همگرایی ها را بررسی کنید

| $X_n$ | $-n^2$ | $0$ | $n^2$ |
|---|---|---|---|
| | $\frac{1}{2n^2}$ | $1-\frac{1}{n^2}$ | $\frac{1}{2n^2}$ |

$$\xrightarrow{n\to\infty} \quad \begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$F_{X_n}(x_n) = \begin{cases} 0 & x < -n^2 \\ \frac{1}{2n^2} & -n^2 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2n^2} + 1 - \frac{1}{n^2} & 0 \leq x < n^2 \\ 1 & n^2 \leq x \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} F(X_n) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} = F_X(x) \qquad X_n \xrightarrow{D} X$$

$$X_n \xrightarrow{a.s} X \quad ? \qquad P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} |X_n - X| > \varepsilon\right) = ?$$

$$\underbrace{P\left(\bigcap_{k=1} \bigcup^{\infty} |X_n| > \varepsilon\right)}_{\text{نزولی}} = \lim P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} |X_n| > \varepsilon\right)$$

$$\leq \lim \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\text{همگرا}} = 0$$

$$\Longrightarrow X_n \xrightarrow{a.s} 0 = X$$

$$X_n \xrightarrow{P} X$$

$E\,|X_n|^p$

| $\|X_n\|^p$ | $0$ | $n^{2p}$ |
|---|---|---|
| | $1-\frac{1}{n^2}$ | $\frac{1}{n^2}$ |

$$E|X_n|^p = \frac{n^{2p}}{n^2} = n^{2p-2} = n^{2(p-1)}$$

$$\lim E\,|X_n|^p = \infty \qquad X_n \overset{L^p}{\not\to} X$$

$$\lim E\,|X_n - 0|^p = \infty$$

---

۲) فرض کنید $X \sim U(0,1)$ $(f(x) = \frac{1}{۱})$ و $Y_n$ نمایی با میانگین $\frac{1}{n}$ $(f(y_n) = n e^{-n y_n})$

$F(y_n) = 1 - e^{-n y_n}$

و تعریف می‌کنیم $X_n = Y_n + X$ نشان دهید

$$X_n \xrightarrow{a.s} X \qquad , \qquad P(X_n \neq X \,,\, i.o)$$

$$X_n \xrightarrow{L_1} X$$

$X_n \xrightarrow{a.s} X$ ?

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{n=k}^{\infty} |\overset{Y_n + X}{X_n} - X| > \varepsilon}\Big)$$

$$= \lim_{k\to\infty} P\Big(\overset{\text{نزولی}}{\bigcup_{n=k}^{\infty}} |Y_n| > \varepsilon\Big) \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - P(|Y_n| \leq \varepsilon)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\varepsilon}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-\varepsilon})^n = \frac{e^{-\varepsilon}}{1 - e^{-\varepsilon}} = \frac{1}{e^{\varepsilon} - 1} < \infty$$

$0 < (1) < 0$ پس طبق قضیه داریم $P(A_n \,;\, i.o) = 0$ ~~$\lim \sum P(|Y_n| > \varepsilon) = 0$~~

$$\hookrightarrow P\big(\cap \cup |X_n - X| > \varepsilon\big) = 0 \longrightarrow X_n \xrightarrow{a.s} X$$

---

$$P(X_n \neq X \,;\, i.o) = P(X_n > X \,, i.o) + P(X_n < X \,, i.o) = P(Y_n > 0 \,, i.o) + P(Y_n < 0 \,, i.o)$$

$$= 1 - (1 - e^{-n \times 0}) = e^0 = 1 \qquad 0$$

---

$$X_n \xrightarrow{L_1} X \qquad E(|\overset{}{\underset{Y_n + X}{X_n}} - X|) \longrightarrow 0 \quad \Leftrightarrow E|Y_n| \to 0 \qquad X_n \xrightarrow{L_1} X$$

$$E|Y_n| \underset{\text{نمایی مثبت است}}{=} EY_n = \frac{1}{n} \to \lim_{n\to\infty} E|Y_n| = 0$$

٤٧-١٨

$$X_n \xrightarrow{p} X \qquad Y_n \xrightarrow{p} Y \Longrightarrow X_nY_n \xrightarrow{p} XY$$

$$P(|X_nY_n - XY| \geq \varepsilon) = P(|X_nY_n - X_nY + X_nY - XY| \geq \varepsilon)$$
$$\leq P\left(|X_n(Y_n - Y)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|Y(X_n - X)| \geq \varepsilon/2\right)$$

$$\left(|X_n(Y_n-Y)| \geq \varepsilon/2\right) = \left(|X_n(Y_n-Y)| \geq \frac{\varepsilon}{2},\ |Y_n - Y| \geq \delta\right)$$
$$\cup \left(|X_n(Y_n-Y)| \geq \frac{\varepsilon}{2},\ |Y_n-Y|<\delta\right)$$
$$\subseteq \{|Y_n - Y| \geq \delta\} \cup \left\{|X_n| \geq \frac{\varepsilon}{2\delta}\right\}$$

$$P\left(|X_n(Y_n-Y)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq P\{|Y_n-Y| \geq \delta\} + P\left(|X_n| \geq \frac{\varepsilon}{2\delta}\right)$$

$$P\left(|Y(X_n-X)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq P(|X_n-X| \geq \delta) + P\left(|Y| \geq \frac{\varepsilon}{2\delta}\right)$$

$$P(|X_nY_n - XY| \geq \varepsilon) \leq P\left(|X_n| \geq \frac{\varepsilon}{2\delta}\right) + P\left(|Y| > \frac{\varepsilon}{2\delta}\right)$$

چون $X_n$ و $Y$ متغیرهای تصادفی اند پس در احتمال کراندار اند یعنی به ازای هر $\varepsilon > 0$ وجود دارد $a > 0$ که $P(|X| > a) < \varepsilon$) پس می‌توان با اختیار کردن $\delta$ کوچک و $M$ به اندازه کافی بزرگ

$$P\left(|Y| > \frac{\varepsilon}{2\delta}\right) < \frac{\eta}{2}, \quad P\left(|X_n| \geq \frac{\varepsilon}{2\delta}\right) < \frac{\eta}{2}$$

بنابراین

$$P(|X_nY_n - XY| \geq \varepsilon) \leq \eta \rightarrow \lim \rightarrow 0$$

متغیر تصادفی در احتمال کراندار $P(|X|>a) \leq \varepsilon \Rightarrow P(|X|<a) > 1-\varepsilon$

٢٧-١٩

$$X_n \xrightarrow{P} X$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X_n} \xrightarrow{P} \frac{1}{X}$$

$$P\left(\left|\frac{1}{X_n}-\frac{1}{X}\right|>\varepsilon\right) = P\left(\frac{|X_n-X|}{|X_nX|}\geq\varepsilon,\ |X_n-X|>\delta\right)$$

$$+\ P\left(\frac{|X_n-X|}{|X_nX|}\geq\varepsilon,\ |X_n-X|<\delta\right)$$

از طرفی

$$\left\{\frac{|X_n-X|}{|X_nX|}\geq\varepsilon,\ |X_n-X|>\delta\right\}\cup\left\{\frac{|X_n-X|}{|X_nX|}\geq\varepsilon,\ |X_n-X|<\delta\right\}$$

$$\subset \underbrace{\{|X_n-X|>\delta\}}_{<\eta/2} \cup \underbrace{\left\{\frac{1}{|X_nX|}\geq\frac{\varepsilon}{\delta}\right\}}_{<\eta/2}$$

متغیر تصادفی $Y$

$P(|Y|\geq\frac{\varepsilon}{\delta}) < \frac{\eta}{2}$ داریم

(چون متغیر تصادفی در احتمال کراندار است)

$$P\left(\left|\frac{1}{X_n}-\frac{1}{X}\right|>\varepsilon\right) < \frac{\eta}{2}+\frac{\eta}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{X_n}-\frac{1}{X}\right|>\varepsilon\right) = 0$$

۳) ثابت کنید مجموعه نقاطی از فضای نمونه‌ای که دنباله $X_n$ از متغیرهای تصادفی در آن‌ها حد دارد یک پیشامد است

$$\{\omega: \text{حد دارد } X_n\}^c = \{\omega: \text{حد ندارد } X_n\} = \{\omega: \liminf X_n \neq \limsup X_n\}$$

$$= \{\omega: \liminf X_n < \limsup X_n\} = \bigcup_{r\in Q} \{\liminf X_n \le r \le \limsup X_n\}$$

$$= \bigcup_{r\in Q} \{\underbrace{\liminf X_n}_{\in \mathcal{F}} < r\} \cap \{\underbrace{\limsup X_n}_{\in \mathcal{F}} > r\} \in \mathcal{F}$$

---

۴)

$$\begin{matrix} X_n \xrightarrow{P} X \\ X_n \xrightarrow{P} Y \end{matrix} \Rightarrow X \overset{as}{=} Y \qquad p(X\neq Y)=0 \Rightarrow P(|X-Y|>0)$$

$$= p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[|X-Y| > 1/n\right]\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} p(|X-Y|>1/n)$$

$$|X-Y+X_n-X_n| \le |X_n-X| + |X_n-Y|$$

$$X_n \xrightarrow{P} X \quad \forall n \ge N_1 \text{ st } p(|X_n-X| > \underbrace{1/2n}_{\varepsilon_1}) < \underbrace{\varepsilon/2^n}_{\delta_1} = \varepsilon_1$$

$$X_n \xrightarrow{P} Y \quad \forall n \ge N_2 \text{ st } p(|X_n-Y| > \underbrace{1/2n}_{\varepsilon_2}) < \underbrace{\varepsilon/2^n}_{\delta_2}$$

$\forall n \ge N = \max\{N_1, N_2\}$ پس

$$p(|X-Y|>1/n) \le p(|X-X_n|>1/2n) + p(|X_n-Y|>1/2n)$$

$$p(|X-Y|>0) \le \sum_{n=1}^{\infty} p(|X-Y|>1/n) \le \sum_{n=1}^{\infty} p(|X-X_n|>1/2n) + \sum_{n=1}^{\infty} p(|X_n-Y|>1/2n)$$

$$\Rightarrow p(|X-Y|>0) \le \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon/2^n + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon/2^n = 2\varepsilon$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1} \qquad 0 < p(|X-Y|>0) < 0 \Rightarrow P(X=Y)=1$$

۵- فرض کنید $X$ و $Y$ دو متغیر تصادفی مستقل و هم‌یک دارای توزیع یکنواخت بر $(0,1)$ باشد

$Z$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم $Z=\begin{cases}1/3 & X\geq 1/3\\ Y & X<1/3\end{cases}$ مطلوبست $E(Z)$

$f(x)=1 \quad 0<x<1$

$f(y)=1 \quad 0<y<1$

$$Z=\frac{1}{3}I_{[X\geq \frac{1}{3}]}+Y\,I_{[X<1/3]}$$

$E(Y)=1/2$

$$E(Z)=\frac{1}{3}P(X\geq 1/3)+E(Y)\,P(X<1/3)$$

$$=\frac{1}{3}\int_{\frac{1}{3}}^{1}dx+\frac{1}{2}\underbrace{P(X<\tfrac{1}{3})}_{\int_0^{1/3}dx}$$

$$=\frac{1}{3}(1-1/3)+1/2(1/3)=\frac{7}{18}$$

---

۶- ثابت کنید اگر $X\geq 0$، $EX=0$ تقریباً مطمئن $X=0$

$$P(X\neq 0)=P(X>\varepsilon)\overset{\text{مارکف}}{<}\frac{E(X)}{\varepsilon}=0$$

$$0<P(X>\varepsilon)<0$$

$$\Rightarrow P(X>\varepsilon)=0\to$$

$$P(X=0)\overset{a.s}{=}1$$

---

۷- نشان دهید اگر $E(XI_A)=0$ $\forall A$ (یعنی $\int_A X\,dP=0$ $\forall A\in\mathcal{F}$)

آنگاه تقریباً مطمئن $X\overset{a.s}{=}0$

$X$ یک‌ای دلخواه

برهان خلف: $X\neq 0$ as $\quad \forall\varepsilon>0 \quad P(|X|>\varepsilon)>0$

$$\forall A\in\mathcal{F} \quad \overset{\text{تعریف کنیم}}{A}=\{|X|>\varepsilon\}\in\mathcal{F}$$

$$E(XI_A)=\int_A X\,dP=\int_{\underline{\{|X|>\varepsilon\}}}X\,dP\geq \varepsilon\,P(|X|>\varepsilon)>0$$

$$\Rightarrow \exists A \quad \int_A X\,dP>0 \longrightarrow \text{خلاف فرض}$$

$$X\overset{a.s}{=}0 \leftarrow P(|X|>\varepsilon)=0$$

۸- از نامساوی جنسن استفاده کنید و نشان دهید اگر $X$ متغیر تصادفی با امید ریاضی متناهی باشد ثابت کنید

$$E\left(e^{-(EX-X)}\right) \geq 1$$

$$g(E(X)) \leq E(g(X))$$

$$g(X) = e^{-(EX-X)} \Rightarrow g(E(X)) = e^{-(EX-EX)} = 1$$

---

۹- فرض کنید $X \in L_1$ و $E|X|<\infty$ ، $A$ و $A_n$ پیشامد باشند نشان دهید

$$\int_{\{|X|>n\}} x\,dp \to 0$$

$$A_n = \{|X|>n\} \qquad A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$$

$$\int_{\{|X|>n\}} x\,dp = E(X I_{\{|X|>n\}}) = E(X I_{A_n})$$

صعودی $A_n \xrightarrow{\searrow} A = \{|X|=\infty\} \Rightarrow X I_{A_n} \searrow X I_A$

طبق DCT چون $|X I_{A_n}| < |X|$ پس

$$E(X I_{A_n}) \to E(X I_A) = \int_A x\,dp$$

$A = \{|X|=\infty\}$ $X \in L_1 \Rightarrow E|X| < \infty \Rightarrow P(A) = 0$

پس $\int_{A_n = \{|X|>n\}} x\,dp \to 0$

فرض کنید $X_n \longrightarrow X$ و $\max(|X_n|,|X|) \le k$ و $k$ ثابت، آن گاه نشان دهید

$$\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|) = 0$$

$$|X_n - X| \le |X_n| + |X| \le 2\max(|X_n|,|X|) \le 2k \in L^1$$

هر عدد ثابت عضو $L^1$ است، پس بنا به قضیه DCT

$$\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|) = E(\lim_{n\to\infty} |X_n - X|)$$

$$= E(|\lim_{n\to\infty} X_n - X|) = E(|X - X|) = 0$$

اگر $X$ و $Y$ دو متغیر تصادفی مستقل باشند و $EX$ موجود باشد، نشان دهید که برای هر $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ داریم

$$\int_{[Y\in B]} X\,dP = E(X)\,P(Y\in B)$$

$$\int_{[Y\in B]} X\,dP = \int X\, I_{[Y\in B]}\,dP = E(X\, I_{[Y\in B]})$$

$$= E(X)\,E(I_{[Y\in B]}) = E(X)\,P(Y\in B)$$

---

فرض کنید $X$ و $Y$ دو متغیر تصادفی (روی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$) باشند، ثابت کنید

$$\sup_A |P(X\in A) - P(Y\in A)| \le P(X\neq Y)$$

$\forall A \in \mathcal{F}$

$$P(X\neq Y) \geq P(X\in A,\ Y\in A^c) \qquad P(A\cap B^c) = P(A) - P(A\cap B)$$

$$P(X^{-1}(A)\cap Y^{-1}(A^c)) \underset{\downarrow}{=} P(X^{-1}(A)) - P(X^{-1}(A)\cap Y^{-1}(A))$$

$$Y^{-1}(A^c) = (Y^{-1}(A))^c$$

$$\geq P(X^{-1}(A)) - P(Y^{-1}(A)) = P(X\in A) - P(Y\in A)$$

$$\Rightarrow P(X\neq Y) \geq P(X\in A) - P(Y\in A) \quad \text{I}$$

$$P(X\neq Y) \geq P(X\in A^c,\ Y\in A) = P(Y^{-1}(A)\cap X^{-1}(A^c))$$

$$= P(Y^{-1}(A)) - P(Y^{-1}(A)\cap X^{-1}(A))$$

$$\geq P(Y^{-1}(A)) - P(X^{-1}(A)) = P(Y\in A) - P(X\in A)$$

$$\Rightarrow P(X\neq Y) \geq P(Y\in A) - P(X\in A) \quad \text{II}$$

$$\Rightarrow P(X\in A) - P(Y\in A) \geq -P(X\neq Y)$$

$$\text{I}\ \text{II}\quad -P(X\neq Y) \le P(X\in A) - P(Y\in A) \le P(X=Y) \qquad \forall A\in\mathcal{F}$$

$$|P(X\in A) - P(Y\in A)| \le P(X\neq Y)$$

$$\forall A\in\mathcal{F} \quad |P(X\in A) - P(Y\in A)| \le P(X\neq Y)$$

$$\Rightarrow \sup |P(X\in A) - P(Y\in A)| \le P(X\neq Y)$$