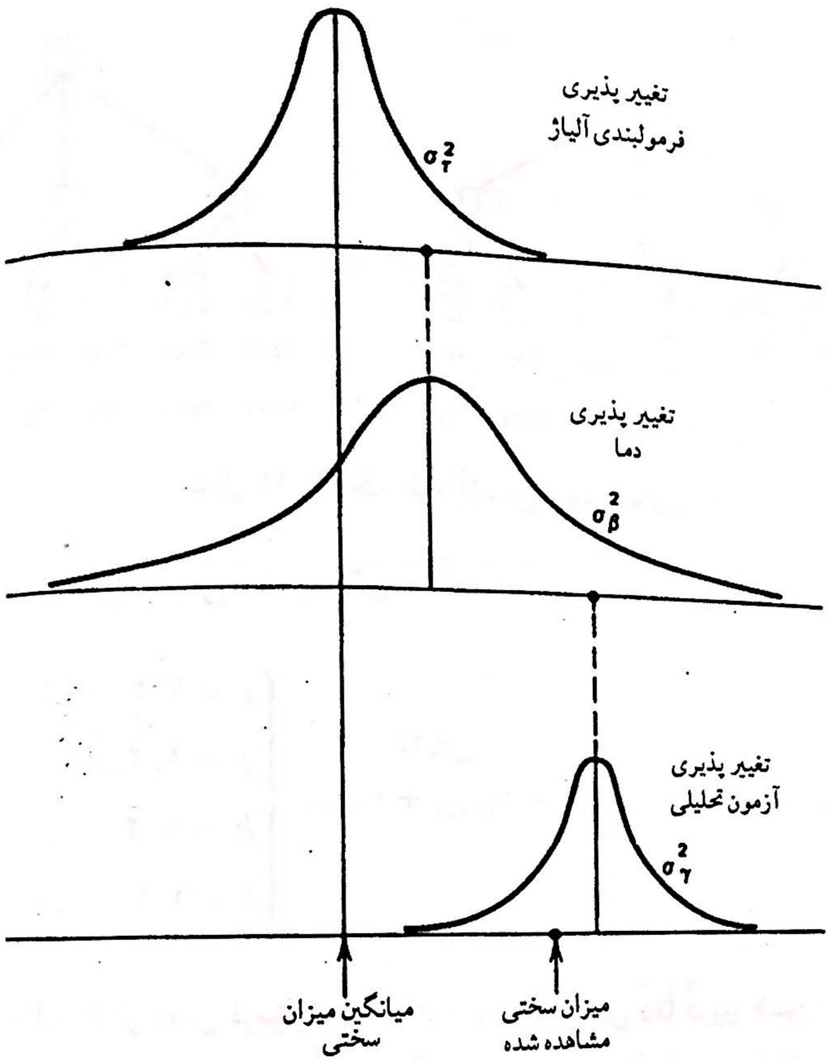
است. در این مثال، τ_i اثر iامین فرمولبندی آلیاژ، $\beta_{j(i)}$ اثر jامین دما درون iامین آلیاژ، $\gamma_{k(ij)}$ اثر kامین شمش درون jامین دما و iامین آلیاژ، و بالاخره $\epsilon_{(ijk)l}$ جملهٔ خطای معمولی $\text{NID}(۰, \sigma^۲)$ است. تعمیم این مدل به m عامل سر راست است.

توجه کنید که در مثال بالا کل تغییرپذیری در میزان سختی مرکب از سه مؤلفه است: یکی در نتیجهٔ فرمولبندیهای آلیاژ، دیگری در نتیجهٔ دماها و سومی در نتیجهٔ خطای آزمون تحلیلی است. این مؤلفه‌های تغییرپذیری در کل میزان سختی را در شکل ۵.۱۳ شرح داده‌ایم.

این مثال نشان می‌دهد که چگونه در تحلیل فرایندها به منظور معلوم‌کردن منابع عمدهٔ تغییرپذیری در خروجی، از طرح آشیانی استفاده می‌شود. برای مثال اگر مؤلفهٔ واریانس فرمولبندی آلیاژ بزرگ باشد، آن‌گاه نتیجه می‌شود که کل تغییرپذیری میزان سختی را می‌توان با استفاده از تنها یک فرمولبندی آلیاژ تقلیل داد.

برای طرح آشیانی m مرحله‌ای، محاسبهٔ مجموع مربعات و تحلیل واریانس شبیه تحلیلی است که در بخش ۲.۱۳ ارائه شده است. مثلاً، تحلیل واریانس برای طرح آشیانی سه مرحله‌ای را در جدول ۶.۱۳ به اختصار آورده‌ایم. فرمولهای محاسبه‌ای برای مجموع مربعات را نیز در این جدول نشان داده‌ایم. توجه کنید که اینها تعمیم سادهٔ فرمولهای محاسباتی برای طرح آشیانی دومرحله‌ای هستند.

برای تعیین آمارهٔ خاص آزمون باید امید ریاضی میانگین مربعات را با استفاده از روشهای



شکل ۵.۱۳ منابع تغییرپذیری در مثال طرح آشیانی سه‌مرحله‌ای.

جدول ۶.۱۳ تحلیل واریانس برای طرح آشیانی سه مرحله‌ای

منبع تغییر	مجموع مربعات	درجات آزادی	میانگین مربعات
A	$\sum_i \frac{y_{i...}^2}{bcn} - \frac{y_{....}^2}{abcn}$	$a-1$	MS_A
B (درون A)	$\sum_i \sum_j \frac{y_{ij..}^2}{cn} - \sum_i \frac{y_{i...}^2}{bcn}$	$a(b-1)$	$MS_{B(A)}$
C (درون B)	$\sum_i \sum_j \sum_k \frac{y_{ijk.}^2}{n} - \sum_i \sum_j \frac{y_{ij..}^2}{cn}$	$ab(c-1)$	$MS_{C(B)}$
خطا	$\sum_i \sum_j \sum_k \sum_l y_{ijkl}^2 - \sum_i \sum_j \sum_k \frac{y_{ijk.}^2}{n}$	$abc(n-1)$	$MS_{\text{خطا}}$
کل	$\sum_i \sum_j \sum_k \sum_l y_{ijkl}^2 - \frac{y_{....}^2}{abcn}$	$abcn-1$	

جدول ۷.۱۳ امید ریاضی میانگین مربعات به دست آمده برای طرح آشیانی سه مرحله‌ای. وقتی A و B تثبیت شده‌اند و C تصادفی است

	F	F	R	R	
	a	b	c	n	
عامل	i	j	k	l	امید ریاضی میانگین مربعات
τ_i	۰	b	c	n	$\sigma^2 + n\sigma_\gamma^2 + \frac{bcn\sum \tau_i^2}{a-1}$
$\beta_{j(i)}$	۱	۰	c	n	$\sigma^2 + n\sigma_\gamma^2 + \frac{cn\sum\sum \beta_{j(i)}^2}{a(b-1)}$
$\gamma_{k(ij)}$	۱	۱	۱	n	$\sigma^2 + n\sigma_\gamma^2$
$\epsilon_{l(ijk)}$	۱	۱	۱	۱	σ^2

* توجه کنید ما روی زیرنویس های جاری را می‌پوشانیم برای محاسبه E(MS)

فصل ۸ تعیین کرد. مثلاً، اگر عوامل A و B تثبیت شده باشند و عامل C تصادفی باشد، آن‌گاه می‌توانیم امید ریاضی میانگین مربعات را به صورتی که در جدول ۷.۱۳ نشان داده‌ایم نتیجه بگیریم. این جدول، آمارهٔ خاص آزمون را برای این وضعیت معلوم می‌کند.

۴.۱۳ طرحهای با عوامل آشیانی و تقاطعی

گاهی اوقات در آزمایش چندعاملی، بعضی عوامل، تقاطعی و عوامل دیگر آشیانی‌اند. این طرحها را طرحهای عاملی آشیانی می‌نامیم. تحلیل آماری چنین طرحی با سه عامل را در مثال زیر توضیح داده‌ایم.

مثال ۲.۱۳

یک مهندس صنایع برای اصلاح سرعت عمل مونتاژ در نصب قطعات الکترونیکی روی فیبرهای مدار چاپی، جایگذاری دستی را مطالعه می‌کند. او سه وسیلهٔ مونتاژ و دو کارگاه را که به نظر امیدبخش می‌رسند طرحریزی کرده است. او برای انجام عمل مونتاژ به کارگر نیاز دارد و تصمیم گرفته است که برای هر ترکیب وسیله و کارگاه از چهار کارگر به تصادف استفاده کند. امّا به دلیل اینکه کارگاهها در مکانهای متفاوتی درون کارخانه قرار گرفته‌اند، استفاده از یک دستهٔ چهار کارگری برای هر دو کارگاه مشکل بوده است. بنابراین، چهار کارگر منتخب برای کارگاه شمارهٔ ۱ با چهار کارگر منتخب برای کارگاه شمارهٔ ۲ متفاوت بوده‌اند. در این طرح ترکیبهای تیماری به ترتیب تصادفی اجرا شده و دو تکرار منظور شده است. زمانهای مونتاژ برحسب ثانیه اندازه‌گیری و آنها را در جدول ۸.۱۳ نشان داده‌ایم.

در این آزمایش کارگران درون کارگاهها آشیانی‌اند، در صورتی که وسائل و کارگاهها تقاطعی‌اند.

جدول ۸.۱۳ داده‌های زمان مونتاژ برای مثال ۲.۱۳

	کارگاه ۱				کارگاه ۲				
کارگر	۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴	$y_{i...}$
وسیلهٔ ۱	۲۲	۲۳	۲۸	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۴	
	۲۴	۲۴	۲۹	۲۳	۲۸	۲۵	۲۵	۲۳	۴۰۴
وسیلهٔ ۲	۳۰	۲۹	۳۰	۲۷	۲۹	۳۰	۲۴	۲۸	
	۲۷	۲۸	۳۲	۲۵	۲۸	۲۷	۲۳	۳۰	۴۴۷
وسیلهٔ ۳	۲۵	۲۴	۲۷	۲۶	۲۷	۲۶	۲۴	۲۸	
	۲۱	۲۲	۲۵	۲۳	۲۵	۲۴	۲۷	۲۷	۴۰۱
مجموع برای کارگر، $y_{.jk.}$	۱۴۹	۱۵۰	۱۷۱	۱۴۹	۱۶۳	۱۵۹	۱۵۱	۱۶۰	
مجموع برای کارگاه، $y_{.j..}$	۶۱۹				۶۳۳				$۱۲۵۲ = y_{....}$

پس این طرح شامل هر دو عوامل آشیانی و تقاطعی است. مدل خطی آماری برای این طرح:

$$y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_{k(j)} + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik(j)} + \epsilon_{(ijk)l} \begin{cases} i = ۱, ۲, ۳ \\ j = ۱, ۲ \\ k = ۱, ۲, ۳, ۴ \\ l = ۱, ۲ \end{cases}$$

است، که در آن τ_i اثر iامین وسیله، β_j اثر jامین کارگاه، $\gamma_{k(j)}$ اثر kامین کارگر درون jامین کارگاه، $(\tau\beta)_{ij}$ اثر متقابل وسیله × کارگاه، $(\tau\gamma)_{ik(j)}$ اثر متقابل وسیله × کارگران درون کارگاهها، و بالاخره $\epsilon_{(ijk)l}$ جملهٔ معمولی عامل خطاست. توجه کنید که اثر متقابل کارگاه × کارگر وجود ندارد زیرا تمام کارگران از تمام کارگاهها استفاده نکرده‌اند. به تشابه اثر متقابل سه‌عاملی وسیله × کارگاه × کارگر نمی‌تواند وجود داشته باشد. بعلاوه، وسائل و کارگاهها عوامل تثبیت شده‌اند، در صورتی که کارگر عامل تصادفی است. امید ریاضی میانگین مربعات را در جدول ۹.۱۳ آورده‌ایم. برای هر اثر یا اثر متقابل آمارهٔ مخصوص آزمون را می‌توان با بررسی این جدول پیدا کرد.

کل مجموع مربعات برابر است با:

$$SS_{\text{کل}} = \sum_{i=۱}^{a}\sum_{j=۱}^{b}\sum_{k=۱}^{c}\sum_{l=۱}^{n} y_{ijkl}^{۲} - \frac{y_{....}^{۲}}{abcn}$$

$$= ۳۲۹۵۶{,}۰۰ - \frac{(۱۲۵۲)^{۲}}{۴۸} = ۲۹۹{,}۶۷$$

جدول ۹.۱۳ امید ریاضی میانگین مربعات حاصل برای مثال ۲.۱۳

	F	F	R	R	
	۳	۲	۴	۲	امید ریاضی میانگین مربعات
عامل	i	j	k	l	
τ_i	۰	۲	۴	۲	$\sigma^۲ + ۲\sigma^۲_{\tau\gamma} + ۸\sum \tau_i^۲$
β_j	۳	۰	۴	۲	$\sigma^۲ + ۶\sigma^۲_{\gamma} + ۲۴\sum \beta_j^۲$
$\gamma_{k(j)}$	۳	۱	۱	۲	$\sigma^۲ + ۶\sigma^۲_{\gamma}$
$(\tau\beta)_{ij}$	۰	۰	۴	۲	$\sigma^۲ + ۲\sigma^۲_{\tau\gamma} + ۴\sum\sum(\tau\beta)^۲_{ij}$
$(\tau\gamma)_{ik(j)}$	۰	۱	۱	۲	$\sigma^۲ + ۲\sigma^۲_{\tau\gamma}$
$\epsilon_{(ijk)l}$	۱	۱	۱	۱	$\sigma^۲$

زیرنویس جاری را می‌پوشانیم

$\gamma_{k(j)}$ جاری را راکد

مجموع مربعات برای وسائل و کارگاهها به روال معمول محاسبه می‌شوند؛ یعنی

$$SS_{\text{وسائل}} = \sum_{i=۱}^{a} \frac{y_{i...}^۲}{bcn} - \frac{y_{....}^۲}{abcn}$$
$$= ۳۲۷۳۹٫۱۳ - \frac{(۱۲۵۲)^۲}{۴۸} = ۸۲٫۸۰$$

و

$$SS_{\text{کارگاهها}} = \sum_{j=۱}^{b} \frac{y_{.j..}^۲}{acn} - \frac{y_{....}^۲}{abcn}$$
$$= ۳۲۶۶۰٫۴۲ - \frac{(۱۲۵۲)^۲}{۴۸} = ۴٫۰۸$$

اثر متقابل وسائل × کارگاهها یا وک از مجموعهای خانه‌ای وسائل × کارگاهها (که عبارت‌اند از ۲۰۸ ,۱۹۳ ,۲۱۹ ,۲۲۸ ,۲۰۶ , ۱۹۸) به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$SS_{\text{وک}} = \sum_{i=۱}^{a}\sum_{j=۱}^{b} \frac{y_{ij..}^۲}{cn} - \frac{y_{....}^۲}{abcn} - SS_{\text{وسائل}} - SS_{\text{کارگاهها}}$$
$$= ۳۲۷۶۲٫۲۵ - \frac{(۱۲۵۲)^۲}{۴۸} - ۸۲٫۸۰ - ۴٫۰۸ = ۱۹٫۰۴$$

در تعیین مجموع مربعات برای کارگران درون کارگاهها از مجموع برای کارگران استفاده می‌کنیم.

مجموع مربعات عبارت است از:

$$SS_{\text{کارگران (کارگاهها)}} = \sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\frac{y_{.jk.}^{2}}{an} - \sum_{j=1}^{b}\frac{y_{.j..}^{2}}{acn}$$
$$= ۳۲۷۳۲٫۳۳ - ۳۲۶۶۰٫۴۲ = ۷۱٫۹۱$$

توجه کنید که جدا از عامل اضافی وسائل، این همان فرمول محاسباتی برای به دست آوردن مجموع مربعات برای هر عامل آشیانی است. $SS_{\text{کارگران (کارگاهها)}}$، $b(c-1) = 2(4-1) = 6$ درجهٔ آزادی دارد.

برای اثر متقابل وسائل × کارگران درون کارگاهها، فرمول محاسباتی یا تعداد درجهٔ آزادی را در اختیار نداریم. برای تعیین تعداد درجات آزادی و فرمول محاسباتی برای مجموع مربعات مربوط به این اثر، از قواعد فصل ۸ استفاده می‌کنیم. در این مدل جملهٔ مربوط به این اثر $(\tau\gamma)_{ik(j)}$ است، و با توجه به قاعدهٔ ۴ از فصل ۸، درجهٔ آزادی را برابر $b(a-1)(c-1) = 2(3-1)(4-1) = 12$ به دست می‌آوریم. مجموع مربعات با استفاده از قاعدهٔ ۵ در فصل ۸ به دست می‌آید. با شروع از صورت نمادی $b(a-1)(c-1) = abc - bc - ab + b$ داریم:

$$SS_{\text{وسائل کارگران (کارگاهها)}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\frac{y_{ijk.}^{2}}{n}}_{abc} - \underbrace{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\frac{y_{.jk.}^{2}}{an}}_{-bc} - \underbrace{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{y_{ij..}^{2}}{cn}}_{-ab} + \underbrace{\sum_{j=1}^{b}\frac{y_{.j..}^{2}}{acn}}_{+b}$$
$$۳۲۹۰۰٫۰۰ - ۳۲۷۳۲٫۳۳ - ۳۲۷۶۲٫۲۵ + ۳۲۶۶۰٫۴۲$$
$$= ۶۵٫۸۴$$

بالاخره، مجموع مربعات خطا از تفریق‌کردن به صورت؛

$$SS_{\text{خطا}} = SS_{\text{کل}} - SS_{\text{وسائل}} - SS_{\text{کارگاهها}} - SS_{\text{وسائل کارگاهها}} - SS_{\text{کارگران (کارگاهها)}} - SS_{\text{وسائل کارگران (کارگاهها)}}$$
$$= ۲۹۹٫۶۷ - ۸۲٫۸۰ - ۴٫۰۸ - ۱۹٫۰۴ - ۷۱٫۹۱ - ۶۵٫۸۴$$
$$= ۵۶٫۰۰$$

به دست می‌آید.

تحلیل کامل واریانس را در جدول ۱۰.۱۳ نشان داده‌ایم. ملاحظه می‌شود که وسائل مونتاژ معنی‌دار است و کارگران درون کارگاهها نیز به صورتی معنی‌دار تفاوت دارند. همچنین اثر متقابل معنی‌دار بین وسائل و کارگران درون کارگاهها وجود دارد که نشان می‌دهد اثر وسائل مختلف برای تمام کارگران یکسان نیست. به‌نظر می‌رسد کارگاهها اثر کمی بر زمان مونتاژ داشته باشند. بنابراین

جدول ۱۰.۱۳ تحلیل واریانس برای مثال ۲.۱۳

منبع تغییر	مجموع مربعات	درجات آزادی	میانگین مربعات	F.
وسائل (و)	۸۲٫۸۰	۲	۴۱٫۴۰	۷٫۵۴**
کارگاهها(ک)	۴٫۰۸	۱	۴٫۰۹	۰٫۳۴
کارگران (درون کارگاهها)	۷۱٫۹۱	۶	۱۱٫۹۹	۵٫۱۵**
وسائل کارگاهها	۱۹٫۰۴	۲	۹٫۵۲	۱٫۷۳
وسائل کارگران (کارگاهها)	۶۵٫۸۴	۱۲	۵٫۴۹	۲٫۳۶*
خطا	۵۶٫۰۰	۲۴	۲٫۳۳	
کل	۲۹۹٫۶۷	۴۷		

* معنی‌دار در ۵ درصد.

** معنی‌دار در ۱ درصد.

برای مینیمم کردن زمان مونتاژ باید توجه خود را معطوف وسائل نوع ۱ و ۳ کنیم. (توجه کنید که در جدول ۸.۱۳ مجموع وسائل برای وسائل نوع ۱ و ۳ کمتر از نوع ۲ است. این تفاوت در میانگین وسائل را می‌توان رسماً با استفاده از مقایسه‌های چندگانه آزمون کرد.) بعلاوه، اثر متقابل بین کارگران و وسائل دلالت می‌کند بر اینکه با استفاده از وسائل یکسان بعضی کارگران کاراتر از بقیه هستند. شاید بتوان این اثرهای وسائل-کارگران را تفکیک کرد و بتوان عملکرد کارگران را با آموزش‌دادن آنها اصلاح کرد. ■

می‌توان از برنامه‌های کامپیوتری تحلیل آزمایشهای عاملی برای تحلیل طرحهای شامل عوامل تقاطعی و آشیانی استفاده کرد. مثلاً، آزمایش مثال ۲.۱۳ را می‌توان به صورت طرح عاملی با سه عامل وسائل، کارگران، و کارگاهها درنظر گرفت. پس در تهیهٔ مقادیر مناسب لازم برای طرح مشتمل بر عوامل تقاطعی و آشیانی، بعضی مجموعهای مربعات و درجات آزادی مربوط به تحلیل عاملی را باید به صورت زیر درهم ادغام کرد.

تحلیل عاملی آشیانی		تحلیل عاملی	
درجات آزادی	مجموع مربعات	درجات آزادی	مجموع مربعات
۲	$SS_{\text{وسائل}}$	۲	$SS_{\text{وسائل}}$
۱	$SS_{\text{کارگاهها}}$	۱	$SS_{\text{کارگاهها}}$
۲	$SS_{\text{وسائل کارگاهها}}$	۲	$SS_{\text{وسائل کارگاهها}}$
۶	$SS_{\text{کارگران (کارگاهها)}} = SS_{\text{کارگران}} + SS_{\text{کارگاهها کارگران}}$	۳	$SS_{\text{کارگران}}$
		۳	$SS_{\text{کارگاهها (کارگران)}}$
۱۲	$SS_{\text{وسائل کارگران (کارگاهها)}} = SS_{\text{وسائل کارگران}} + SS_{\text{وسائل کارگران (کارگاهها)}}$	۶	$SS_{\text{وسائل کارگران}}$
		۶	$SS_{\text{وسائل کارگران (کارگاهها)}}$
۲۴	$SS_{\text{خطا}}$	۲۴	$SS_{\text{خطا}}$
۴۷	$SS_{\text{کل}}$	۴۷	$SS_{\text{کل}}$

۵.۱۳ مسائل

۱.۱۳ یک کارخانه مهمات‌سازی نرخ سوخت باروت را در سه فرایند متفاوت تولید، مطالعه می‌کند. از خروجی هر فرایند چهار نمونه باروت را به تصادف انتخاب و برای هر نمونه سه نرخ سوخت را تعیین کرده‌اند. نتایج به صورت زیرند. داده‌ها را تحلیل و نتایج را ارائه دهید.

	فرایند ۱				فرایند ۲				فرایند ۳			
نمونه	۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴
	۲۵	۱۹	۱۵	۱۵	۱۹	۲۳	۱۸	۳۵	۱۴	۳۵	۳۸	۲۵
	۳۰	۲۸	۱۷	۱۶	۱۷	۲۴	۲۱	۲۷	۱۵	۲۱	۵۴	۲۹
	۲۶	۲۰	۱۴	۱۳	۱۴	۲۱	۱۷	۲۵	۲۰	۲۴	۵۰	۳۳

۲.۱۳ قرار است که سطوح قطعات فلزی که به وسیلهٔ چهار ماشین پرداخت می‌شوند تحت مطالعه قرار گیرند. آزمایشی که در آن هر ماشین به وسیلهٔ سه متصدی مختلف راه‌اندازی شده انجام و از نتیجهٔ کار هر یک از متصدیان دو نمونه انتخاب و آزمون شده‌اند. به دلیل مکان استقرار ماشینها، برای هر ماشین از متصدیان متفاوت استفاده کرده‌اند و متصدیان به تصادف انتخاب شده‌اند. داده‌ها را در جدول زیر نشان داده‌ایم. داده‌ها را تحلیل و نتایج را ارائه دهید.

	ماشین ۱			ماشین ۲			ماشین ۳			ماشین ۴		
متصدی	۱	۲	۳	۱	۲	۳	۱	۲	۳	۱	۲	۳
	۷۹	۹۴	۴۶	۹۲	۸۵	۷۶	۸۸	۵۳	۴۶	۳۶	۴۰	۶۲
	۶۲	۷۴	۵۷	۹۹	۷۹	۶۸	۷۵	۵۶	۵۷	۵۳	۵۶	۴۷

۳.۱۳ یک مهندس صنایع، تغییرپذیری ابعاد قطعهٔ خاصی را مطالعه می‌کند که به وسیلهٔ سه ماشین ساخته می‌شوند. هر ماشین دو محور تولید دارد و از هر محور تولید چهار قطعه را به تصادف انتخاب کرده‌ایم. نتایج به صورت زیرند. این داده‌ها را با قبول آنکه محورهای تولید و ماشینها عوامل تثبیت شده باشند تحلیل کنید.

	ماشین ۱		ماشین ۲		ماشین ۳	
محور تولید	۱	۲	۱	۲	۱	۲
	۱۲	۸	۱۴	۱۲	۱۴	۱۶
	۹	۹	۱۵	۱۰	۱۰	۱۵
	۱۱	۱۰	۱۳	۱۱	۱۲	۱۵
	۱۲	۸	۱۴	۱۳	۱۱	۱۴

۴.۱۳ برای آسان‌ترکردن برنامه‌ریزی تولید، یک مهندس صنایع امکان تخصیص یک زمان استاندارد را به ردهٔ خاصی از کارها و با این باور که تفاوت میان کارها ناچیز است مطالعه می‌کند. برای ملاحظهٔ امکان این ساده‌سازی، شش کار را به تصادف انتخاب کرده است. هر کار را به سه کارگر متفاوت سپرده است. هر کارگر طی یک هفته در زمانهایی متفاوت دو بار کار را به اتمام رسانده است. نتایج زیر به دست آمده‌اند. نتیجه‌گیری شما دربارهٔ استفاده از زمان مشترک استاندارد برای تمام کارها در این رده چیست؟ از چه مقداری برای استاندارد استفاده می‌کنید؟

زمان

در صورت متفاوت نبودن کارها زمان کل کارها را بعنوان استاندارد در نظر می‌گیریم

کار	کارگر ۱		کارگر ۲		کارگر ۳	
۱	۱۵۸٫۳	۱۵۹٫۴	۱۵۹٫۲	۱۵۹٫۶	۱۵۸٫۹	۱۵۷٫۸
۲	۱۵۴٫۶	۱۵۴٫۹	۱۵۷٫۷	۱۵۶٫۸	۱۵۴٫۸	۱۵۶٫۳
۳	۱۶۲٫۵	۱۶۲٫۶	۱۶۱٫۰	۱۵۸٫۹	۱۶۰٫۵	۱۵۹٫۵
۴	۱۶۰٫۰	۱۵۸٫۷	۱۵۷٫۵	۱۵۸٫۹	۱۶۱٫۱	۱۵۸٫۵
۵	۱۵۶٫۳	۱۵۸٫۱	۱۵۸٫۳	۱۵۶٫۹	۱۵۷٫۷	۱۵۶٫۹
۶	۱۶۳٫۷	۱۶۱٫۰	۱۶۲٫۳	۱۶۰٫۳	۱۶۲٫۶	۱۶۱٫۸

۵.۱۳ با استفاده از آزمون کلی معنی‌دار بودن رگرسیون، تحلیل واریانس را برای طرح آشیانی دومرحله‌ای متعادل به‌کار برید.

۶.۱۳ طرح آشیانی سه‌مرحله‌ای را که در شکل ۴.۱۳ برای بررسی میزان سختی آلیاژ نشان داده‌ایم درنظر بگیرید. با استفاده از داده‌های زیر و با پذیرفتن اینکه ترکیب شیمیایی آلیاژ و دما عوامل تثبیت شده و شمشها تصادفی‌اند، طرح را تحلیل کنید.

	ترکیب شیمیایی آلیاژ											
	۱						۲					
دما	۱		۲		۳		۱		۲		۳	
شمشها	۱	۲	۱	۲	۱	۲	۱	۲	۱	۲	۱	۲
	۴۰	۲۷	۹۵	۶۹	۶۵	۷۸	۲۲	۲۳	۸۳	۷۵	۶۱	۳۵
	۶۳	۳۰	۶۷	۴۷	۵۴	۴۵	۱۰	۳۹	۶۲	۶۴	۷۷	۴۲

۷.۱۳ امید ریاضی میانگین مربعات را برای طرح آشیانی سه‌مرحله‌ای متعادل با قبول آنکه A تثبیت شده و B و C تصادفی‌اند نتیجه بگیرید. فرمولهای برآوردکنندهٔ مؤلفه‌های واریانس را به دست آورید.

۸.۱۳ امید ریاضی میانگین مربعات را برای طرح آشیانی سه‌مرحله‌ای متعادل وقتی که هر سه‌عامل تصادفی‌اند نتیجه بگیرید. فرمولهای برآوردکنندهٔ مؤلفه‌های واریانس را به دست آورید.

۹.۱۳ درستی امید ریاضی میانگین مربعات را که در جدول ۱.۱۳ آورده‌ایم معلوم کنید.

۱۰.۱۳ **طرحهای آشیانی نامتعادل.** یک طرح آشیانی دومرحله‌ای نامتعادل را با سطح b_i ی B تحت iامین سطح A و n_{ij} تکرار در (ij)امین خانه درنظر بگیرید.

(الف) برای این وضعیت معادلات نرمال کمترین مربعات را بنویسید. معادلات نرمال را حل کنید.

(ب) برای این طرح آشیانی دومرحله‌ای نامتعادل جدول تحلیل واریانس را بنا کنید.

(ج) با استفاده از نتایج قسمت (ب) داده‌های زیر را تحلیل کنید.

عامل A	۱		۲		
عامل B	۱	۲	۱	۲	۳
	۶	−۳	۵	۲	۱
	۴	۱	۷	۴	۰
	۸		۹	۳	−۳
			۶		

درجه آزادی کل

$\sum_i \sum_j \sum_k (n_{ij}) - 1 = N-1$

$SSTo = SSA + SSB(A) + SSE$

$\sum_i^a \sum_j^{b_i} \sum_k^{n_{ij}} (y_{ijk}-\bar{y}_{...})^2 = \sum_{i=1}^{a} b_i n_{ij} (\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2 + \sum_i \sum_j n_{ij} (\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..})^2 + \sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk}-\bar{y}_{ij.})^2$

۱۱.۱۳ مؤلفه‌های واریانس در طرح آشیانی دومرحله‌ای نامتعادل، مدل زیر را درنظر بگیرید.

$df_A = a-1 \quad + \quad df_{B(A)} \sum_i (b_i - 1) \quad + \quad \sum_i \sum_j (n_{ij}-1)$

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_{j(i)} + \epsilon_{k(ij)} \begin{cases} i = ۱, ۲, \ldots, a \\ j = ۱, ۲, \ldots, b_i \\ k = ۱, ۲, \ldots, n_{ij} \end{cases}$$

S^2

که در آن A و B عوامل تصادفی‌اند. نشان دهید که؛

$$E(MS_A) = \sigma^۲ + c_۱\sigma_\beta^۲ + c_۲\sigma_\tau^۲$$

$$E(MS_{B(A)}) = \sigma^۲ + c_۰\sigma_\beta^۲$$

$$E(MS_{\text{خطا}}) = \sigma^۲$$

که در آنها،

$$c_0 = \frac{N - \sum_{i=1}^{a}\left(\sum_{j=1}^{b_i} n_{ij}^2/n_{i.}\right)}{b-a}$$

$$c_1 = \frac{\sum_{i=1}^{a}\left(\sum_{j=1}^{b_i} n_{ij}^2/n_{i.}\right) - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i} n_{ij}^2/N}{a-1}$$

$$c_2 = \frac{N - \frac{\sum_{i=1} n_{i.}^2}{N}}{a-1}$$

هستند.

۱۲.۱۳ یک مهندس فرایند، نتیجهٔ محصولی را که به وسیلهٔ سه ماشین ساخته شده‌اند می‌آزماید. هر ماشین را می‌توان با دو قدرت متفاوت به کار انداخت. بعلاوه، هر ماشین دارای سه جایگاه است که محصول در آنها شکل می‌گیرد. آزمایشی اجرا شده است که در آن، هر ماشین در هر دو قدرت آزمون شده و از هر جایگاه سه مشاهده از محصول را گرفته‌اند. اجراها به ترتیب تصادفی بوده و نتایج به صورت زیر به دست آمده‌اند. این آزمایش را با قبول آنکه هر سه عامل تثبیت شده‌اند تحلیل کنید.

جایگاه	ماشین ۱			ماشین ۲			ماشین ۳		
	۱	۲	۳	۱	۲	۳	۱	۲	۳
	۳۴٫۱	۳۳٫۷	۳۶٫۲	۳۲٫۱	۳۳٫۱	۳۲٫۸	۳۲٫۹	۳۳٫۸	۳۳٫۶
قدرت ۱	۳۰٫۳	۳۴٫۹	۳۶٫۸	۳۳٫۵	۳۴٫۷	۳۵٫۱	۳۳٫۰	۳۳٫۴	۳۲٫۸
	۳۱٫۶	۳۵٫۰	۳۷٫۱	۳۴٫۰	۳۳٫۹	۳۴٫۳	۳۳٫۱	۳۲٫۸	۳۱٫۷
	۲۴٫۳	۲۸٫۱	۲۵٫۷	۲۴٫۱	۲۴٫۱	۲۶٫۰	۲۴٫۲	۲۳٫۲	۲۴٫۷
قدرت ۲	۲۶٫۳	۲۹٫۳	۲۶٫۱	۲۵٫۰	۲۵٫۱	۲۷٫۱	۲۶٫۱	۲۷٫۴	۲۲٫۰
	۲۷٫۱	۲۸٫۶	۲۴٫۹	۲۶٫۳	۲۷٫۹	۲۳٫۹	۲۵٫۳	۲۸٫۰	۲۴٫۸

۱۳.۱۳ گیریم در مسألهٔ ۱۲.۱۳ بتوان از تعداد زیادی قدرتها استفاده کرد، و دو قدرت منتخب برای آزمایش به تصادف انتخاب شده باشند. برای این وضعیت امید ریاضی میانگین مربعات را به دست آورده و تحلیل قبلی را به فراخور مطلب اصلاح کنید.

۱۴.۱۳ یک مهندس ساختمان دربارهٔ مقاومت آلیاژ آلومینیم خریداری شده از سه فروشنده مطالعه می‌کند. هر فروشنده آلیاژ را در پروفیلهای با اندازهٔ استاندارد ۱٫۰، ۱٫۵۰ یا ۲ اینچی عرضه می‌کند. فرایند تهیهٔ اندازه‌های متفاوت پروفیلها از یک شمش متضمن تکنیکهای متفاوت آهنگری

است، و لذا این عامل می‌تواند مهم باشد. بعلاوه، پروفیل از شمشهای متفاوتی که در دماهای مختلف تولید شده‌اند آهنگری شده است. هر فروشنده از هر اندازه و سه دما دو نمونهٔ آزمایشی را عرضه می‌کند. داده‌های مقاومت حاصل به صورت زیرند. داده‌ها را با قبول آنکه فروشنده‌ها و اندازهٔ پروفیل تثبیت شده و دماها تصادفی باشند تحلیل کنید. دما درون پروفیل آشیانی شود

طرح آشیانی - دماها تصادفی

فروشندهٔ ۳			فروشندهٔ ۲			فروشندهٔ ۱			
۳	۲	۱	۳	۲	۱	۳	۲	۱	دما
۱٫۳۲۴	۱٫۲۷۵	۱٫۲۴۷	۱٫۳۱۵	۱٫۳۴۶	۱٫۳۰۱	۱٫۲۳۵	۱٫۳۴۶	۱٫۲۳۰	اندازهٔ پروفیل: ۱ اینچ
۱٫۳۱۵	۱٫۲۶۸	۱٫۲۹۶	۱٫۳۲۰	۱٫۳۹۲	۱٫۲۶۳	۱٫۲۰۶	۱٫۴۰۰	۱٫۲۵۹	
۱٫۳۹۲	۱٫۲۶۰	۱٫۲۷۳	۱٫۳۴۶	۱٫۳۸۴	۱٫۲۷۴	۱٫۲۵۰	۱٫۳۲۹	۱٫۳۱۶	۱٫۵۰ اینچ
۱٫۳۶۴	۱٫۲۶۵	۱٫۲۶۴	۱٫۳۵۷	۱٫۳۷۵	۱٫۲۶۸	۱٫۲۳۹	۱٫۳۶۲	۱٫۳۰۰	
۱٫۳۱۹	۱٫۲۸۰	۱٫۳۰۱	۱٫۳۳۶	۱٫۳۶۲	۱٫۲۴۷	۱٫۲۷۳	۱٫۳۴۶	۱٫۲۸۷	۲ اینچ
۱٫۳۲۳	۱٫۲۷۱	۱٫۲۶۲	۱٫۳۴۲	۱٫۳۲۸	۱٫۲۱۵	۱٫۲۱۵	۱٫۳۸۲	۱٫۲۹۲	

۱۵.۱۳ گیریم در مسألهٔ ۱۴.۱۳ بتوان پروفیلها را در اندازه‌های متنوعی خریداری کرد و گیریم سه اندازه‌ای که واقعاً از آنها در آزمایش استفاده شده است به طور تصادفی انتخاب شوند. در این وضعیت امید ریاضی میانگین مربعات را به دست آورده و تحلیل قبل را به فراخور مطلب اصلاح کنید.

۱۴

آزمایشهای چندعاملی با محدودیتهای تصادفی‌کردن

در فصول پنجم و ششم برای آزمایشهای با محدودیتهای تصادفی‌کردن، یعنی آزمایشهایی که نمی‌توانیم ترکیبهای تیماری را به طریق کاملاً تصادفی به واحدهای آزمایشی اختصاص دهیم طرحهایی ارائه کردیم. طرحهای بلوکی تصادفی‌شده و مربع لاتین به ترتیب تکنیکهای طرحی مؤثر برای در نظر گرفتن یک یا دو محدودیت تصادفی‌کردن هستند. در فصول پنجم و ششم این‌گونه طرحها را نسبت به یک عامل بحث کردیم. اما وضعیتهای آزمایشی چندعاملی زیادی وجود دارند که لازم است تصادفی کردن کامل محدود شود. این مسائل مربوط به طرحها موضوع بحث این فصل‌اند. برای مطالعهٔ بیشتر در این طرحها اوستل[1] (۱۹۳۶)، جان (۱۹۷۱)، هیکز (۱۹۷۳) و اندرسن و مکلین (۱۹۷۴) را ببینید.

1. Ostle

comand in R:

```
trent = factor(rep(c(1,2,3), each=5), Levels=c(1,2,3))
y = c(y1, y2, y3)
X = c(x1, x2, x3)
xx = X - mean(X)
M = lm(y ~ xx + trent)
anova(M)
M1 = lm(y ~ trent)
anova(M1, M)        H0: β=0
M2 = lm(y ~ xx)
anova(M2, M)        H0: Ti=0
```

$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta(x_{ij} - \bar{x}) + \varepsilon_{ij}$

۱۷

تحلیل کوواریانس

۱.۱۷ مقدمه

در فصول گذشته در مورد استفاده از طرحهای بلوکی تصادفی‌شده و مربع لاتین برای اصلاح دقت مقایسهٔ بین تیمارها بحث کردیم. تحلیل کوواریانس تکنیک دیگری است که گاهی اوقات برای اصلاح دقت یک آزمایش مفید است. گیریم در یک آزمایش با متغیر پاسخ y متغیر دیگری مثلاً x همراه باشد به‌طوری که y به صورتی خطی به‌آن وابسته باشد. بعلاوه گیریم x تحت کنترل آزمایشگر نباشد ولی بتوان آن را همراه y مشاهده کرد. متغیر x را متغیر تصادفی کمکی یا ملازم می‌نامند. تحلیل کوواریانس متضمن تعدیل متغیر پاسخ مشاهده شده بر اثر متغیر ملازم است. اگر چنین تعدیلی به عمل نیاید، متغیر ملازم می‌تواند میانگین مربع خطا را متورم ساخته و آشکار کردن اختلافهای واقعی حاصل از تیمارها در پاسخ را مشکلتر کند. پس تحلیل کوواریانس روشی برای تعدیل اثرهای متغیرهای مزاحم غیرقابل کنترل است. همچنان‌که خواهیم دید، شیوه، ترکیبی از تحلیل واریانس و تحلیل رگرسیونی است:

به عنوان مثالی از آزمایشی که می‌توان برای آن تحلیل کوواریانس را به‌کار برد، مطالعه‌ای را در نظر بگیرید که برای تعیین چگونگی تفاوت مقاومت الیاف تک‌رشته‌ای که با سه ماشین متفاوت تولید می‌شوند انجام شده باشد. ولی مقاومت الیاف تحت تأثیر ضخامت نیز هست؛ در نتیجه الیاف

ضخیمتر معمولاً مقاومتر از الیاف نازکتر است. وقتی تفاوت مقاومت بین ماشینها را آزمون می کنیم، می‌توانیم برای حذف اثر ضخامت (x) در مقاومت (y) از تحلیل کوواریانس استفاده کنیم.

۲.۱۷ طرح تک‌عاملی با یک متغیر تصادفی کمکی

حال برای طرح آزمایش تک‌عاملی با یک متغیر تصادفی کمکی شیوهٔ اساسی تحلیل کوواریانس را توضیح می‌دهیم. گیریم یک رابطهٔ خطی بین پاسخ و متغیر تصادفی کمکی وجود داشته باشد. مدل مناسب آماری

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta(x_{ij} - \overline{x}_{..}) + \varepsilon_{ij} \begin{cases} i = ۱, ۲, \cdots, a \\ j = ۱, ۲, \cdots, n \end{cases} \qquad (۱.۱۷)$$

است، که در آن y_{ij} ، jامین مشاهده در متغیر پاسخ تحت iامین تیمار یا سطح تک‌عامل، x_{ij} اندازهٔ به‌دست آمده از متغیر تصادفی کمکی یا ملازم متناظر با y_{ij} (یعنی، ijامین اجرا)، $\overline{x}_{..}$ میانگین مقادیر x_{ij}، μ میانگین کلی، τ_i، اثر iامین تیمار، β ضریب رگرسیون خطی معرف وابستگی y_{ij} به x_{ij}، و ε_{ij} مؤلفهٔ خطای تصادفی است. می‌پذیریم که خطاهای ε_{ij}، متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع $\mathrm{NID}(۰, \sigma^2)$ هستند، شیب $\beta \neq ۰$ و رابطهٔ واقعی بین y_{ij} و x_{ij} خطی است، ضرایب رگرسیونی برای هر تیمار یکسان است، مجموع اثرهای تیماری صفر است $(\sum_{i=۱}^{a} \tau_i = ۰)$، و متغیر ملازم x_{ij} تحت تأثیر تیمارها نیست.

از معادلهٔ (۱.۱۷) بلافاصله ملاحظه می‌کنیم که مدل تحلیل کوواریانس ترکیبی از مدلهای خطی است که در تحلیل واریانس و رگرسیون استفاده می‌شوند. یعنی، اثرهای تیمار $\{\tau_i\}$ را به‌صورت تحلیل واریانس یک‌عاملی و ضریب رگرسیونی را به‌صورت تحلیل رگرسیونی در اختیار داریم. متغیر ملازم در معادلهٔ (۱.۱۷) به جای x_{ij}، به‌صورت $(x_{ij} - \overline{x}_{..})$ بیان شده به‌طوری که پارامتر μ برابر میانگین کلی باشد. می‌توانیم مدل را به‌صورت

$$y_{ij} = \mu' + \tau_i + \beta x_{ij} + \varepsilon_{ij} \begin{cases} i = ۱, ۲, \cdots, a \\ j = ۱, ۲, \cdots, n \end{cases} \qquad (۲.۱۷)$$

بنویسیم، که در آن μ' مقداری ثابت امّا برابر میانگین کل نیست. برای این مدل میانگین کل $\mu' + \beta\overline{x}_{..}$ است. معادلهٔ (۱.۱۷) در متون آماری بیشتر به چشم می‌خورد.

برای توصیف تحلیل، نمادهای زیر را معرفی می‌کنیم:

$$S_{yy}=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{..})^2=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}y_{ij}^2-\frac{y_{..}^2}{an} \qquad (۳.۱۷)$$

$$S_{xx}=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_{..})^2=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^2-\frac{x_{..}^2}{an} \qquad (۴.۱۷)$$

$$S_{xy}=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_{..})(y_{ij}-\bar{y}_{..})=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}y_{ij}-\frac{(x_{..})(y_{..})}{an} \qquad (۵.۱۷)$$

$$T_{yy}=\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2=\sum_{i=1}^{a}\frac{y_{i.}^2}{n}-\frac{y_{..}^2}{an} \qquad (۶.۱۷)$$

$$T_{xx}=\sum_{i=1}^{a}(\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})^2=\sum_{i=1}^{a}\frac{x_{i.}^2}{n}-\frac{x_{..}^2}{an} \qquad (۷.۱۷)$$

$$T_{xy}=\sum_{i=1}^{a}(\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})=\sum_{i=1}^{a}\frac{(x_{i.})(y_{i.})}{n}-\frac{(x_{..})(y_{..})}{an} \qquad (۸.۱۷)$$

$$E_{yy}=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2=S_{yy}-T_{yy} \qquad (۹.۱۷)$$

$$E_{xx}=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_{i.})^2=S_{xx}-T_{xx} \qquad (۱۰.۱۷)$$

$$E_{xy}=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_{i.})(y_{ij}-\bar{y}_{i.})=S_{xy}-T_{xy} \qquad (۱۱.۱۷)$$

توجه کنید که به‌طورکلی داریم $S=T+E$، که در آن از نمادهای S، T، و E به ترتیب به منظور نشان دادن مجموع مربعات و مجموع حاصلضرب‌های متقاطع برای کل، تیمارها، و خطا استفاده کرده‌ایم. مجموع مربعات برای x و y باید نامنفی باشند؛ امّا مجموع حاصلضرب‌های متقاطع می‌توانند منفی باشند.

حال نشان می‌دهیم که چطور تحلیل کوواریانس، متغیر پاسخ را برای اثر متغیر تصادفی کمکی تعدیل می‌کند. مدل کامل [معادلهٔ (۱.۱۷)] را در نظر بگیرید. برآورد کننده‌های کمترین مربعات μ، τ_i، و β عبارت‌اند از $\hat{\mu}=\bar{y}_{..}$، $\hat{\tau}_i=\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..}-\hat{\beta}(\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})$، و

$$\hat{\beta}=\frac{E_{xy}}{E_{xx}} \qquad (۱۲.۱۷)$$

$F_\circ = \frac{(SSE(RM) - SSE(FM))/df_{RM} - df_{FM}}{SSE(FM)/df_{FM}}$

مجموع مربعات خطا در این مدل

$$SS_E = E_{yy} - (E_{xy})^2/E_{xx} \quad (13.17)$$

با $a(n-1) - 1$ درجهٔ آزادی است. واریانس خطای مربوط به آزمایش با

$$MS_E = \frac{SS_E}{a(n-1)-1}$$

برآورد می‌شود. حال گیریم هیچ اثر تیماری وجود نداشته باشد. از این‌رو مدل [معادلهٔ (۱.۱۷)] به‌صورت

$$y_{ij} = \mu + \beta(x_{ij} - \overline{x}_{..}) + \varepsilon_{ij} \quad (14.17)$$

درمی‌آید و برآوردکننده‌های کمترین مربعات μ و β، $\hat{\mu} = \overline{y}_{..}$ و $\hat{\beta} = S_{xy}/S_{xx}$ هستند. مجموع مربعات خطا در این مدل تقلیل یافته

$$SS'_E = S_{yy} - (S_{xy})^2/S_{xx} \quad (15.17)$$

با $an - 2$ درجه آزادی است. در معادلهٔ (۱۵.۱۷) مقدار $(S_{xy})^2/S_{xx}$ کاهش در مجموع مربعات y است که از رگرسیون خطی y نسبت به x حاصل می‌شود. بعلاوه، توجه کنید که SS_E کوچکتر از SS'_E است (زیرا که مدل [معادلهٔ (۱.۱۷)] شامل پارامترهای دیگر $\{\tau_i\}$ است) و مقدار $SS'_E - SS_E$ کاهش در مجموع مربعات حاصل از $\{\tau_i\}$هاست. بنابراین تفاضل بین SS'_E و SS_E، یعنی، $SS'_E - SS_E$ مجموع مربعاتی با $a - 1$ درجهٔ آزادی برای آزمون فرض عدم وجود اثر تیمار ارائه می‌دهد. در نتیجه برای آزمون $H_\circ : \tau_i = 0$ نسبت*

$$F_\circ = \frac{(SS'_E - SS_E)/(a-1)}{SS_E/[a(n-1)-1]} \quad (16.17)$$

را محاسبه می‌کنیم، که اگر فرض صفر درست باشد دارای توزیع $F_{a-1,a(n-1)-1}$ است. پس فرض $H_\circ : \tau_i = 0$ را رد می کنیم هر گاه $F_\circ > F_{\alpha,a-1,a(n-1)-1}$.

بررسی جدول ۱.۱۷ آموزنده است. در این جدول، تحلیل کوواریانس را به‌صورت تحلیل «تعدیل شدهٔ» واریانس ارائه کرده‌ایم. در ستون منبع تغییر، اندازهٔ کل تغییرپذیری S_{yy} را با $an - 1$

* این آمارهٔ آزمون در SAS نسبت F نوع III است.

درجهٔ آزادی اندازه‌گیری کرده‌ایم. منبع تغییر «رگرسیون»، مجموع مربعاتی برابر $(S_{xy})^2/S_{xx}$ با یک درجهٔ آزادی دارد. اگر متغیر ملازمی در کار نباشد، داریم $S_{xy} = S_{xx} = E_{xy} = E_{xx} = 0$. از این‌رو مجموع مربعات خطا صرفاً E_{yy} و مجموع مربعات تیمارها $S_{yy} = E_{yy} = T_{yy}$. امّا، همان‌طور که در جدول ۱.۱۶ نشان داده‌ایم به دلیل حضور متغیر ملازم باید S_{yy} وE_{yy} را برای رگرسیون y روی x تعدیل کنیم. مجموع مربعات خطای تعدیل یافته به جای $a(n-1)$ درجهٔ آزادی $a(n-1)-1$ درجهٔ آزادی دارد زیرا که پارامتر دیگری (شیب β) را به داده‌ها برازانده‌ایم.

معمولاً محاسبات را در یک جدول تحلیل کوواریانس مانند جدول ۲.۱۷ می‌آوریم. از چنین جدولی به‌این دلیل استفاده می‌کنیم که تمام مجموع مربعات و مجموع حاصلضربهای متقاطع مورد نیاز و همچنین مجموع مربعات برای آزمون فرض اثرهای تیماری را به اختصار شامل است. بعلاوه در آزمون فرض عدم وجود اختلاف بین اثرهای تیماری، اغلب متوجه می‌شویم که این جدول در تعبیر داده‌ها برای معرفی میانگینهای تعدیل یافته تیمار مفید است. این میانگینهای تعدیل یافته بر اساس

$$\text{تعدیل‌یافته } \overline{y}_{i.} = \overline{y}_{i.} - \hat{\beta}(\overline{x}_{i.} - \overline{x}_{..}) \qquad i = 1, 2 \cdots a \tag{۱۷.۱۷}$$

محاسبه می‌شوند، که در آن $\hat{\beta} = E_{xy}/E_{xx}$ است. این میانگین تیماری تعدیل یافته برآوردکنندهٔ کمترین مربعات $\mu + \tau_i$، $i = 1, 2, \cdots, a$ در مدل [معادلهٔ (۱.۱۷)] است. خطای معیار هر میانگین تیماری تعدیل یافته

$$S_{\overline{y}_{i.}\ \text{تعدیل‌یافته}} = \left[MS_E \left(\frac{1}{n} + \frac{(\overline{x}_{i.} - \overline{x}_{..})^2}{E_{xx}} \right) \right]^{1/2} \tag{۱۸.۱۷}$$

بالاخره یادآور می‌شویم که فرض کرده‌ایم ضریب رگرسیونی β در مدل [معادلهٔ(۱.۱۷)] صفر نیست. می‌توانیم با استفاده از آمارهٔ آزمون*

در رگرسیون معمول

$$F_0 = \frac{(E_{xy})^2/E_{xx}}{MS_E} = \frac{MSR}{MSE} \tag{۱۹.۱۷}$$

فرض $H_0 : \beta = 0$ را آزمون کنیم، که تحت فرض صفر، توزیع $F_{1,a(n-1)-1}$ دارد. پس فرض $H_0 : \beta = 0$ را برای $F_0 > F_{\alpha,1,a(n-1)-1}$ رد می‌کنیم.

---

* این آمارهٔ آزمون در SAS نسبت F نوع III است.

جدول ۱.۱۷ تحلیل کوواریانس به صورت تحلیل «تعدیل‌یافتهٔ» واریانس

منبع تغییر	مجموع مربعات	درجات آزادی	میانگین مربعات	F_0
رگرسیون	$(S_{xy})^2/S_{xx}$	۱		
تیمارها	$SS'_E - SS_E =$ $S_{yy} - (S_{xy})^2/S_{xx} -$ $[E_{yy} - (E_{xy})^2/E_{xx}]$	$a - 1$	$\frac{SS'_E - SS_E}{a - 1}$	$\frac{(SS'_E - SS_E)/(a - 1)}{MS_E}$
خطا	$SS_E = E_{yy} - (E_{xy})^2/E_{xx}$	$a(n - 1) - 1$	$MS_E = \frac{SS_E}{a(n - 1) - 1}$	
کل	S_{yy}	$an - 1$		

جدول ۲.۱۷ تحلیل کوواریانس برای آزمایش تک‌عاملی با یک متغیر تصادفی کمکی

منبع	درجات	مجموع مربعات و مجموع حاصلضربها			تعدیل‌یافته برای رگرسیون		
تغییر	آزادی	x	xy	y	y	درجات آزادی	میانگین مربعات
تیمارها	$a - 1$	T_{xx}	T_{xy}	T_{yy}			
خطا	$a(n - 1)$	E_{xx}	E_{xy}	E_{yy}	$SS_E = E_{yy} - (E_{xy})^2/E_{xx}$	$a(n - 1) - 1$	$MS_E = \frac{SS_E}{a(n - 1) - 1}$
کل	$an - 1$	S_{xx}	S_{xy}	S_{yy}	$SS'_E = S_{yy} - (S_{xy})^2/S_{xx}$	$an - 2$	
تیمارهای تعدیل‌یافته					$SS'_E - SS_E$	$a - 1$	$\frac{SS'_E - SS_E}{a - 1}$

مثال ۱.۱۷

آزمایشی را که در بخش ۱.۱۷ شرح دادیم در نظر بگیرید. سه ماشین متفاوت، الیافی تک رشته‌ای برای یک کارخانهٔ نساجی تولید می‌کنند. مهندس فرایند علاقه‌مند است بداند که آیا تفاوتی در مقاومت الیافهای تولید شدهٔ سه ماشین در برابر گسیختگی وجود دارد یا نه. امّا، مقاومت الیافها به قطر آنها نیز وابسته است، یعنی معمولاً الیافهای ضخیمتر مقاومتر از الیافهای نازکترند. نمونه‌ای تصادفی شامل پنج الیاف از هر ماشین انتخاب کرده‌ایم. برای هر نمونه مقاومت الیاف (y) و قطر متناظر آن (x) را در جدول ۳.۱۷ نشان داده‌ایم.

نمودار مقاومت در برابر گسیختگی الیاف نسبت به قطر آنها را در شکل ۱.۱۷ نشان داده‌ایم. این نمودار شدیداً حکایت از وجود بستگی خطی میان مقاومت و قطر می‌کند و به نظر کاملاً موجه می‌رسد که با تحلیل کوواریانس اثر قطر را از مقاومت حذف کنیم. می‌پذیریم که مقاومت در برابر گسیختگی و قطر، بستگی خطی دارند. مدل به‌صورت زیر است

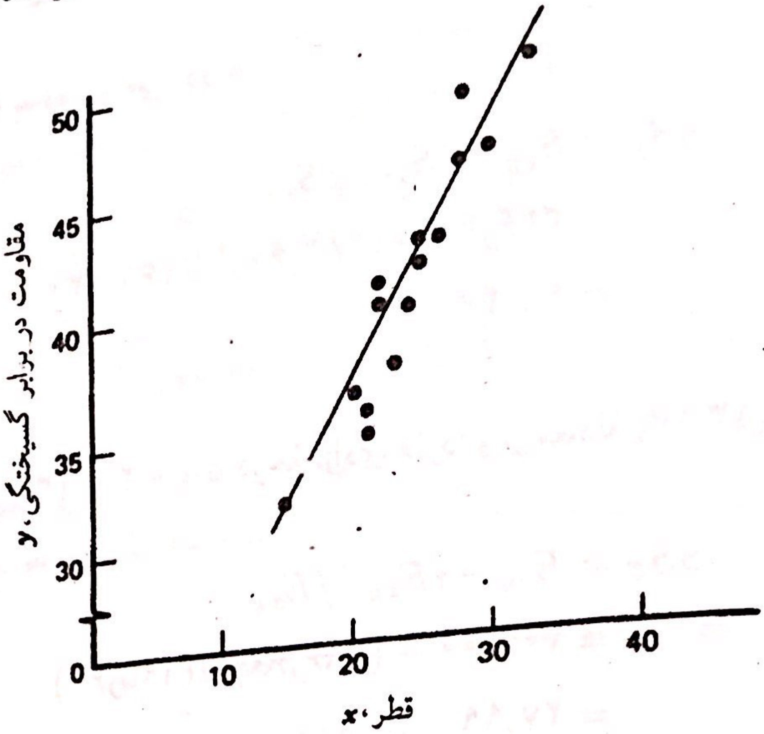
$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta(x_{ij} - \bar{x}_{..}) + \varepsilon_{ij} \begin{cases} i = ۱, ۲, ۳ \\ j = ۱, ۲, \cdots, ۵ \end{cases}$$

با استفاده از معادلات (۳.۱۷) تا (۱۱.۱۷) محاسبات زیر را انجام می‌دهیم

$$S_{yy} = \sum_{i=۱}^{۳}\sum_{j=۱}^{۵} y_{ij}^۲ - \frac{y_{..}^۲}{an} = (۳۶)^۲ + (۴۱)^۲ + \cdots + (۳۲)^۲ - \frac{(۶۰۳)^۲}{(۳)(۵)} = ۳۴۶٫۴۰$$

جدول ۳.۱۷ داده‌های مقاومت در برابر گسیختگی برای مثال ۱.۱۷ (y = مقاومت برحسب پوند و x = قطر برحسب $۱۰^{-۳}$ اینچ)

ماشین ۳		ماشین ۲		ماشین ۱	
x	y	x	y	x	y
۲۱	۳۵	۲۲	۴۰	۲۰	۳۶
۲۳	۳۷	۲۸	۴۸	۲۵	۴۱
۲۶	۴۲	۲۲	۳۹	۲۴	۳۹
۲۱	۳۴	۳۰	۴۵	۲۵	۴۲
۱۵	۳۲	۲۸	۴۴	۳۲	۴۹
۱۰۶	۱۸۰	۱۳۰	۲۱۶	۱۲۶	۲۰۷



شکل ۱.۱۷ مقاومت در برابر گسیختگی (y) نسبت به قطر (x) برای مثال ۱.۱۷.

$$S_{xy} = \sum_{i=۱}^{۳}\sum_{j=۱}^{۵} x_{ij}^{۲} - \frac{x_{..}^{۲}}{an} = (۲۰)^{۲} + (۲۵)^{۲} + \cdots + (۱۵)^{۲} - \frac{(۳۶۲)^{۲}}{(۳)(۵)} = ۲۶۱٫۷۳$$

$$S_{xy} = \sum_{i=۱}^{۳}\sum_{j=۱}^{۵} x_{ij}y_{ij} - \frac{(x_{..})(y_{..})}{an} = (۲۰)(۳۶) + (۲۵)(۴۱) + \cdots + (۱۵)(۳۲)$$
$$- \frac{(۳۶۲)(۶۰۳)}{(۳)(۵)} = ۲۸۲٫۶۰$$

$$T_{yy} = \sum_{i=۱}^{۳} \frac{y_{i.}^{۲}}{n} - \frac{y_{..}^{۲}}{an} = \frac{(۲۰۷)^{۲} + (۲۱۶)^{۲} + (۱۸۰)^{۲}}{۵} - \frac{(۶۰۳)^{۲}}{(۳)(۵)} = ۱۴۰٫۴۰$$

$$T_{xx} = \sum_{i=۱}^{۳} \frac{x_{i.}^{۲}}{n} - \frac{x_{..}^{۲}}{an} = \frac{(۱۲۶)^{۲} + (۱۳۰)^{۲} + (۱۰۶)^{۲}}{۵} - \frac{(۳۶۲)^{۲}}{(۳)(۵)} = ۶۶٫۱۳$$

$$T_{xy} = \sum_{i=۱}^{۳} \frac{x_{i.}y_{i.}}{n} - \frac{(x_{..})(y_{..})}{an} = \frac{(۱۲۶)(۲۰۷) + (۱۳۰)(۲۱۶) + (۱۰۶)(۱۸۴)}{۵}$$
$$- \frac{(۳۶۲)(۶۰۳)}{(۳)(۵)} = ۹۶٫۰۰$$

$$E_{yy} = S_{yy} - T_{yy} = ۳۴۶٫۴۰ - ۱۴۰٫۴۰ = ۲۰۶٫۰۰$$

$$E_{xx} = S_{xx} - T_{xx} = ۲۶۱٫۷۳ - ۶۶٫۱۳ = ۱۹۵٫۶۰$$

$$E_{xy} = S_{xy} - T_{xy} = ۲۸۲٫۶۰ - ۹۶٫۰۰ = ۱۸۶٫۶۰$$

از معادلهٔ (۱۵.۱۷) به دست می آوریم

$$\begin{aligned} SS'_E &= S_{yy} - (S_{xy})^{۲}/S_{xx} \\ &= ۳۴۶{,}۴۰ - (۲۸۲{,}۶۰)^{۲}/(۲۶۱{,}۷۳) \\ &= ۴۱{,}۲۷ \end{aligned}$$

که $۱۳ = (۳)(۵) - ۲ = an - ۲$ درجهٔ آزادی دارد؛ و از معادلهٔ (۱۳.۱۷) به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} SS_E &= E_{yy} - (E_{xy})^{۲}/E_{xx} \\ &= ۲۰۶{,}۰۰ - (۱۸۶{,}۶۰)^{۲}/(۱۹۵{,}۶۰) \\ &= ۲۷{,}۹۹ \end{aligned}$$

که$۱۱ = ۳(۵ - ۱) - ۱ = a(n - ۱) - ۱$ درجهٔ آزادی دارد.

برای آزمون $H_۰ : \tau_i = ۰$ مجموع مربعات

$$\begin{aligned} SS'_E - SS_E &= ۴۱{,}۲۷ - ۲۷{,}۹۹ \\ &= ۱۳{,}۲۸ \end{aligned}$$

با $۲ = ۱ - ۳ = a - ۱$ درجهٔ آزادی است. خلاصهٔ این محاسبات را در جدول ۴.۱۷ آورده‌ایم.

جدول ۴.۱۷ تحلیل کوواریانس برای داده‌های مقاومت در برابر گسیختگی

منبع تغییر	درجات آزادی	مجموع مربعات و مجموع حاصلضربها x	xy	y	تعدیل‌یافته برای رگرسیون y	درجات آزادی	میانگین مربعات
ماشینها	۲	۶۶٫۱۳	۹۶٫۰۰	۱۴۰٫۴۰			
خطا	۱۲	۱۹۵٫۶۰	۱۸۶٫۶۰	۲۰۶٫۰۰	۲۷٫۹۹	۱۱	۲٫۵۴
کل	۱۴	۲۶۱٫۷۳	۲۸۲٫۶۰	۳۴۶٫۴۰	۴۱٫۲۷	۱۳	
ماشینهای تعدیل‌شده					۱۳٫۲۸	۲	۶٫۶۴

برای آزمون متفاوت بودن مقاومت در برابر گسیختگی الیاف تولید شدهٔ ماشینها، یعنی $H_\circ : \tau_i = \circ$، از معادلهٔ (۱۶.۱۷) آمارهٔ آزمون را به‌صورت زیر حساب می‌کنیم

$$F_\circ = \frac{(SS'_E - SS_E)/(a-1)}{SS_E/[a(n-1)-1]}$$
$$= \frac{(۱۳٫۲۸)/۲}{(۲۷٫۹۹)/۱۱} = \frac{۶٫۶۴}{۲٫۵۴} = ۲٫۶۱$$

از مقایسهٔ این مقدار با $F_{\circ٫۱\circ,۲,۱۱} = ۲٫۸۶$ متوجه می‌شویم که فرض صفر را نمی‌توان رد کرد. یعنی، گواهی محکم برای اینکه مقاومت الیاف تولید شدهٔ سه ماشین تفاوت داشته باشند وجود ندارد.

برآورد ضریب رگرسیون از معادلهٔ (۱۲.۱۷) به‌صورت

$$\hat{\beta} = \frac{E_{xy}}{E_{xx}} = \frac{۱۸۶٫۶\circ}{۱۹۵٫۶\circ} = \circ٫۹۵۴\circ$$

محاسبه می‌شود. می‌توان فرض $H_\circ : \beta = \circ$ را با استفاده از معادلهٔ (۱۹.۱۷) آزمون کرد. آمارهٔ آزمون

$$F_\circ = \frac{(E_{xy})^۲/E_{xx}}{MS_E} = \frac{(۱۸۶٫۶\circ)^۲/(۱۹۵٫۶\circ)}{۲٫۵۴} = ۷\circ٫\circ۸$$

است، و چون $F_{\circ٫\circ۱,۱,۱۱} = ۹٫۶۵$، لذا فرض $\beta = \circ$ را رد می‌کنیم. بنابراین مقاومت در برابر گسیختگی و قطر بستگی خطی دارند، و تعدیلی که به وسیله تحلیل کوواریانس انجام شده لازم بوده است.

میانگینهای تیماری تعدیل‌یافته را می‌توان از معادلهٔ (۱۷.۱۷) محاسبه کرد. این میانگینهای تعدیل‌یافته عبارت‌اند از

$$\text{تعدیل‌یافته } \bar{y}_{۱.} = \bar{y}_{۱.} - \hat{\beta}(\bar{x}_{۱.} - \bar{x}_{..})$$
$$= ۴۱٫۴\circ - (\circ٫۹۵۴\circ)(۲۵٫۲\circ - ۲۴٫۱۳) = ۴\circ٫۳۸$$

$$\text{تعدیل‌یافته } \bar{y}_{۲.} = \bar{y}_{۲.} - \hat{\beta}(\bar{x}_{۲.} - \bar{x}_{..})$$
$$= ۴۳٫۲\circ - (\circ٫۹۵۴\circ)(۲۶٫\circ\circ - ۲۴٫۱۳) = ۴۱٫۴۲$$

و

$$\text{تعدیل‌یافته } \bar{y}_{۳.} = \bar{y}_{۳.} - \hat{\beta}(\bar{x}_{۳.} - \bar{x}_{..})$$
$$= ۳۶٫\circ\circ - (\circ٫۹۵۴\circ)(۲۱٫۲\circ - ۲۴٫۱۳) = ۳۸٫۸\circ$$

از مقایسهٔ میانگینهای تیماری تعدیل‌یافته با میانگینهای تیماری تعدیل‌نیافته $(\overline{y}_{i.})$، توجه کنید که میانگینهای تعدیل‌یافته بسیار به هم نزدیکترند، که نشانه‌ای دیگر بر ضرورت تحلیل کوواریانس است.

پذیره‌ای پایه‌ای در تحلیل کوواریانس آن‌است که متغیر تصادفی کمکی x تحت تأثیر تیمارها نباشد زیرا که تکنیک، اثر تغییرات در $\overline{x}_{i.}$ را حذف می‌کند. امّا، اگر بخشی از تغییر پذیری در $\overline{x}_{i.}$ مربوط به تیمارها باشد، آنگاه تحلیل کوواریانس بخشی از اثر تیماری را حذف می‌کند. پس، باید به صورتی معقول مطمئن بود که تیمارها مقادیر x_{ij} را تحت تأثیر قرار نمی‌دهند. در بعضی آزمایشها ممکن است این موضوع بنابر طبیعت متغیر تصادفی کمکی واضح باشد، درصورتی‌که در دیگر آزمایشها این ممکن است بسیار مشکوک باشد. در مثال اخیر ممکن است در قطر الیاف (x_{ij})ی تولید شدهٔ سه ماشین تفاوت باشد. در چنین حالتهایی ککران و کاکس (۱۹۵۷) پیشنهاد می‌کنند که تعیین اعتبار این پذیره تحلیل واریانس مربوط به مقادیر x_{ij} می‌تواند مفید باشد. برای مسألهٔ در دست بررسی این شیوه نتیجه می‌دهد

$$F_{\circ} = \frac{(۶۶٫۱۳)/۲}{(۱۹۵٫۶۰)/۱۲} = \frac{۳۳٫۰۷}{۱۶٫۳۰} = ۲٫۰۳$$

که از $F_{\circ٫۱۰,۲,۱۲} = ۲٫۸۱$ کمتر است، بنابراین، دلیلی بر این باور که ماشینها الیافی با قطرهای متفاوت تولید کنند وجود ندارد. ■

بررسی کفایت مدل کوواریانس مبتنی بر تحلیل مانده‌هاست. برای مدل کوواریانس، مانده‌ها عبارت‌اند از

$$e_{ij} = y_{ij} - \hat{y}_{ij}$$

که در آن، مقادیر برازانده شده عبارت‌اند از

$$\begin{aligned}\hat{y}_{ij} &= \hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\beta}(x_{ij} - \overline{x}_{..}) = \overline{y}_{..} + [\overline{y}_{i.} - \overline{y}_{..} - \hat{\beta}(\overline{x}_{i.} - \overline{x}_{..})] \\ &+ \hat{\beta}(x_{ij} - \overline{x}_{..}) = \overline{y}_{i.} + \hat{\beta}(x_{ij} - \overline{x}_{i.})\end{aligned}$$

پس،

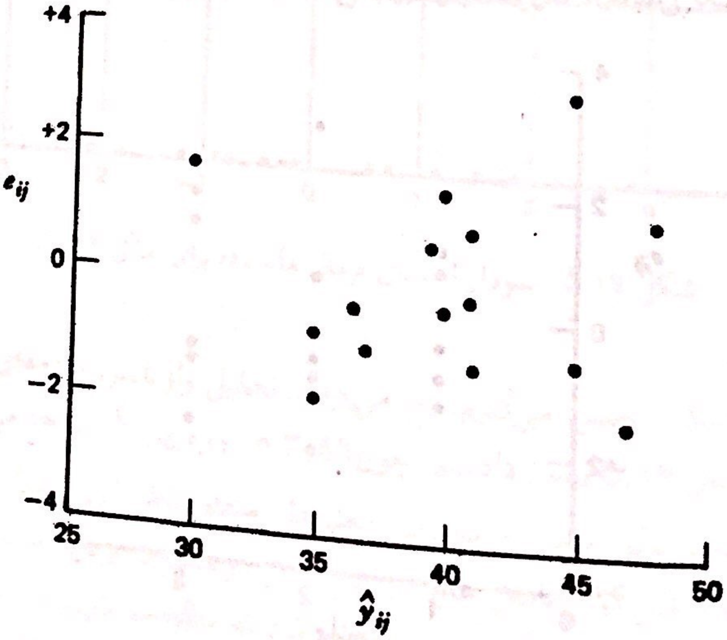
$$e_{ij} = y_{ij} - \overline{y}_{i.} - \hat{\beta}(x_{ij} - \overline{x}_{i.}) \qquad (۲۰.۱۷)$$

برای نشان دادن استفاده از معادلهٔ (۲۰.۱۷)، ماندهٔ اولین مشاهده از اولین ماشین در مثال ۱.۱۷

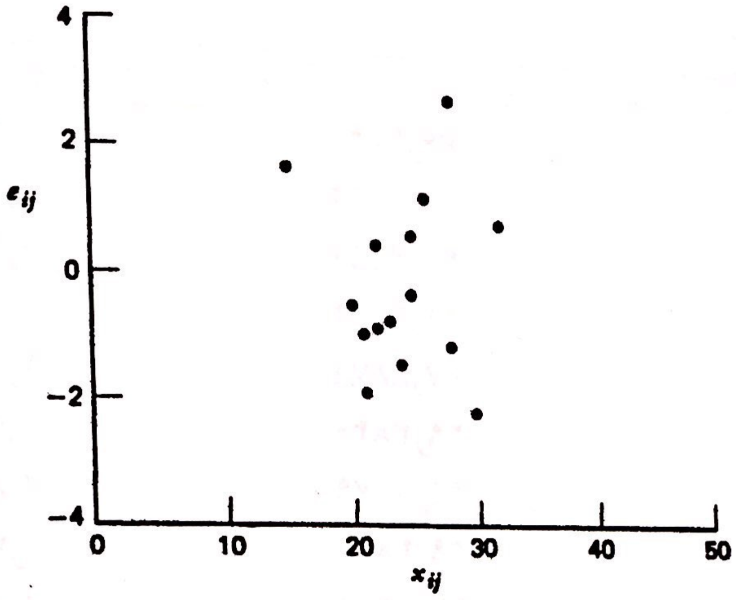
$$\begin{aligned}e_{۱۱} &= y_{۱۱} - \overline{y}_{i.} - \hat{\beta}(x_{۱۱} - \overline{x}_{۱.}) = ۳۶ - ۴۱٫۴ - (۰٫۹۵۴۰)(۲۰ - ۲۵٫۲) \\ &= ۳۶ - ۳۶٫۴۳۹۲ = -۰٫۴۳۹۲\end{aligned}$$

کل مشاهدات، مقادیر برازانده شده، و مانده‌ها را در جدول زیر فهرست کرده‌ایم:

مانده $e_{ij} = y_{ij} - \hat{y}_{ij}$	مقدار برازانده شده $\hat{y}_{ij}$	مقدار مشاهده شده y_{ij}
−۰٫۴۳۹۲	۳۶٫۴۳۹۲	۳۶
−۰٫۲۰۹۲	۴۱٫۲۰۹۲	۴۱
−۱٫۲۵۵۲	۴۰٫۲۵۵۲	۳۹
۰٫۷۹۰۸	۴۱٫۲۰۹۲	۴۲
۱٫۱۱۲۹	۴۷٫۸۸۷۱	۴۹
۰٫۶۱۶۰	۳۹٫۳۸۴۰	۴۰
۲٫۸۹۲۱	۴۵٫۱۰۷۹	۴۸
−۰٫۳۸۴۰	۳۹٫۳۸۴۰	۳۹
−۲٫۰۱۵۹	۴۷٫۰۱۵۹	۴۵
−۱٫۱۰۷۹	۴۵٫۱۰۷۹	۴۴
−۰٫۸۰۹۲	۳۵٫۸۰۹۲	۳۵
−۰٫۷۱۷۱	۳۷٫۷۱۷۱	۳۷
۱٫۴۲۰۹	۴۰٫۵۷۹۱	۴۲
−۱٫۸۰۹۲	۳۵٫۸۰۹۲	۳۴
۱٫۹۱۴۸	۳۰٫۰۸۵۲	۳۲



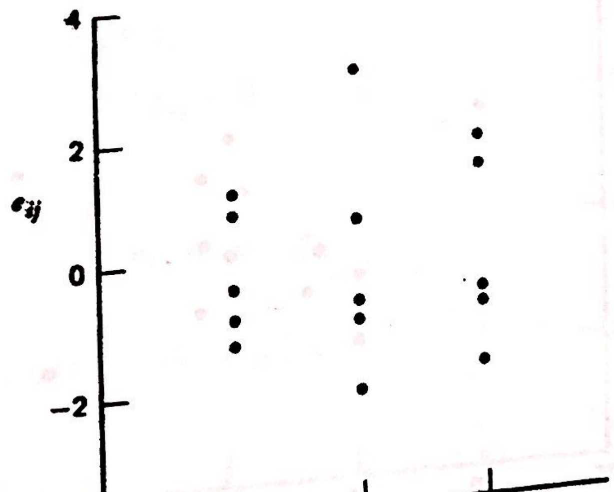
شکل ۲.۱۷ نمودار مانده‌ها نسبت به مقادیر برازانده شده برای مثال ۱.۱۷.



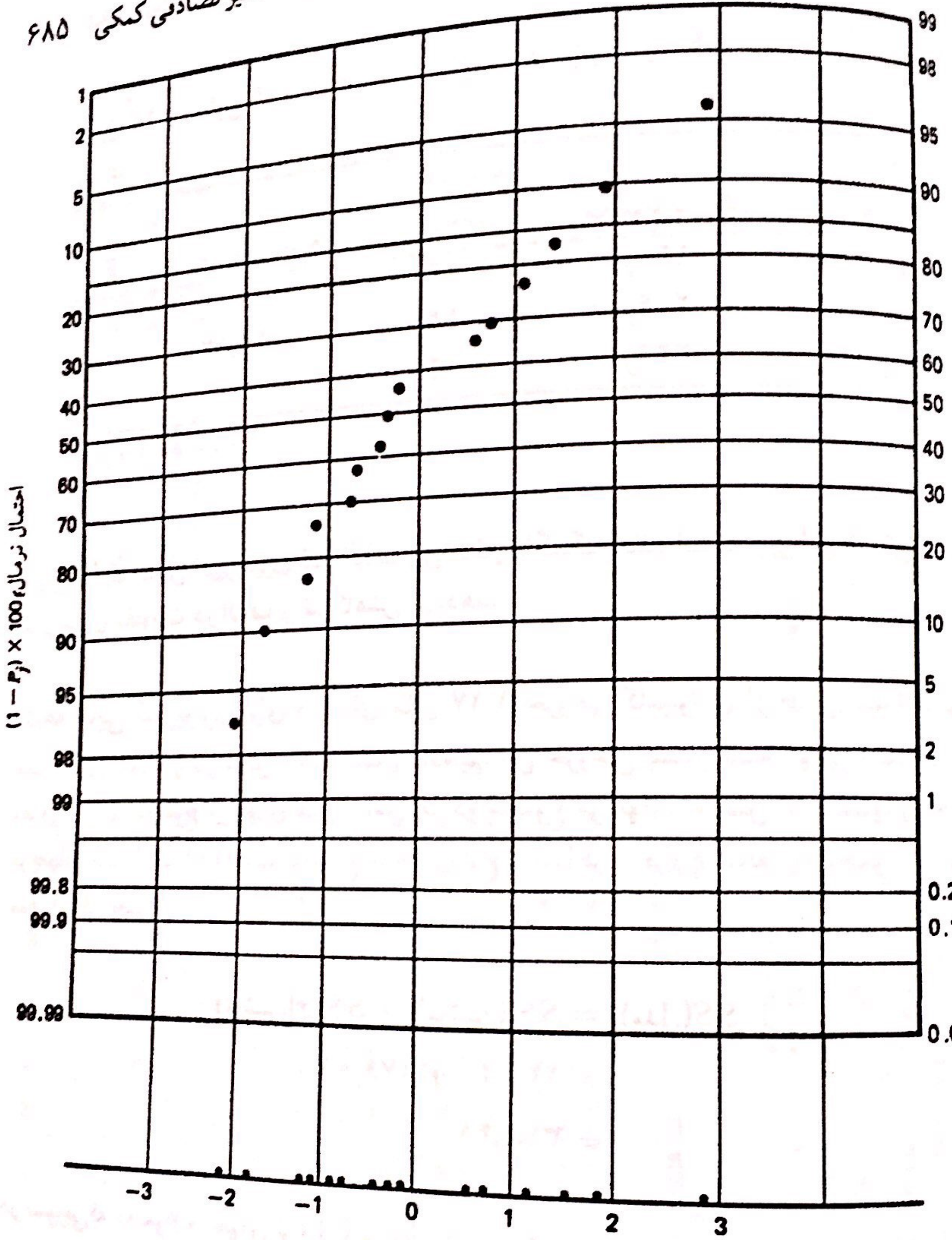
شکل ۳.۱۷ نمودار مانده‌ها نسبت به x ، قطر الیاف در مثال ۱.۱۷.

مانده‌ها نسبت به مقادیر برازانده شده $\hat{y}_{ij}$ را در شکل ۲.۱۷، نسبت به متغیر تصادفی کمکی x_{ij} را در شکل ۳.۱۷، و نسبت به ماشینها را در شکل ۴.۱۷ رسم کرده‌ایم. نمودار احتمال نرمال مانده‌ها را در شکل ۵.۱۷ نشان داده‌ایم. این نمودارها هیچ‌گونه تخطی عمده‌ای از پذیره‌ها را آشکار نمی‌کنند. پس نتیجه می‌گیریم که مدل کوواریانس [معادلهٔ (۱.۱۷)] برای داده‌های مقاومت در برابر گسیختگی مناسب است.

جالب است در این آزمایش به آنچه توجه کنیم که وقتی تحلیل کوواریانس را انجام می‌دهیم، یعنی وقتی داده‌های مقاومت در برابر گسیختگی (y) را به‌صورت آزمایش تک‌عاملی بدون توجه



شکل ۴.۱۷ نمودار مانده‌ها نسبت به ماشینها.



شکل ۵.۱۷ نمودار احتمال نرمال مانده‌ها برای مثال ۱.۱۷.

به متغیر تصادفی کمکی تحلیل می‌کنیم، رخ می‌دهد. تحلیل واریانس داده‌های مقاومت در برابر گسیختگی را در جدول ۵.۱۷ نشان داده‌ایم. چون ۳٫۸۹ = $F_{0.05,2,12}$، نتیجه می‌گیریم که ماشینها از نظر مقاومت الیاف تولید شده به صورتی معنی‌دار متفاوت‌اند. این دقیقاً نتیجه‌ای بر خلاف نتیجه‌ای است که از تحلیل کوواریانس عاید می‌شود. اگر در متفاوت بودن ماشینها از نظر اثرشان بر مقاومت الیاف مشکوک باشیم، آن‌گاه سعی خواهیم کرد که مقاومت بازده سه ماشین را یکنواخت کنیم. امّا، در این مسأله بعد از حذف اثر خطی قطر الیاف، ماشینها در مقاومت الیاف تولیدی

جدول ۵.۱۷ تحلیل نادرست داده‌های مقاومت در برابر گسیختگی به‌صورت آزمایش تک‌عاملی

منبع تغییر	مجموع مربعات	درجات آزادی	میانگین مربعات	F_0
ماشینها	۱۴۰٫۴۰	۲	۷۰٫۲۰	۴٫۰۹*
خطا	۲۰۶٫۰۰	۱۲	۱۷٫۱۷	
کل	۳۴۶٫۴۰	۱۴		

* در ۵ درصد معنی‌دار.

تفاوتی ندارند. تقلیل تغییرپذیری قطر الیاف بین ماشینها کمک کننده است، زیرا این کاهش احتمالاً تغییرپذیری مقاومت در الیاف را نیز کاهش می‌دهد.

نتیجهٔ چاپی کامپیوتری. برای داده‌های مثال ۱.۱۷ خروجی کامپیوتری از طریق شیوهٔ مدلهای خطی کلّی SAS را در شکل ۶.۱۷ نشان داده‌ایم. این خروجی بسیار شبیه آنهایی است که قبلاً معرفی کردیم. مجموع مربعهای مدل شامل هر دو مجموع مربعهای حاصل از ماشینها و مجموع مربعهای قطر الیاف (x) است. مجموع مربعهای نوع I متناظر با افراز «دنباله‌ای» مجموع مربعهای مدل است، یعنی

$$\begin{aligned} SS(\text{مدل}) &= SS(\text{ماشین}) + SS(x|\text{ماشین}) \\ &= ۱۴۰٫۴۰ + ۱۷۸٫۰۱ \\ &= ۳۱۸٫۴۱ \end{aligned}$$

در صورتی‌که مجموع مربعهای نوع III متناظر با مجموع مربعهای «اضافی» برای هر عامل است، یعنی

$$SS(\text{ماشین}|x) = ۱۳٫۲۸$$

و

$$SS(x|\text{ماشین}) = ۱۷۸٫۰۱$$

توجه کنید که $SS(\text{ماشین}|x)$ مجموع مربعهایی است که برای آزمون عدم اثر ماشین به کار می‌رود.

برنامه، میانگینهای تیماری تعدیل‌یافته را از طریق معادلهٔ (۱۷.۱۷) (SAS در نمونهٔ خروجی اینها را تحت عنوان میانگینهای کمترین مربعات یا «LSMEAN» می‌آورد.) و خطاهای معیار را نیز محاسبه می‌کند، و آمارهٔ آزمون را برای فرض صفر بودن هر میانگین تیماری تعدیل‌یافته ارائه می‌دهد. در این مثال تمام این میانگینها با صفر تفاوت دارند. برنامه، تمام جفت میانگینهای تیمار را نیز مقایسه کرده و سطح معنی‌دار بودنی که در آن سطح جفت میانگینها متفاوت‌اند نشان می‌دهد. ملاحظه می‌کنیم که میانگینهای ۲ و ۳ در سطح ۰٫۰۴۳۳ متفاوت‌اند، در صورتی‌که میانگینهای ۱ و ۳ در سطح ۰٫۱۸۰۳ تفاوت دارند، و میانگینهای ۱و۲ در سطح ۰٫۳۲۹۰ متفاوت‌اند. اگر نتیجه بگیریم که تنها میانگینهای ۲ و ۳ به صورتی معنادار متفاوت‌اند این نتیجه‌گیری منطقی است.

۳.۱۷ گسترش تحلیل به وسیلهٔ آزمون معنی‌دار بودن رگرسیون کلی

گسترش رسمی شیوهٔ آزمون $H_{\circ} : \tau_i = \circ$ در مدل کوواریانس

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta(x_{ij} - \overline{x}_{..}) + \varepsilon_{ij} \begin{cases} i = 1, 2, \cdots, a \\ j = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \qquad (۲۱.۱۷)$$

با استفاده از آزمون معنی‌دار بودن رگرسیون کلی ممکن است. برآورد پارامترهای مدل [معادلهٔ (۲۱.۱۷)] را به روش کمترین مربعات در نظر بگیرید. تابع کمترین مربعات

$$L = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}[y_{ij} - \mu - \tau_i - \beta(x_{ij} - \overline{x}_{..})]^2 \qquad (۲۲.۱۷)$$

است، و بنابر $\partial L/\partial\mu = \partial L/\partial\tau_i = \partial L/\partial\beta = \circ$ معادلات نرمال

(۲۳.۱۷ الف)

$$\mu : an\hat{\mu} + n\sum_{i=1}^{a}\hat{\tau}_i = y_{..}$$

$$\tau_i : n\hat{\mu} + n\hat{\tau}_i + \hat{\beta}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \overline{x}_{..}) = y_{i.} \qquad i = 1, 2, \cdots, a$$

(۲۳.۱۷ ب)

(۲۳.۱۷ ج)

$$\beta : \sum_{i=1}^{a}\hat{\tau}_i\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \overline{x}_{..}) + \hat{\beta}S_{xx} = S_{xy}$$

را به دست می‌آوریم.

از جمع a معادله (۲۳.۱۷ ب)، با توجه به $\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\overline{x}_{..}) = 0$ الف) را به دست می‌آوریم، بنابراین یک وابستگی خطی در معادلات نرمال وجود دارد. لذا برای به دست آوردن جواب لازم است که به معادلات (۲۳.۱۷) یک معادلهٔ مستقل خطی را اضافه کنیم. یک شرط معقول، $\sum_{i=1}^{a}\hat{\tau}_i = 0$ است. با توجه به‌این شرط، از معادله (۲۳.۱۷ الف) به دست می‌آوریم

$$\hat{\mu} = \overline{y}_{..} \qquad (۲۴.۱۷ \text{ الف})$$

و از معادله (۲۳.۱۷ب) به دست می‌آوریم

$$\hat{\tau}_i = \overline{y}_{i.} - \overline{y}_{..} - \hat{\beta}(\overline{x}_{i.} - \overline{x}_{..}) \qquad (۲۴.۱۷ \text{ ب})$$

بعد از قرار دادن مقدار $\hat{\tau}_i$، معادلهٔ (۲۳.۱۷ ج) را می‌توان نوشت

$$\sum_{i=1}^{a}(\overline{y}_{i.} - \overline{y}_{..})\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \overline{x}_{..}) - \hat{\beta}\sum_{i=1}^{a}(x_{i.} - \overline{x}_{..})\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \overline{x}_{..}) + \hat{\beta}S_{xx} = S_{xy}$$

امّا می‌بینیم که

$$\sum_{i=1}^{a}(\overline{y}_{i.} - \overline{y}_{..})\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \overline{x}_{..}) = T_{xy}$$

و

$$\sum_{i=1}^{a}(\overline{x}_{i.} - \overline{x}_{..})\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \overline{x}_{..}) = T_{xx}$$

بنابراین جواب معادلهٔ (۲۳.۱۷ج) عبارت است از

$$\hat{\beta} = \frac{S_{xy} - T_{xy}}{S_{xx} - T_{xx}} = \frac{E_{xy}}{E_{xx}}$$

که همان نتیجه‌ای است که قبلاً در بخش ۲.۱۷، معادلهٔ (۱۲.۱۷) ارائه شد.

می‌توانیم کاهش در کل مجموع مربعات حاصل از برازاندن مدل [معادلهٔ (۲۱.۱۷)] را به

خطا» محاسبه می‌شود، به طوری که اثرهای بلوکی می‌توانند حذف شوند. ضریب رگرسیونی β به وسیلهٔ

$$\hat{\beta} = \frac{E_{xy}}{E_{xx}} \tag{۳۲.۱۷}$$

برآورد می‌شود و آمارهٔ مناسب برای آزمون $H_0 : \beta = 0$

$$F_0 = \frac{(E_{xy})^2 / E_{xx}}{MS_{\text{خطا}}} \tag{۳۳.۱۷}$$

است، که در آن تعریف $MS_{\text{خطا}}$ در جدول ۶.۱۶ ملاحظه می‌شود. تحت فرض صفر، F_0 توزیع $F_{1,ab-a-b}$ دارد، لذا فرض $H_0 : \beta = 0$ رد می‌شود هرگاه $F_0 > F_{\alpha,1,ab-a-b}$.

تحلیل کوواریانس را می‌توان به مربعهای لاتین، بلوکهای ناقص، عاملیها، طرحهای تودرتو و غیره تعمیم داد. همچنین می‌توان از آن در مقایسهٔ شیبهای چندین خط رگرسیونی استفاده کرد. بالاخره، ممکن است وضعیتهایی پیش بیایند که ساختار کوواریانس چندگانه لازم شود؛ یعنی y به‌صورت غیر خطی (مثلاً، $y = \beta_1 x + \beta_2 x^2$) به x وابسته باشد، یا دو یا چند متغیر تصادفی کمکی وجود داشته باشند. از اینها و موضوعات وابستهٔ دیگر در ککران (۱۹۵۷)، دانکن (۱۹۷۴)، و فدرر [1] (۱۹۵۷) و اُستل [2] (۱۹۶۳) بحث شده است. تقریباً تمام مطالب دو مرجع آخر که در شمارهٔ سوم مجلهٔ *Biometrics* (۱۹۵۷) آمده‌اند به تحلیل کوواریانس اختصاص دارد.

۵.۱۷ مسائل

۱.۱۷ یک توزیع کنندهٔ نوشابه، سودمندی روشهای تحویل نوشابه‌ها را مطالعه می‌کند. سه نوع چرخ‌دستی متفاوت تهیه شده و به روشهای مهندسی کارخانه، آزمایشی انجام شده است. متغیر مورد نظر زمان تحویل برحسب دقیقه (y) است؛ اما زمان تحویل قویاً وابسته به (x)، تعداد جعبه‌هاست. از هر چرخ دستی چهار بار استفاده شده و داده‌های زیر به‌دست آمده‌اند. این داده‌ها را تحلیل و نتایج مناسب را استخراج کنید.

---
1. Federer 2. Ostle

	انواع چرخ دستی				
۳		۲		۱	
x	y	x	y	x	y
۳۸	۴۰	۲۶	۲۵	۲۴	۲۷
۲۶	۲۲	۳۲	۳۵	۴۰	۴۴
۵۰	۵۳	۴۲	۴۶	۳۵	۳۳
۲۰	۱۸	۲۵	۲۶	۴۰	۴۱

۲.۱۷ برای داده‌های مسألهٔ ۱.۱۷ میانگینهای تیماری تعدیل‌یافته و خطای معیار میانگینهای تیماری تعدیل‌یافته را حساب کنید.

۳.۱۷ برای تحلیل کوواریانس تک‌عاملی، مجموع مربعات و مجموع حاصلضربها به صورت زیرند. تحلیل را کامل کرده و نتایج مناسب را استخراج کنید.

		مجموع مربعات و مجموع حاصلضربها		
منبع تغییر	درجات آزادی	x	xy	y
تیمار	۳	۱۵۰۰	۱۰۰۰	۶۵۰
خطا	۱۲	۶۰۰۰	۱۲۰۰	۵۵۰
کل	۱۵	۷۵۰۰	۲۲۰۰	۱۲۰۰

۴.۱۷ برای مثال ۱.۱۷ خطای معیار میانگینهای تیماری تعدیل‌یافته را بیابید.

۵.۱۷ می‌خواهیم چهار فرمولبندی متفاوت یک چسب صنعتی را آزمون کنیم. مقاومت کششی چسب نیز وابسته به ضخامت است. برای هر فرمولبندی، پنج مشاهده از مقاومت (y) برحسب پوند و ضخامت (x) برحسب ۰٫۰۱ اینچ به دست آمده‌اند. داده‌ها را در جدول زیر نشان داده‌ایم. این داده‌ها را تحلیل و نتایج مناسب را استخراج کنید.

فرمولبندی چسب							
۱		۲		۳		۴	
y	x	y	x	y	x	y	x
۴۶٫۵	۱۳	۴۸٫۷	۱۲	۴۶٫۳	۱۵	۴۴٫۷	۱۶
۴۵٫۹	۱۴	۴۹٫۰	۱۰	۴۷٫۱	۱۴	۴۳٫۰	۱۵
۴۹٫۸	۱۲	۵۰٫۱	۱۱	۴۸٫۹	۱۱	۵۱٫۰	۱۰
۴۶٫۱	۱۲	۴۸٫۵	۱۲	۴۸٫۲	۱۱	۴۸٫۱	۱۲
۴۴٫۳	۱۴	۴۵٫۲	۱۴	۵۰٫۳	۱۰	۴۸٫۶	۱۱

۶.۱۷ برای داده‌های مسألهٔ ۵.۱۷، میانگینهای تیماری تعدیل‌یافته و خطاهای معیار آنها را حساب کنید.

۷.۱۷ مهندسی در یک دستگاه تراش اثر سرعت دستگاه را در نرخ براده‌برداری مطالعه می‌کند. امّا نرخ براده‌برداری نیز وابسته به سختی قطعهٔ تحت آزمون است. برای هر سرعت دستگاه، پنج مشاهده داشته‌ایم. میزان براده‌برداری (y) و سختی قطعهٔ تحت آزمون (x) را در جدول زیر نشان داده‌ایم. با استفاده از تحلیل کوواریانس داده‌ها را تحلیل کنید.

سرعت دستگاه (دور در دقیقه)					
۱۰۰۰		۱۲۰۰		۱۴۰۰	
y	x	y	x	y	x
۶۸	۱۲۰	۱۱۲	۱۶۵	۱۱۸	۱۷۵
۹۰	۱۴۰	۹۴	۱۴۰	۸۲	۱۳۲
۹۸	۱۵۰	۶۵	۱۲۰	۷۳	۱۲۴
۷۷	۱۲۵	۷۴	۱۲۵	۹۲	۱۴۱
۸۸	۱۳۶	۸۵	۱۳۳	۸۰	۱۳۰

۸.۱۷ نشان دهید که در تحلیل کوواریانس تک‌عاملی با یک متغیر تصادفی کمکی، بازهٔ اطمینان $100(1-\alpha)$ درصد برای iامین میانگین تیماری تعدیل‌یافته به صورت

$$\bar{y}_{i.} - \hat{\beta}(\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..}) \pm t_{\alpha/2, a(n-1)-1}\left[MS_{\text{خطا}}\left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})^2}{E_{xx}}\right)\right]^{1/2}$$

است. با استفاده از این فرمول یک بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین تعدیل یافته ماشین ۱ در مثال ۱.۱۷ محاسبه کنید.

۹.۱۷ نشان دهید که در تحلیل کوواریانس تک‌عاملی با یک متغیر تصادفی کمکی، خطای معیار برای اختلاف بین هر دو میانگین تیماری تعدیل‌یافته به‌صورت

$$S_{\text{تعدیل‌یافته } \overline{y}_{i.} - \text{تعدیل‌یافته } \overline{y}_{j.}} = \left[MS_{\text{خطا}}\left(\frac{۲}{n} + \frac{(\overline{x}_{i.} - \overline{x}_{j.})^{۲}}{E_{xx}}\right)\right]^{۱/۲}$$

است.

۱۰.۱۷ یک طرح بلوکی کامل تصادفی‌شده با یک متغیر تصادفی کمکی، مجموع مربعات و مجموع حاصلضربهای تصحیح شده را به‌صورت جدول زیر ارائه داده است. تحلیل کوواریانس را کامل کرده و نتایج مناسب را استخراج کنید.

منبع‌تغییر	درجات آزادی	مجموع مربعات و مجموع حاصلضربها x	xy	y
بلوکها	۸	۲۰۰	۶۰۰	۱۲۰۰
تیمارها	۴	۱۰۰	۳۰۰	۸۰۰
خطا	۳۲	۶۰۰	۷۰۰	۱۴۰۰

۱۱.۱۷ برای طرح بلوکی کامل تصادفی‌شده با یک متغیر تصادفی کمکی، معادلات نرمال را بنویسید. برای تعیین برآوردکننده‌های پارامترهای مدل، معادلات نرمال را حل کنید.

۱۲.۱۷ درچگونگی استفاده از منحنیهای مشخصهٔ عملکرد تحلیل واریانس برای تحلیل کوواریانس بحث کنید.

III. نقاط درصد توزیع χ^2 *

ν	.995	.990	.975	.950	.500	.050	.025	.010	.005
				α					
1	0.00 +	0.00 +	0.00 +	0.00 +	0.45	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.01	0.02	0.05	0.10	1.39	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.07	0.11	0.22	0.35	2.37	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.21	0.30	0.48	0.71	3.36	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	0.83	1.15	4.35	11.07	12.38	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	5.35	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	6.35	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	7.34	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	8.34	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	9.34	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	10.34	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	11.34	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	12.34	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	13.34	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.27	7.26	14.34	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	15.34	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	16.34	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	17.34	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	18.34	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	19.34	31.41	34.17	37.57	40.00
25	10.52	11.52	13.12	14.61	24.34	37.65	40.65	44.31	46.93
30	13.79	14.95	16.79	18.49	29.34	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	39.34	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	49.33	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	59.33	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	69.33	90.53	95.02	100.42	104.22
80	51.17	53.54	57.15	60.39	79.33	101.88	106.63	112.33	116.32
90	59.20	61.75	65.65	69.13	89.33	113.14	118.14	124.12	128.30
100	67.33	70.06	74.22	77.93	99.33	124.34	129.56	135.81	140.17

ν = درجات آزادی.

* با اجازه از،

Biometrika Tables for Statisticians, Vol. 1, 3 rd edition by E. S. Pearson and H. O. Hartley, Cambridge University Press, Cambridge, 1966

نسخه‌برداری شده است.

IV. نقاط درصد توزیع F*

$F_{0.25,\nu_1,\nu_2}$

درجات آزادی صورت (ν_1)

درجات آزادی مخرج (ν_2)

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	5.83	7.50	8.20	8.58	8.82	8.98	9.10	9.19	9.26	9.32	9.41	9.49	9.58	9.63	9.67	9.71	9.76	9.80	9.85
2	2.57	3.00	3.15	3.23	3.28	3.31	3.34	3.35	3.37	3.38	3.39	3.41	3.43	3.43	3.44	3.45	3.46	3.47	3.48
3	2.02	2.28	2.36	2.39	2.41	2.42	2.43	2.44	2.44	2.44	2.45	2.46	2.46	2.46	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47
4	1.81	2.00	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08
5	1.69	1.85	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.88	1.88	1.88	1.88	1.87	1.87	1.87
6	1.62	1.76	1.78	1.79	1.79	1.78	1.78	1.78	1.77	1.77	1.77	1.76	1.76	1.75	1.75	1.75	1.74	1.74	1.74
7	1.57	1.70	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.70	1.69	1.68	1.68	1.67	1.67	1.66	1.66	1.65	1.65	1.65
8	1.54	1.66	1.67	1.66	1.66	1.65	1.64	1.64	1.63	1.63	1.62	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.58
9	1.51	1.62	1.63	1.63	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.56	1.55	1.54	1.54	1.53	1.53
10	1.49	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.52	1.51	1.51	1.50	1.49	1.48
11	1.47	1.58	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.49	1.48	1.47	1.47	1.46	1.45
12	1.46	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.45	1.44	1.43	1.42
13	1.45	1.55	1.55	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.42	1.41	1.40
14	1.44	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.41	1.41	1.40	1.39	1.38
15	1.43	1.52	1.52	1.51	1.49	1.48	1.47	1.46	1.46	1.45	1.44	1.43	1.41	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36
16	1.42	1.51	1.51	1.50	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34
17	1.42	1.51	1.50	1.49	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33
18	1.41	1.50	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.42	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32
19	1.41	1.49	1.49	1.47	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.41	1.40	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.30
20	1.40	1.49	1.48	1.47	1.45	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.29
21	1.40	1.48	1.48	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.28
22	1.40	1.48	1.47	1.45	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.39	1.37	1.36	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28
23	1.39	1.47	1.47	1.45	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.28	1.27
24	1.39	1.47	1.46	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.38	1.36	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28	1.26
25	1.39	1.47	1.46	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.34	1.33	1.32	1.31	1.29	1.28	1.27	1.25
26	1.38	1.46	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.37	1.35	1.34	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28	1.26	1.25
27	1.38	1.46	1.45	1.43	1.42	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.28	1.27	1.26	1.24
28	1.38	1.46	1.45	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.34	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.27	1.25	1.24
29	1.38	1.45	1.45	1.43	1.41	1.40	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.32	1.31	1.30	1.29	1.27	1.26	1.25	1.23
30	1.38	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.32	1.30	1.29	1.28	1.27	1.26	1.24	1.23
40	1.36	1.44	1.42	1.40	1.39	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.31	1.30	1.28	1.26	1.25	1.24	1.22	1.21	1.19
60	1.35	1.42	1.41	1.38	1.37	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.27	1.25	1.24	1.22	1.21	1.19	1.17	1.15
20	1.34	1.40	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.26	1.24	1.22	1.21	1.19	1.18	1.16	1.13	1.10
∞	1.32	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.29	1.28	1.27	1.25	1.24	1.22	1.19	1.18	1.16	1.14	1.12	1.08	1.00

ν = درجات آزادی

* با اجازه از، *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 1, 3rd edition by E. S. Pearson and H. O. Hartley, Cambridge University Press, Cambridge, 1966 نسخه‌برداری شده است.

IV. نقاط درصد توزیع F (ادامه)

$F_{0.10, \nu_1, \nu_2}$

ν_2 \ ν_1 (درجات آزادی صورت (ν_1))	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.10
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67	1.63
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53	1.49
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.03	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17	1.00

درجات آزادی مخرج (ν_2)

Scanned with CamScanner

IV. نقاط درصد توزیع F (ادامه)

$F_{0.05,\nu_1,\nu_2}$

درجات آزادی صورت (ν_1) — درجات آزادی مخرج (ν_2)

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.55	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

IV. نقاط درصد توزیع F (ادامه)

$F_{0.025,\nu_1,\nu_2}$

درجات آزادی صورت (ν_1) — درجات آزادی مخرج (ν_2)

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6	976.7	984.9	993.1	997.2	1001	1006	1010	1014	1018
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	5.59	4.20	1.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00

VII. دامنه‌های معنی‌دار برای آزمون دامنهٔ چندگانهٔ دانکن *

$r_{0.01}(p, f)$

f	p = 2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50	100
1	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0
2	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0
3	8.26	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	8.9	9.0	9.0	9.3	9.3	9.3
4	6.51	6.8	6.9	7.0	7.1	7.1	7.2	7.2	7.3	7.5	7.5	7.5
5	5.70	5.96	6.11	6.18	6.26	6.33	6.40	6.44	6.5	6.8	6.8	6.8
6	5.24	5.51	5.65	5.73	5.81	5.88	5.95	6.00	6.0	6.3	6.3	6.3
7	4.95	5.22	5.37	5.45	5.53	5.61	5.69	5.73	5.8	6.0	6.0	6.0
8	4.74	5.00	5.14	5.23	5.32	5.40	5.47	5.51	5.5	5.8	5.8	5.8
9	4.60	4.86	4.99	5.08	5.17	5.25	5.32	5.36	5.4	5.7	5.7	5.7
10	4.48	4.73	4.88	4.96	5.06	5.13	5.20	5.24	5.28	5.55	5.55	5.55
11	4.39	4.63	4.77	4.86	4.94	5.01	5.06	5.12	5.15	5.39	5.39	5.39
12	4.32	4.55	4.68	4.76	4.84	4.92	4.96	5.02	5.07	5.26	5.26	5.26
13	4.26	4.48	4.62	4.69	4.74	4.84	4.88	4.94	4.98	5.15	5.15	5.15
14	4.21	4.42	4.55	4.63	4.70	4.78	4.83	4.87	4.91	5.07	5.07	5.07
15	4.17	4.37	4.50	4.58	4.64	4.72	4.77	4.81	4.84	5.00	5.00	5.00
16	4.13	4.34	4.45	4.54	4.60	4.67	4.72	4.76	4.79	4.94	4.94	4.94
17	4.10	4.30	4.41	4.50	4.56	4.63	4.68	4.73	4.75	4.89	4.89	4.89
18	4.07	4.27	4.38	4.46	4.53	4.59	4.64	4.68	4.71	4.85	4.85	4.85
19	4.05	4.24	4.35	4.43	4.50	4.56	4.61	4.64	4.67	4.82	4.82	4.82
20	4.02	4.22	4.33	4.40	4.47	4.53	4.58	4.61	4.65	4.79	4.79	4.79
30	3.89	4.06	4.16	4.22	4.32	4.36	4.41	4.45	4.48	4.65	4.71	4.71
40	3.82	3.99	4.10	4.17	4.24	4.30	4.34	4.37	4.41	4.59	4.69	4.69
60	3.76	3.92	4.03	4.12	4.17	4.23	4.27	4.31	4.34	4.53	4.66	4.66
100	3.71	3.86	3.98	4.06	4.11	4.17	4.21	4.25	4.29	4.48	4.64	4.65
∞	3.64	3.80	3.90	3.98	4.04	4.09	4.14	4.17	4.20	4.41	4.60	4.68

f = درجات آزادی.

* با اجازه از،

Multiple Range and Multiple F Tests, by D. B. Duncan, Biometrics, Vol. 1, No. 1, pp. 1-42, 1955

نسخه‌برداری شده است.

α

$\alpha = 0.05$

VII. دامنه‌های معنی‌دار برای آزمون دامنهٔ چندگانهٔ دانکن (ادامه)

	p											
f	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50	100
1	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0
2	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09
3	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50
4	3.93	4.01	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02
5	3.64	3.74	3.79	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83
6	3.46	3.58	3.64	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68
7	3.35	3.47	3.54	3.58	3.60	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61
8	3.26	3.39	3.47	3.52	3.55	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56
9	3.20	3.34	3.41	3.47	3.50	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52
10	3.15	3.30	3.37	3.43	3.46	3.47	3.47	3.47	3.47	3.48	3.48	3.48
11	3.11	3.27	3.35	3.39	3.43	3.44	3.45	3.46	3.46	3.48	3.48	3.48
12	3.08	3.23	3.33	3.36	3.40	3.42	3.44	3.44	3.46	3.48	3.48	3.48
13	3.06	3.21	3.30	3.35	3.38	3.41	3.42	3.44	3.45	3.47	3.47	3.47
14	3.03	3.18	3.27	3.33	3.37	3.39	3.41	3.42	3.44	3.47	3.47	3.47
15	3.01	3.16	3.25	3.31	3.36	3.38	3.40	3.42	3.43	3.47	3.47	3.47
16	3.00	3.15	3.23	3.30	3.34	3.37	3.39	3.41	3.43	3.47	3.47	3.47
17	2.98	3.13	3.22	3.28	3.33	3.36	3.38	3.40	3.42	3.47	3.47	3.47
18	2.97	3.12	3.21	3.27	3.32	3.35	3.37	3.39	3.41	3.47	3.47	3.47
19	2.96	3.11	3.19	3.26	3.31	3.35	3.37	3.39	3.41	3.47	3.47	3.47
20	2.95	3.10	3.18	3.25	3.30	3.34	3.36	3.38	3.40	3.47	3.47	3.47
30	2.89	3.04	3.12	3.20	3.25	3.29	3.32	3.35	3.37	3.47	3.47	3.47
40	2.86	3.01	3.10	3.17	3.22	3.27	3.30	3.33	3.35	3.47	3.47	3.47
60	2.83	2.98	3.08	3.14	3.20	3.24	3.28	3.31	3.33	3.47	3.48	3.48
100	2.80	2.95	3.05	3.12	3.18	3.22	3.26	3.29	3.32	3.47	3.53	3.53
∞	2.77	2.92	3.02	3.09	3.15	3.19	3.23	3.26	3.29	3.47	3.61	3.67

f = درجات آزادی

VIII. نقاط درصد آمارهٔ دامنهٔ استودنت‌شده *.

$q_{۰٫۰۱}(p, f)$

	p																		
f	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	90.0	135	164	186	202	216	227	237	246	253	260	266	272	227	282	286	290	294	198
2	14.0	19.0	22.3	24.7	26.6	28.2	29.5	30.7	31.7	32.6	33.4	34.1	34.8	35.4	36.0	36.5	37.0	37.5	37.9
3	8.26	10.6	12.2	13.3	14.2	15.0	15.6	16.2	16.7	17.1	17.5	17.9	18.2	18.5	18.8	19.1	19.3	19.5	19.8
4	6.51	8.12	9.17	9.96	10.6	11.1	11.5	11.9	12.3	12.6	12.8	13.1	13.3	13.5	13.7	13.9	14.1	14.2	14.4
5	5.70	6.97	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.24	10.48	10.70	10.89	11.08	11.24	11.40	11.55	11.68	11.81	11.93
6	5.24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10	9.30	9.49	9.65	9.81	9.95	10.08	10.21	10.32	10.43	10.54
7	4.95	5.92	6.54	7.01	7.37	7.68	7.94	8.17	8.37	8.55	8.71	8.86	9.00	9.12	9.24	9.35	9.46	9.55	9.65
8	4.74	5.63	6.20	6.63	6.96	7.24	7.47	7.68	7.87	8.03	8.18	8.31	8.44	8.55	8.66	8.76	8.85	8.94	9.03
9	4.60	5.43	5.96	6.35	6.66	6.91	7.13	7.32	7.49	7.65	7.78	7.91	8.03	8.13	8.23	9.32	8.41	8.49	8.57
10	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21	7.36	7.48	7.60	7.71	7.81	7.91	7.99	8.07	8.15	8.22
11	4.39	5.14	5.62	5.97	6.25	6.48	6.67	6.84	6.99	7.13	7.25	7.36	7.46	7.56	7.65	7.73	7.81	7.88	7.95
12	4.32	5.04	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81	6.94	7.06	7.17	7.26	7.36	7.44	7.52	7.59	7.66	7.73
13	4.26	4.96	5.40	5.73	5.98	6.19	6.37	6.53	6.67	6.79	6.90	7.01	7.10	7.19	7.27	7.34	7.42	7.48	7.55
14	4.21	4.89	5.32	5.63	5.88	6.08	6.26	6.41	6.54	6.66	6.77	6.87	6.96	7.05	7.12	7.20	7.27	7.33	7.39
15	4.17	4.83	5.25	5.56	5.80	5.99	6.16	6.31	6.44	6.55	6.66	6.76	6.84	6.93	7.00	7.07	7.14	7.20	7.26
16	4.13	4.78	5.19	5.49	5.72	5.92	6.08	6.22	6.35	6.46	6.56	6.66	6.74	6.82	6.90	6.97	7.03	7.09	7.15
17	4.10	4.74	5.14	5.43	5.66	5.85	6.01	6.15	6.27	6.38	6.48	6.57	6.66	6.73	6.80	6.87	6.94	7.00	7.05
18	4.07	4.70	5.09	5.38	5.60	5.79	5.94	6.08	6.20	6.31	6.41	6.50	6.58	6.65	6.72	6.79	6.85	6.91	6.96
19	4.05	4.67	5.05	5.33	5.55	5.73	5.89	6.02	6.14	6.25	6.34	6.43	6.51	6.58	6.65	6.72	6.78	6.84	6.89
20	4.02	4.64	5.02	5.29	5.51	5.69	5.84	5.97	6.09	6.19	6.29	6.37	6.45	6.52	6.59	6.65	6.71	6.76	6.82
24	3.96	4.54	4.91	5.17	5.37	5.54	5.69	5.81	5.92	6.02	6.11	6.19	6.26	6.33	6.39	6.45	6.51	6.56	6.61
30	3.89	4.45	4.80	5.05	5.24	5.40	5.54	5.65	5.76	5.85	5.93	6.01	6.08	6.14	6.20	6.26	6.31	6.36	6.41
40	3.82	4.37	4.70	4.93	5.11	5.27	5.39	5.50	5.60	5.69	5.77	5.84	5.90	5.96	6.02	6.07	6.12	6.17	6.21
60	3.76	4.28	4.60	4.82	4.99	5.13	5.25	5.36	5.45	5.53	5.60	5.67	5.73	5.79	5.84	5.89	5.93	5.98	6.02
120	3.70	4.20	4.50	4.71	4.87	5.01	5.12	5.21	5.30	5.38	5.44	5.51	5.56	5.61	5.66	5.71	5.75	5.79	5.83
∞	3.64	4.12	4.40	4.60	4.76	4.88	4.99	5.08	5.16	5.23	5.29	5.35	5.40	5.45	5.49	5.54	5.57	5.61	5.65

f = درجات آزادی.

* با اجازه از

"Extended and Corrected Tables of the Upper Percentage Points of the Studentized Range." *Biometrika*, Vol, 39, pp. 192-193, 1952, نسخه‌برداری شده است.

VIII. نقاط درصد آمارهٔ دامنهٔ استودنت‌شده (ادامه)

2

$q_{0.05}(p, f)$

f	p = 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	18.1	26.7	32.8	37.2	40.5	43.1	45.4	47.3	49.1	50.6	51.9	53.2	54.3	55.4	56.3	57.2	58.0	58.8	59.6
2	6.09	8.28	9.80	10.89	11.73	12.43	13.03	13.54	13.99	14.39	14.75	15.08	15.38	15.65	15.91	16.14	16.36	16.57	16.77
3	4.50	5.88	6.83	7.51	8.04	8.47	8.85	9.18	9.46	9.72	9.95	10.16	10.35	10.52	10.69	10.84	10.98	11.12	11.24
4	3.93	5.00	5.76	6.31	6.73	7.06	7.35	7.60	7.83	8.03	8.21	8.37	8.52	8.67	8.80	8.92	9.03	9.14	9.24
5	3.61	4.54	5.18	5.64	5.99	6.28	6.52	6.74	6.93	7.10	7.25	7.39	7.52	7.64	7.75	7.86	7.95	8.04	8.13
6	3.46	4.34	4.90	5.31	5.63	5.89	6.12	6.32	6.49	6.65	6.79	6.92	7.04	7.14	7.24	7.34	7.43	7.51	7.59
7	3.34	4.16	4.68	5.06	5.35	5.59	5.80	5.99	6.15	6.29	6.42	6.54	6.65	6.75	6.84	6.93	7.01	7.08	7.16
8	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.05	6.18	6.29	6.39	6.48	6.57	6.65	6.73	6.80	6.87
9	3.20	3.95	4.42	4.76	5.02	5.24	5.43	5.60	5.74	5.87	5.98	6.09	6.19	6.28	6.36	6.44	6.51	6.58	6.65
10	3.15	3.88	4.33	4.66	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72	5.83	5.93	6.03	6.12	6.20	6.27	6.34	6.41	6.47
11	3.11	3.82	4.26	4.58	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	5.61	5.71	5.81	5.90	5.98	6.06	6.14	6.20	6.27	6.33
12	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.40	5.51	5.61	5.71	5.80	5.88	5.95	6.02	6.09	6.15	6.21
13	3.06	3.73	4.15	4.46	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	5.43	5.53	5.63	5.71	5.79	5.86	5.93	6.00	6.06	6.11
14	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36	5.46	5.56	5.64	5.72	5.79	5.86	5.92	5.98	6.03
15	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08	5.20	5.31	5.40	5.49	5.57	5.65	5.72	5.79	5.85	5.91	5.96
16	3.00	3.65	4.05	4.34	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.26	5.35	5.44	5.52	5.59	5.66	5.73	5.79	5.84	5.90
17	2.98	3.62	4.02	4.31	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11	5.21	5.31	5.39	5.47	5.55	5.61	5.68	5.74	5.79	5.84
18	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.83	4.96	5.07	5.17	5.27	5.35	5.43	5.50	5.57	5.63	5.69	5.74	5.79
19	2.96	3.59	3.98	4.26	4.47	4.64	4.79	4.92	5.04	5.14	5.23	5.32	5.39	5.46	5.53	5.59	5.65	5.70	5.75
20	2.95	3.58	3.96	4.24	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	5.11	5.20	5.28	5.36	5.43	5.50	5.56	5.61	5.66	5.71
24	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92	5.01	5.10	5.18	5.25	5.32	5.38	5.44	5.50	5.55	5.59
30	2.89	3.48	3.84	4.11	4.30	4.46	4.60	4.72	4.83	4.92	5.00	5.08	5.15	5.21	5.27	5.33	5.38	5.43	5.48
40	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.74	4.82	4.90	4.98	5.05	5.11	5.17	5.22	5.27	5.32	5.36
60	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	4.73	4.81	4.88	4.94	5.00	5.06	5.11	5.15	5.20	5.24
120	2.80	3.36	3.69	3.92	4.10	4.24	4.36	4.47	4.56	4.64	4.71	4.78	4.84	4.90	4.95	5.00	5.04	5.09	5.13
∞	2.77	3.32	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47	4.55	4.62	4.68	4.74	4.80	4.84	4.89	4.93	4.97	5.01

f = درجات آزادی

α

IX. مقادیر بحرانی برای آزمون دانت در مقایسهٔ تیمارها با یک شاهد*

$d_{\text{۰٫۰۵}}(a - \text{۱}, f)$

مقایسه‌های دوطرفه

f	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$a-$ ۱ = تعداد میانگینهای تیماری (بجز شاهد)								
5	2.57	3.03	3.29	3.48	3.62	3.73	3.82	3.90	3.97
6	2.45	2.86	3.10	3.26	3.39	3.49	3.57	3.64	3.71
7	2.36	2.75	2.97	3.12	3.24	3.33	3.41	3.47	3.53
8	2.31	2.67	2.88	3.02	3.13	3.22	3.29	3.35	3.41
9	2.26	2.61	2.81	2.95	3.05	3.14	3.20	3.26	3.32
10	2.23	2.57	2.76	2.89	2.99	3.07	3.14	3.19	3.24
11	2.20	2.53	2.72	2.84	2.94	3.02	3.08	3.14	3.19
12	2.18	2.50	2.68	2.81	2.90	2.98	3.04	3.09	3.14
13	2.16	2.48	2.65	2.78	2.87	2.94	3.00	3.06	3.10
14	2.14	2.46	2.63	2.75	2.84	2.91	2.97	3.02	3.07
15	2.13	2.44	2.61	2.73	2.82	2.89	2.95	3.00	3.04
16	2.12	2.42	2.59	2.71	2.80	2.87	2.92	2.97	3.02
17	2.11	2.41	2.58	2.69	2.78	2.85	2.90	2.95	3.00
18	2.10	2.40	2.56	2.68	2.76	2.83	2.89	2.94	2.98
19	2.09	2.39	2.55	2.66	2.75	2.81	2.87	2.92	2.96
20	2.09	2.38	2.54	2.65	2.73	2.80	2.86	2.90	2.95
24	2.06	2.35	2.51	2.61	2.70	2.76	2.81	2.86	2.90
30	2.04	2.32	2.47	2.58	2.66	2.72	2.77	2.82	2.86
40	2.02	2.29	2.44	2.54	2.62	2.68	2.73	2.77	2.81
60	2.00	2.27	2.41	2.51	2.58	2.64	2.69	2.73	2.77
120	1.98	2.24	2.38	2.47	2.55	2.60	2.65	2.69	2.73
∞	1.96	2.21	2.35	2.44	2.51	2.57	2.61	2.65	2.69

f = درجات آزادی.

* با اجازه از،

C. W. Dunnett, "New Tables for Multiple Comparison with a Control", *Biometrics*, Vol. 20, No. 3, 1964, and from C. W. Dunnett, "A Multiple Comparison Procedure for Comparing Several Treatments with a Control", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 50, 1955.

نسخه‌برداری شده است.

IX. مقادیر بحرانی برای آزمون دانت در مقایسه تیمارها با یک شاهد (ادامه)

$d_{0.01}(a-1, f)$

مقایسه دوطرفه

f	$a - 1$ = تعداد میانگینهای تیماری (بجز شاهد)								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	4.03	4.63	4.98	5.22	5.41	5.56	5.69	5.80	5.89
6	3.71	4.21	4.51	4.71	4.87	5.00	5.10	5.20	5.28
7	3.50	3.95	4.21	4.39	4.53	4.64	4.74	4.82	4.89
8	3.36	3.77	4.00	4.17	4.29	4.40	4.48	4.56	4.62
9	3.25	3.63	3.85	4.01	4.12	4.22	4.30	4.37	4.43
10	3.17	3.53	3.74	3.88	3.99	4.08	4.16	4.22	4.28
11	3.11	3.45	3.65	3.79	3.89	3.98	4.05	4.11	4.16
12	3.05	3.39	3.58	3.71	3.81	3.89	3.96	4.02	4.07
13	3.01	3.33	3.52	3.65	3.74	3.82	3.89	3.94	3.99
14	2.98	3.29	3.47	3.59	3.69	3.76	3.83	3.88	3.93
15	2.95	3.25	3.43	3.55	3.64	3.71	3.78	3.83	3.88
16	2.92	3.22	3.39	3.51	3.60	3.67	3.73	3.78	3.83
17	2.90	3.19	3.36	3.47	3.56	3.63	3.69	3.74	3.79
18	2.88	3.17	3.33	3.44	3.53	3.60	3.66	3.71	3.75
19	2.86	3.15	3.31	3.42	3.50	3.57	3.63	3.68	3.72
20	2.85	3.13	3.29	3.40	3.48	3.55	3.60	3.65	3.69
24	2.80	3.07	3.22	3.32	3.40	3.47	3.52	3.57	3.61
30	2.75	3.01	3.15	3.25	3.33	3.39	3.44	3.49	3.52
40	2.70	2.95	3.09	3.19	3.26	3.32	3.37	3.41	3.44
60	2.66	2.90	3.03	3.12	3.19	3.25	3.29	3.33	3.37
120	2.62	2.85	2.97	3.06	3.12	3.18	3.22	3.26	3.29
∞	2.58	2.79	2.92	3.00	3.06	3.11	3.15	3.19	3.22

IX. مقادیر بحرانی برای آزمون دانت در مقایسهٔ تیمارها با یک شاهد (ادامه)

$d_{\text{۰٫۰۵}}(a - \text{۱}, f)$

مقایسه‌های یکطرفه

	$a -$ ۱ = تعداد میانگینهای تیماری (بجز شاهد)								
f	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	2.02	2.44	2.68	2.85	2.98	3.08	3.16	3.24	3.30
6	1.94	2.34	2.56	2.71	2.83	2.92	3.00	3.07	3.12
7	1.89	2.27	2.48	2.62	2.73	2.82	2.89	2.95	3.01
8	1.86	2.22	2.42	2.55	2.66	2.74	2.81	2.87	2.92
9	1.83	2.18	2.37	2.50	2.60	2.68	2.75	2.81	2.86
10	1.81	2.15	2.34	2.47	2.56	2.64	2.70	2.76	2.81
11	1.80	2.13	2.31	2.44	2.53	2.60	2.67	2.72	2.77
12	1.78	2.11	2.29	2.41	2.50	2.58	2.64	2.69	2.74
13	1.77	2.09	2.27	2.39	2.48	2.55	2.61	2.66	2.71
14	1.76	2.08	2.25	2.37	2.46	2.53	2.59	2.64	2.69
15	1.75	2.07	2.24	2.36	2.44	2.51	2.57	2.62	2.67
16	1.75	2.06	2.23	2.34	2.43	2.50	2.56	2.61	2.65
17	1.74	2.05	2.22	2.33	2.42	2.49	2.54	2.59	2.64
18	1.73	2.04	2.21	2.32	2.41	2.48	2.53	2.58	2.62
19	1.73	2.03	2.20	2.31	2.40	2.47	2.52	2.57	2.61
20	1.72	2.03	2.19	2.30	2.39	2.46	2.51	2.56	2.60
24	1.71	2.01	2.17	2.28	2.36	2.43	2.48	2.53	2.57
30	1.70	1.99	2.15	2.25	2.33	2.40	2.45	2.50	2.54
40	1.68	1.97	2.13	2.23	2.31	2.37	2.42	2.47	2.51
60	1.67	1.95	2.10	2.21	2.28	2.35	2.39	2.44	2.48
120	1.66	1.93	2.08	2.18	2.26	2.32	2.37	2.41	2.45
∞	1.64	1.92	2.06	2.16	2.23	2.29	2.34	2.38	2.42

IX. مقادیر بحرانی برای آزمون دانت در مقایسهٔ تیمارها با یک شاهد (ادامه)

$$d_{0.01}(a-1, f)$$

مقایسه‌های یکطرفه

f	$a-1$ = تعداد میانگینهای تیماری (بجز شاهد)								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	3.37	3.90	4.21	4.43	4.60	4.73	4.85	4.94	5.03
6	3.14	3.61	3.88	4.07	4.21	4.33	4.43	4.51	4.59
7	3.00	3.42	3.66	3.83	3.96	4.07	4.15	4.23	4.30
8	2.90	3.29	3.51	3.67	3.79	3.88	3.96	4.03	4.09
9	2.82	3.19	3.40	3.55	3.66	3.75	3.82	3.89	3.94
10	2.76	3.11	3.31	3.45	3.56	3.64	3.71	3.78	3.83
11	2.72	3.06	3.25	3.38	3.48	3.56	3.63	3.69	3.74
12	2.68	3.01	3.19	3.32	3.42	3.50	3.56	3.62	3.67
13	2.65	2.97	3.15	3.27	3.37	3.44	3.51	3.56	3.61
14	2.62	2.94	3.11	3.23	3.32	3.40	3.46	3.51	3.56
15	2.60	2.91	3.08	3.20	3.29	3.36	3.42	3.47	3.52
16	2.58	2.88	3.05	3.17	3.26	3.33	3.39	3.44	3.48
17	2.57	2.86	3.03	3.14	3.23	3.30	3.36	3.41	3.45
18	2.55	2.84	3.01	3.12	3.21	3.27	3.33	3.38	3.42
19	2.54	2.83	2.99	3.10	3.18	3.25	3.31	3.36	3.40
20	2.53	2.81	2.97	3.08	3.17	3.23	3.29	3.34	3.38
24	2.49	2.77	2.92	3.03	3.11	3.17	3.22	3.27	3.31
30	2.46	2.72	2.87	2.97	3.05	3.11	3.16	3.21	3.24
40	2.42	2.68	2.82	2.92	2.99	3.05	3.10	3.14	3.18
60	2.39	2.64	2.78	2.87	2.94	3.00	3.04	3.08	3.12
120	2.36	2.60	2.73	2.82	2.89	2.94	2.99	3.03	3.06
∞	2.33	2.56	2.68	2.77	2.84	2.89	2.93	2.97	3.00