امتحان اول   فصل ۸   آمار و کاربرد آن در مدیریت ۲

۱- مقادیرعلامت سوال‌های زیر را با استفاده از جدول توزیع نرمال استاندارد به دست آورید: (پاسخ همراه با راه‌حل باشد)

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۰ و انحراف معیار ۱۰ باشد.

P(X<15)=?   P(X>=25)=?   P(11<X<20)=?   P(X>?)=0.05   P(?<X<?)=0.95

حل آقای عسکری:

P(X<15)=?

$\mu = 10 \quad \sigma = 10$

$$z = \frac{15-10}{10} = \frac{5}{10} = 0/5$$

$$P(x<15) = P(z \leq 0/5) = 0/6915$$

P(X>=25)=?

$$z = \frac{25-10}{10} = 1/5$$

$$P(x \geq 25) = P(z \geq 1/5) = \cancel{p}\,1 - P(z \leq 1/5) = 1 - 0/9332 = 0/0668$$

P(11<X<20)=?

$$z = \frac{11-10}{10} = 0/1 \qquad z = \frac{20-10}{10} = 1$$

$$P(11<x<20) = P(0/1<z<1) = P(z \leq 1) - P(z<0/1) = 0/8413 - 0/5398 = 0/3015$$

$P(X>?)=0.05$

$p(x>?) = ۰/۰۵$

$p(z>z) = ۰/۰۵ \rightarrow 1 - p(Z<z) = ۰/۰۵ = 1 - ۰/۰۵ = ۰/۹۵$

$z \approx ۱/۶۵$

$P(?<X<?)=0.95$

$p(?<x<?) = ۰/۹۵$

$[p(|Z|<z)]$

$p(-z_1<x<z_2) = ۰/۹۵ \rightarrow p(Z<z_2) - p(Z<-z) =$

$p(z) - (1-p(z)) = ۲p(z) - 1 = ۰/۹۵$

$۲p(z) = ۱/۹۵ \rightarrow p(z) = ۰/۹۷۵$

$z = ۱/۹۶$

۲ـ یک شبکه تلویزنونی ادعا می کند که ۶۰ درصد از بینندگان آن برنامه A را می‌بینند. به فرض درست بودن این ادعا،

الف: احتمال اینکه از بین ۵۰۰ بیننده، دقیقا ۳۰۰ نفر به تماشای این برنامه بنشینند، چقدر است؟

ب: با احتمال ۹۵ درصد حداکثر چند نفر این برنامه را می بینند؟

$\mu = \lambda = n \times p = ۳۰۰ \qquad \sqrt{npq} = \sqrt{\underline{۳۰۰ \times ۰/۴}} = \sqrt{۱۲۰} = ۱۰/۹۵$

300*0.6*0.4

$p = ۶۰\% \qquad q = ۴۰\% \qquad n = ۵۰۰$

الف) $p(x = ۳۰۰) \Rightarrow p(۲۹۹/۵ \leq x \leq ۳۰۰/۵)$

$p(-۰/۰۴ \leq Z \leq ۰/۰۴) = p(Z \leq ۰/۰۴) - p(Z \leq -۰/۰۴)$

$۰/۵۱۶۰ - ۰/۴۸۴۰ = ۰/۰۳۲$

ب) $p(Z \leq z) = ۰/۹۵ \longrightarrow ۱/۶۵$

$x = ۳۰۰ + ۱۰/۹۵(۱/۶۵) = ۳۰۰ + ۱۸/۰۶۷۵ = ۳۱۸/۰۶۷۵$

۳ـ تعداد تلفن‌هایی که به یک شرکت زده می‌شود دارای توزیع پواسن با میانگین ۵ تلفن در دو دقیقه است.

الف: احتمال اینکه در ۶ دقیقه بین ۱۵ تا ۳۵ تلفن زده شود، چقدر است؟

ب: با احتمال ۹۵ درصد حداکثر چند تلفن در ۶ دقیقه به این شرکت زده می‌شود .

۵ در ۲ دقیقه   الف) در ۶ دقیقه بین ۱۵ تا ۳۰ تلفن

ب) با احتمال ۹۵٪ حداکثر چند تلفن در ۶ دقیقه زده می‌شود.

الف)

$\lambda = \frac{6}{2}\alpha = 3 \times 5 = 15 \qquad \sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{15} = 3{,}87$

$P(15 \leq x \leq 30) = P(14{,}5 \leq x \leq 30{,}5) = P(-0{,}129 \leq z \leq 4)$

$P(z \leq 4) - P(z \leq -0{,}129) = 1 - 0{,}4522 = 0{,}5478$

$z = \frac{14{,}5 - 15}{3{,}87} = -0{,}129 \qquad z = \frac{30{,}5 - 15}{3{,}87} \cong 4{,}00$

ب:

ب)

$\lambda = 15 \qquad \sigma = 3{,}87$

~~$p = 95\% \qquad q = 5\% \qquad n =$~~

$x = 15 + 3{,}87(1{,}65) = \cancel{167{,}75}$ 21

$P(z \leq z) = 0{,}95 \Rightarrow Z_{0{,}95} = 1{,}65$

۴ـ طول یک خط کش، دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۰ و انحراف معیار ۲ سانتی متر است. استاندارد این کالا بین ۸ و ۱۲ است. سود تولید خط کش ۱۵۰ تومان است. اگر طول خط کش تولیدی کمتر از ۸ باشد قابل استفاده نیست و ۵۰ تومان زیان دارد و در صورتی که طول آن بیشتر از ۱۲ باشد با هزینه ۱۰ تومان قابل اصلاح است. سود مورد انتظار تولید خط کش را محاسبه کنید.

استاندارد بین ۸ و ۱۲ با سود ۱۵۰ تومان $\sigma = 2$ $\mu = 10$

کمتر از ۸ ، ۵۰ ضرر

بیشتر از ۱۲ ، ۱۰ هزینه‌ی اضافی

سود مورد انتظار ؟

$$p(8<x<12)=p(-1\leq z\leq 1)$$

$$p(z\leq 1)-p(z\leq -1)= 0.8413-0.1587=0.6826$$

$$z=\frac{8-10}{2}=-1 \qquad z=\frac{12-10}{2}=1$$

$$p(x<8)=p(z<-1)=0.1587$$

$$p(x>12)=p(z>1)=1-p(z<1)=1-0.8413=0.1587$$

سود مورد انتظار:

$$0.1587\times(-50)+0.6826\times(150)+0.1587\times(150-10)=116.673$$

۵ـ به طور متوسط ۶ درصد تولیدات روز و ۹ درصد از تولیدات شب کارخانه‌ای معیوب است. تولیدات روز سه برابر شب است. تولیدات شب و روز در یک جا و به صورت درهم نگهداری می‌شود. احتمال اینکه مامور کنترل کیفیت پس از انتخاب ۱۳۰ کالا و آزمایش آنها متوجه وجود ۸ تا ۱۲ کالای معیوب شود، چقدر است؟

$n \times p = ۱۳۰ \times ۰/۰۶ = ۷/۸$

$npq = \sqrt{۷/۸ \times ۰/۰۴} = \sqrt{۰/۳۱۲} = ۰/۵$

$\frac{۳}{۴} = p \to \text{روز} \quad \frac{۱}{۴} \to p(\text{شب})$

$n = ۱۳۰$

۸ تا ۱۲ کالای معیوب

$p = ۰/۰۶\left(\frac{۳}{۴}\right) + ۰/۰۹\left(\frac{۱}{۴}\right) = ۰/۰۴۵ + ۰/۰۲۲۵ = ۰/۰۶۷۵$

$p \simeq ۰/۰۶$

$p(۸ \leq x \leq ۱۲) = p(۷/۵ \leq x \leq ۱۲/۵)$

$p\left(\frac{۷/۵ - ۷/۸}{۰/۵} \leq z \leq \frac{۱۲/۵ - ۷/۸}{۰/۵}\right) = p(-۰/۶ \leq z \leq ۹/۴)$

$p(z \leq ۹/۴) - p(z \leq -۰/۶) = ۱ - ۰/۲۷۴۳ = ۰/۷۲۵۷$